

А. А. Килин, д-р физ.-мат. наук, проф., kilin@rcd.ru,
Удмуртский государственный университет, г. Ижевск,
Ю. Л. Караваяев, канд. физ.-мат. наук, доц., karavaev_yury@istu.ru,
В. А. Шестаков, аспирант, v.a.shestakov95@gmail.com,
ИЖГТУ им. М. Т. Калашникова, г. Ижевск

Движение без проскальзывания и отрыва от поверхности четырехколесного высокоманевренного мобильного робота*

Статья посвящена анализу движения высокоманевренного мобильного робота с четырьмя роликонесущими колесами с учетом условий возникновения отрыва колес от поверхности перемещения, а также возникновения проскальзывания колес. В рамках анализа движения рассмотрена задача определения опорных реакций поверхности перемещения для мобильной платформы с четырьмя колесами. Для решения этой задачи конструкция мобильного робота представлена в виде статически неопределимой стержневой рамы. Эквивалентное представление платформы робота в виде пространственной рамы обусловлено удобством выполнения расчетов. Раскрытие статической неопределимости рассматриваемой системы осуществлено с помощью метода сил. С помощью данного метода получены зависимости опорных реакций поверхности перемещения от расположения центра масс мобильного робота с четырьмя колесами. Особенностью рассматриваемой системы является то, что полученные зависимости опорных реакций носят нелинейный характер. На основе полученных зависимостей опорных реакций проведено исследование влияния положения центра масс мобильного робота с четырьмя колесами на возникновение отрыва и проскальзывания колес мобильного робота. Исследование проведено в рамках модели сухого трения, согласно которой модуль силы трения скольжения пропорционально зависит от опорной реакции, действующей на колесо со стороны поверхности перемещения. В результате численного моделирования определены области допустимых положений центра масс мобильного робота, при котором не происходит отрыв колес от поверхности перемещения, а также не возникает проскальзывание колес. Предложенная модель, описывающая зависимость опорных реакций поверхности перемещения, может быть использована при проведении исследований, посвященных анализу движения мобильных роботов с четырьмя колесами, перемещение которых осуществляется с помощью различных типов колес. Сформулированные выводы о влиянии положения центра масс мобильного робота на возникновение отрыва колес от поверхности перемещения, а также на возникновение проскальзывания колес применимы ко всем мобильным платформам с четырьмя колесами.

Ключевые слова: высокоманевренный мобильный робот, сила трения, опорные реакции, статическая неопределимость, метод сил, проскальзывание, моделирование, центр масс

Введение

Мобильные роботы с омниколесами (или колесами меканум, в русскоязычной литературе — с роликонесущими колесами) активно развиваются и внедряются как в образовательные процессы, так и для выполнения реальных прикладных задач точного позиционирования и транспортировки. В образовательных и исследовательских задачах чаще всего используется конструкция мобильного робота с тремя омниколесами [1–3], которая обеспечивает устойчивость мобильного робота и постоянство контакта роликов колес с подстилающей поверхностью. Кинематика и динамика мобильных роботов с тремя роликонесущими колесами подробно исследована в различных работах с учетом силы сцепления роликов колес с поверхностью (реакций силы трения). В работе [4] проведено исследование динамической модели мобильного

робота с тремя роликонесущими колесами, направленного на анализ сил трения, действующих вдоль оси вращения роликов колес. В результате анализа определены параметры траектории движения, при которых возможна реализация движения без возникновения проскальзывания колес. Решение прямой и обратной силомоментных задач для шасси мобильного робота с тремя роликонесущими колесами представлено в статье [5]. В работах [6, 7] рассмотрена задача стабилизации движения мобильного робота с тремя омниколесами с учетом реакций сил трения. Работы [8, 9] являются одними из первых, в которых предложены математические модели мобильных роботов с тремя омниколесами, учитывающие проскальзывания роликов колес.

Но на практике наибольшее распространение получают конструкции мобильных роботов с четырьмя и более роликонесущими колесами, что усложняет анализ сил реакций и проскальзывания роликов колес, так как конструкция становится статически неопределимой. При решении задач анализа движения транспортных средств и мобильных роботов, в которых в качестве движителей используются колеса с шинами, вычис-

*Работа Ю. Л. Караваяева и В. А. Шестакова выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (FZZN-2020-0011), работа А. А. Килина выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (FEWS-2020-0009).

ление реакций каждого колеса в большинстве случаев не требуется, а при расчете опорных реакций используются различные схемы замещения. Например, при определении условий заноса одной из осей двухосного транспорта с четырьмя колесами могут быть рассмотрены суммарные опорные реакции, действующие на переднюю и заднюю оси [10]. Для мобильных роботов с роликонесущими колесами определение сил реакций для всех колес необходимо для обеспечения управляемого движения мобильного робота, которое возможно только при постоянстве контакта ролика с поверхностью и отсутствии его проскальзывания. В таком случае для раскрытия статической неопределимости требуется введение дополнительных уравнений, описывающих условия равновесия, деформации и т. д.

Задача раскрытия статической неопределимости рассмотрена ранее в различных работах по определению сил контактного взаимодействия колес с опорной поверхностью. Математическая модель мобильного робота *Kuka youBot* с четырьмя колесами *Mecanum* рассмотрена в работе [11]. В рамках предложенной модели, описывающей силы сцепления роликов колес с поверхностью перемещения, решение задачи определения опорных реакций предложено на основе выполнения условия совместности деформаций диагонально расположенных опор (относительно малые вертикальные перемещения колес). Пространственная модель транспортного средства с четырьмя колесами рассмотрена в работах [12, 13]. Конструкция транспортного средства представлена в виде нескольких составных частей, опорные реакции определены сначала относительно передней и задней колесных осей, а затем для каждого колеса каждой из колесных осей. При этом влияние дополнительных факторов, например, аэродинамического сопротивления, учитывается с помощью принципа суперпозиции (независимости действия сил). Подобное решение системы для модели с четырьмя колесами получено в работах [14, 15] на основе решения системы уравнений с помощью введения дополнительного уравнения, описывающего деформацию (угол крена) платформы, возникающую в результате действия сил, поперечных направлению перемещения. Однако рассмотренные в данных работах методы определения опорных реакций используют допущения, учитывающие деформации лишь отдельных частей конструкции.

Проскальзывание ролика колеса возникает в случае, когда касательная составляющая силы

реакции в точке контакта ролика с плоскостью превышает силу трения скольжения, действующую в направлении оси вращения ролика. Для определения силы трения в точке контакта ролика с поверхностью можно использовать различные модели контактного взаимодействия [16, 17]. Например в работах [11, 18] используется модель сухого трения по Кулону, в работах [7, 19] для описания взаимодействия колес с подстилающей поверхностью используется эмпирическая зависимость силы сцепления от проскальзывания [20], известная как "*Tire Magic Formula*". Но в рамках данной работы мы ограничимся рассмотрением модели сухого трения, согласно которой модуль силы трения скольжения пропорционально зависит от опорной (нормальной) реакции, действующей на колесо со стороны опорной поверхности. Таким образом, при исследовании динамики мобильных роботов в целях определения условий возникновения проскальзывания колес необходимым является определение опорных реакций поверхности перемещения для всех колес мобильного робота.

В данной работе рассмотрена задача определения опорных реакций для мобильной платформы с четырьмя колесами на основе введения дополнительного уравнения, описывающего условие деформации рамы, в рамках квазистатической модели. На основе полученных зависимостей проведено исследование влияния положения центра масс мобильного робота с четырьмя колесами на возникновение отрыва и проскальзывания колес мобильного робота.

1. Квазистатическая модель распределения опорных реакций для мобильного робота с четырьмя колесами

Конструкция мобильного робота представлена в виде цельной платформы, на которой жестко закреплены четыре колеса. Рассмотрим нагрузки, действующие на колеса мобильного робота. На рис. 1, а представлена структурная схема мобильного робота. Для определения опорных реакций мобильного робота будем использовать законы квазистатики и методы теории сопротивления материалов.

При использовании методов теории сопротивления материалов необходимо совершить переход к эквивалентной расчетной схеме. В первом приближении представим конструкцию мобильного робота в виде пространственной рамы, закреплен-

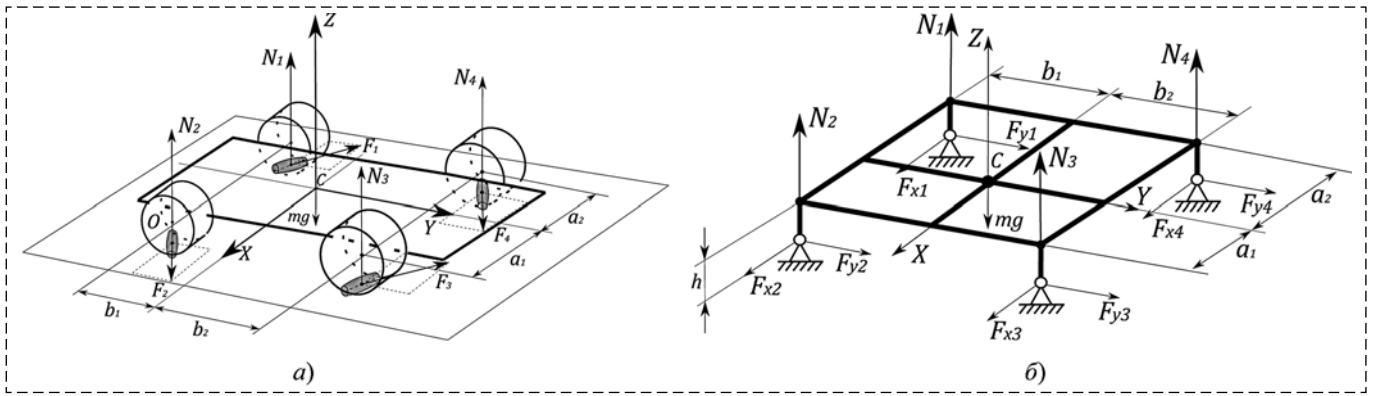


Рис. 1. Схемы мобильного робота:

a — геометрическая схема; *б* — расчетная схема

Fig. 1. Schemes of a mobile robot:

a — the structural scheme; *b* — the calculation scheme

ной с помощью четырех шарнирно-неподвижных опор. Расчетная схема конструкции мобильного робота представлена на рис. 1, б. Эквивалентное представление платформы робота в виде пространственной рамы обусловлено удобством проведения дальнейших расчетов. В свою очередь, эквивалентная конструкция пространственной рамы обусловлена возникновением внутреннего изгибающего момента как в продольном, так и поперечном сечениях платформы мобильного робота. В рамках квазистатической модели колеса мобильного робота представлены как шарнирно-неподвижные опоры, в которых возникают реакции как в вертикальной, так и в горизонтальной плоскостях. В качестве действующих на колеса внешних сил рассмотрены сила тяжести и реакции сил трения, действующие вдоль осей вращения роликов колес.

Действие реакций сил трения на каждом из колес заменим суммарными моментами M_1 и M_2 , действующими относительно осей, содержащих центр масс мобильного робота:

$$M_1 = \sum F_{y_i} h = F_{y1} h + F_{y2} h + F_{y3} h + F_{y4} h;$$

$$M_2 = \sum F_{x_i} h = F_{x1} h + F_{x2} h + F_{x3} h + F_{x4} h.$$

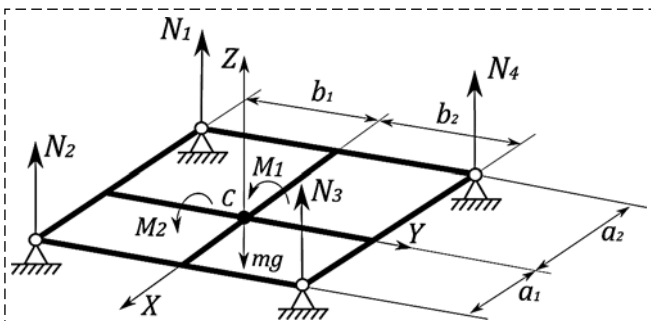


Рис. 2. Итоговая расчетная схема

Fig. 2. The final calculation scheme

Значения моментов M_1 и M_2 далее будем считать известными. Таким образом, внешние нагрузки в горизонтальной плоскости рамы отсутствуют. При составлении уравнений равновесия системы реакции опор в горизонтальной плоскости рамы (F_{xi} и F_{yi}), $i = 1..4$, а также создаваемый ими момент относительно оси CZ не учитываются. Итоговая расчетная схема представлена на рис. 2.

Уравнения равновесия и раскрытие статической неопределимости. Запишем уравнения равновесия для рассматриваемой системы:

$$\sum F_z = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 - mg = 0; \quad (1)$$

$$\sum M_x = -(N_1 + N_2)b_1 + (N_3 + N_4)b_2 + \sum F_{y_i} h = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_y = (N_1 + N_4)a_2 - (N_2 + N_3)a_1 + \sum F_{x_i} h = 0. \quad (3)$$

Для раскрытия статической неопределимости воспользуемся методом сил. Суть метода заключается в том, что статически неопределимая система освобождается от действия дополнительных связей, а их действие заменяется силами и моментами. Значения сил и моментов подбираются таким образом, чтобы перемещения системы по направлениям действия отброшенных связей равнялись нулю.

Число уравнений равновесия с учетом сделанных допущений об отсутствии внешних нагрузок в плоскости рамы составляет 3, а число неизвестных величин (опорных реакций N_1, N_2, N_3 и N_4) равно 4. Таким образом, степень статической неопределимости рассматриваемой системы равна 1, соответственно, для получения статически определимой системы необходимо отбросить одну дополнительную связь. Схема основной системы (системы, освобожденной от дополнительных связей) пред-

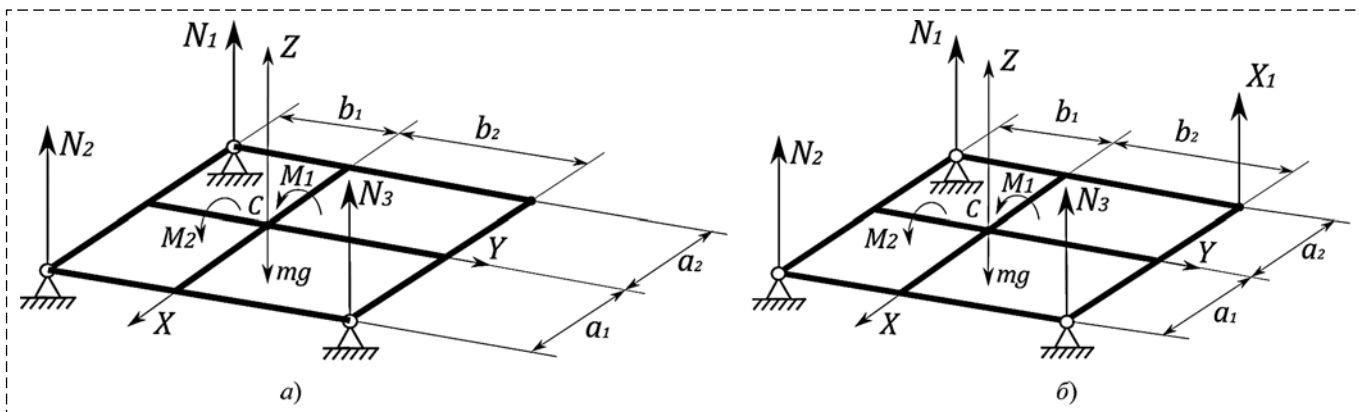


Рис. 3. Схемы основной (а) и эквивалентной (б) систем
 Fig. 3. Schemes of the main system (a) and of the equivalent system (b)

ставлена на рис. 3, а. После того, как дополнительные связи (реакция \$N_4\$) отброшены, и система превращена в статически определимую, вместо отброшенных связей вводят силовые факторы (силу \$X_1\$), и получают эквивалентную систему. Схема полученной эквивалентной системы представлена на рис. 3, б.

Определение силы, заменяющей действие отброшенной связи, осуществляется с помощью канонических уравнений, описывающих условие отсутствия перемещения системы по направлению отброшенной связи (точки крепления четвертого колеса). Число уравнений соответствует степени статической неопределимости системы:

$$\Delta_1 = \delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0, \quad (4)$$

где \$\Delta_1\$ — перемещение системы вдоль направления отбрасываемой связи; \$\delta_{11}\$ — перемещение системы вдоль направления отбрасываемой связи, вызванное единичной силой \$X_1 = 1\$; \$\Delta_{1p}\$ — перемещение системы вдоль направления отбрасываемой связи, вызванное заданной внешней нагрузкой.

Коэффициенты уравнения (4) определяются методом перемножения эпюр. Для этого поочеред-

но прикладываются заданная рабочая нагрузка и единичная сила \$X_1\$, затем строятся и перемножаются грузовая (от действия внешних сил в основной системе) и единичная (от действия единичной силы \$X_1\$) эпюры изгибающих моментов.

Построение грузовой эпюры. Для определения опорных реакций запишем уравнения равновесия для основной системы (рис. 3, а):

$$\sum F_z = N_1 + N_2 + N_3 - mg = 0; \quad (5)$$

$$\sum M_x = -(N_1 + N_2)b_1 + N_3b_2 + \sum F_y h = 0; \quad (6)$$

$$\sum M_y = N_1a_2 - (N_2 + N_3)a_1 + \sum F_x h = 0. \quad (7)$$

В результате решения системы (5)—(7) определим опорные реакции для основной системы:

$$N_1 = \frac{mga_1}{a_1 + a_2} - \frac{\sum F_x h}{a_1 + a_2};$$

$$N_2 = mg - \frac{mga_1}{a_1 + a_2} - \frac{mgb_1}{b_1 + b_2} + \frac{\sum F_x h}{a_1 + a_2} + \frac{\sum F_y h}{b_1 + b_2};$$

$$N_3 = \frac{mgb_1}{b_1 + b_2} - \frac{\sum F_y h}{b_1 + b_2}.$$

Полученная грузовая эпюра изгибающих моментов основной системы представлена на рис. 4.

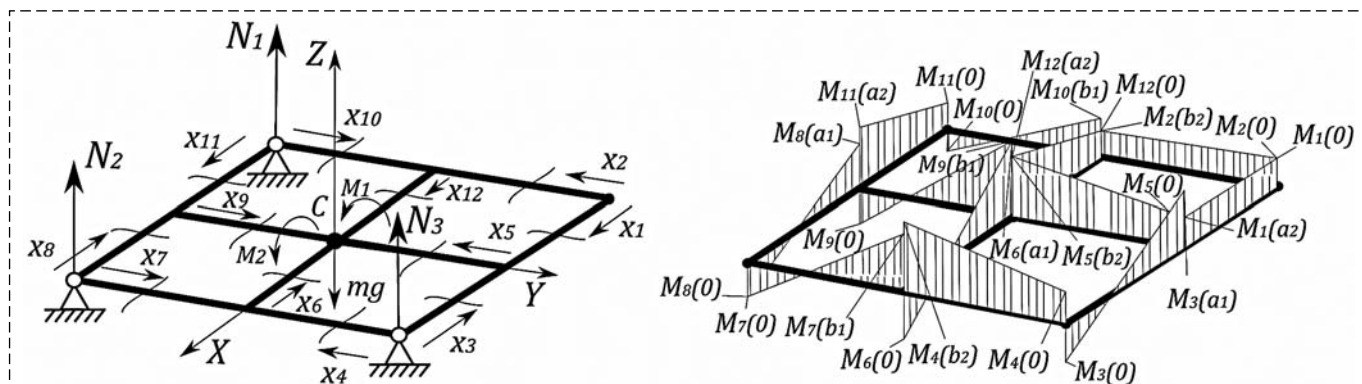


Рис. 4. Грузовая эпюра изгибающих моментов основной системы
 Fig. 4. Load diagram of the main system

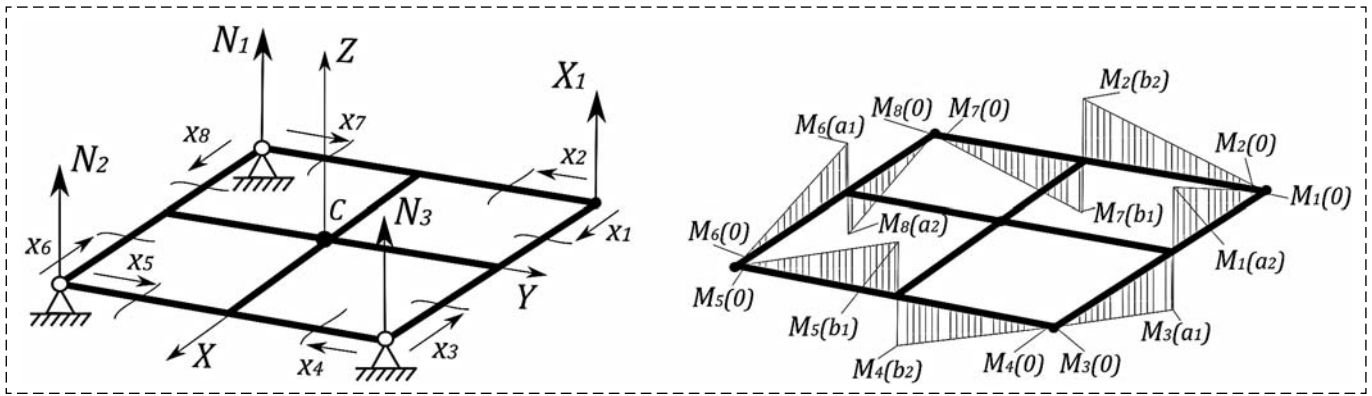


Рис. 5. Единичная эпюра изгибающих моментов
Fig. 5. Diagram for the single load

Таблица 1
Table 1

Значения изгибающих моментов M_p грузовой эпюры
Bending moments values M_p of load diagram of the main system

№	Границы участка $0 \leq x_i \leq l$	Зависимость $M_p(x_i)$	Значение $M_p(0)$	Значение $M_p(l)$
1	$0 \leq x_1 \leq a_2$	$M_1 = \Sigma F_x h$	$\Sigma F_x h$	$\Sigma F_x h$
2	$0 \leq x_2 \leq b_2$	$M_2 = \Sigma F_y h$	$\Sigma F_y h$	$\Sigma F_y h$
3	$0 \leq x_3 \leq a_1$	$M_3 = N_3 x_3 - \Sigma F_x h$	$\Sigma F_x h$	$N_3 a_1 - \Sigma F_x h$
4	$0 \leq x_4 \leq b_2$	$M_4 = N_3 x_4 + \Sigma F_y h$	$\Sigma F_y h$	$N_3 b_2 + \Sigma F_y h$
5	$0 \leq x_5 \leq b_2$	$M_5 = N_3 x_5 + \Sigma F_y h$	$\Sigma F_y h$	$N_2 b_2 + \Sigma F_y h$
6	$0 \leq x_6 \leq a_1$	$M_6 = (N_3 + N_2) x_6 - \Sigma F_x h$	$-\Sigma F_x h$	$(N_2 + N_3) a_1 - \Sigma F_x h$
7	$0 \leq x_7 \leq b_1$	$M_7 = N_2 x_7 - \Sigma F_y h$	$-\Sigma F_y h$	$N_2 b_1 - \Sigma F_y h$
8	$0 \leq x_8 \leq a_1$	$M_8 = N_2 x_8 - \Sigma F_x h$	$-\Sigma F_x h$	$N_2 a_1 - \Sigma F_x h$
9	$0 \leq x_9 \leq b_1$	$M_9 = (N_1 + N_2) x_9 - \Sigma F_y h$	$-\Sigma F_y h$	$(N_1 + N_2) b_1 - \Sigma F_y h$
10	$0 \leq x_{10} \leq b_1$	$M_{10} = N_1 x_{10} - \Sigma F_y h$	$-\Sigma F_y h$	$N_1 b_1 - \Sigma F_y h$
11	$0 \leq x_{11} \leq a_2$	$M_{11} = N_1 x_{11} + \Sigma F_x h$	$\Sigma F_x h$	$N_1 a_2 + \Sigma F_x h$
12	$0 \leq x_{12} \leq a_2$	$M_{12} = N_1 x_{12} + \Sigma F_x h$	$\Sigma F_x h$	$N_1 a_2 + \Sigma F_x h$

Таблица 2
Table 2

Значения изгибающих моментов M_1 единичной эпюры
Bending moments values M_1 of diagram for the single load

№	Границы участка $0 \leq x_i \leq l$	Зависимость $M_1(x_i)$	Значение $M_1(0)$	Значение $M_1(l)$
1	$0 \leq x_1 \leq a_2$	$M_1 = X_1 x_1$	0	a_2
2	$0 \leq x_2 \leq b_2$	$M_2 = X_1 x_2$	0	b_2
3	$0 \leq x_3 \leq a_1$	$M_3 = N_3 x_3$	0	$-a_1$
4	$0 \leq x_4 \leq b_2$	$M_4 = N_3 x_4$	0	$-b_2$
5	$0 \leq x_5 \leq b_1$	$M_5 = N_2 x_5$	0	b_1
6	$0 \leq x_6 \leq a_1$	$M_6 = N_2 x_6$	0	a_1
7	$0 \leq x_7 \leq b_1$	$M_7 = N_1 x_7$	0	$-b_1$
8	$0 \leq x_8 \leq a_2$	$M_8 = N_1 x_8$	0	$-a_2$

Значения изгибающих моментов M_p грузовой эпюры определены на каждом из участков основной системы и представлены в табл. 1.

Построение единичной эпюры. Запишем уравнения равновесия для системы с действующей только внешней единичной силой $X_1 = 1$:

$$\Sigma F_z = N_1 + N_2 + N_3 + X_1 = 0; \quad (8)$$

$$\Sigma M_x = -(N_1 + N_2) b_1 + (N_3 + X_1) b_2 = 0; \quad (9)$$

$$\Sigma M_y = (N_1 + X_1) a_2 - (N_2 + N_3) a_1 = 0. \quad (10)$$

В результате решения системы (8)–(10) определим опорные реакции для системы с действующей только внешней единичной силой $X_1 = 1$:

$$N_1 = -X_1 = -1; \quad N_2 = X_1 = 1; \quad N_3 = -X_1 = -1.$$

Полученная единичная эпюра изгибающих моментов представлена на рис. 5.

Значения изгибающих моментов M_1 единичной эпюры определены на каждом из участков системы и представлены в табл. 2.

Определение коэффициентов канонического уравнения. Коэффициенты δ_{11} и Δ_{1p} уравнения (4) определяются перемножением единичных эпюр изгибающих моментов (от действия единичной силы X_1) и единичной эпюры на грузовую (от действия внешних сил в основной системе) соответственно. Для системы с элементами равной жесткости получим следующие выражения:

$$\Delta_{1p} = \delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\delta_{11} = \Sigma \int \frac{M_1 M_1}{EJ} dz = \frac{2(a_1^3 + a_2^3 + b_1^3 + b_2^3)}{3EJ};$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} &= \sum \int \frac{M_1 M_p}{EJ} dz = \\ &= \frac{mg(a_1^3 + b_1^3)}{3EJ} + \frac{(\sum Fxh - mga_1)2b_1^3}{3EJ(a_1 + a_2)} + \\ &+ \frac{(\sum Fxh - mga_1)(a_1^3 + a_2^3)}{3EJ(a_1 + a_2)} + \frac{(\sum Fyh - mgb_1)2a_1^3}{3EJ(b_1 + b_2)} + \\ &+ \frac{(\sum Fyh - mgb_1)(b_1^3 + b_2^3)}{3EJ(b_1 + b_2)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где EJ — жесткость элементов системы на изгиб.

Из выражения (11) видно, что при $h \ll b_i$ или $h \ll a_i$, т. е. когда радиус колеса много меньше, чем расстояние между колесами, составляющая реакции от силы трения мала по сравнению с составляющей от силы тяжести, и в этом случае можно перейти к рассмотрению квазистатической модели определения реакции.

Таким образом, решая систему (1)–(4) с учетом (11) относительно N_1, \dots, N_4 , получим следующие зависимости опорных реакций без учета составляющей реакции силы трения:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{mg(2b_2^4 a_1 + b_1(a_1 - a_2)b_2^3 + b_2(a_1 + a_2)(b_1^3 + 2a_1^3 - a_1^2 a_2 + a_1 a_2^2) - b_1 a_1^3 a_2 + b_1 a_1 a_2^3)}{2(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(b_1^3 + b_2^3 + a_1^3 + a_2^3)}, \\ N_2 &= \frac{mg(2b_2^4 a_2 + b_1(a_1 - a_2)b_2^3 + b_2(a_1 + a_2)(b_1^3 + 2a_2^3 - a_1 a_2^2 + a_1^2 a_2) + b_1 a_1^3 a_2 - b_1 a_1 a_2^3)}{2(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(b_1^3 + b_2^3 + a_1^3 + a_2^3)}, \\ N_3 &= \frac{mg(2b_1^4 a_2 + b_2(a_1 - a_2)b_1^3 + b_1(a_1 + a_2)(b_2^3 + 2a_2^3 - a_1 a_2^2 + a_1^2 a_2) + b_2 a_1^3 a_2 - b_2 a_1 a_2^3)}{2(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(b_1^3 + b_2^3 + a_1^3 + a_2^3)}, \\ N_4 &= \frac{mg(2b_1^4 a_1 + b_2(a_1 - a_2)b_1^3 + b_1(a_1 + a_2)(b_2^3 + 2a_1^3 - a_1^2 a_2 + a_1 a_2^2) - b_2 a_1^3 a_2 + b_2 a_1 a_2^3)}{2(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(b_1^3 + b_2^3 + a_1^3 + a_2^3)}. \end{aligned}$$

2. Отрыв колеса от поверхности и возникновение проскальзывания

Определим условия (положение центра масс мобильного робота), при которых возможно возникновение отрыва колеса от поверхности перемещения, либо возникновение проскальзывания. Рассмотрим конкретный пример симметричной конструкции мобильного робота (см. рис. 1, а) со следующими массогеометрическими характеристиками:

$$a = a_1 + a_2 = 1 \text{ м}; \quad b = b_1 + b_2 = 1 \text{ м}; \quad m = 40 \text{ кг}.$$

Для определения влияния положения центра масс в полученной системе уравнений (1)–(4) выполним замену параметров, характеризующих положение центра масс, следующим образом:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a}{2} - x_c, \quad a_2 = \frac{a}{2} + x_c, \\ b_1 &= \frac{b}{2} + y_c, \quad b_2 = \frac{b}{2} - y_c, \end{aligned} \quad (12)$$

где x_c и y_c — координаты центра масс ОМР.

Рассмотренная замена позволяет снизить число аргументов, характеризующих положение центра масс, с четырех до двух.

2.1. Возникновение отрыва колеса от поверхности

Рассмотрим задачу определения положения центра масс мобильного робота, при котором происходит отрыв колеса от поверхности перемещения. В общем случае отрыв k -го колеса от поверхности осуществляется при выполнении следующего условия:

$$N_k \leq 0, \quad k = 1, \dots, 4.$$

Расположение центра масс мобильного робота будем изменять относительно геометрического центра в следующем диапазоне:

$$\begin{aligned} -\frac{a}{2} &\leq x_c \leq \frac{a}{2}, \\ -\frac{b}{2} &\leq y_c \leq \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

На рис. 6, а (см. вторую полосу обложки) приведен график поверхности, определяющей зависимость нормальной реакции для первого колеса N_1 от положения центра

масс, а также график плоскости, представляющей нулевое значение нормальной реакции $N_0 = 0$, при котором происходит отрыв колеса от поверхности. Для остальных колес графики зависимостей нормальных реакций являются аналогичными.

Рассматривая зависимости нормальных реакций одновременно для всех колес, получим область допустимых положений центра масс для рассматриваемой конструкции мобильного робота (рис. 6, б, см. вторую полосу обложки), при которых не происходит отрыв ни одного из колес от поверхности перемещения. На рисунке выделены участки (области), в пределах которых положение центра масс будет вызывать отрыв соответствующего колеса. Одновременный отрыв сразу нескольких ко-

лес возможен при расположении центра масс в точках, расположенных вдоль осей, соединяющих пары колес и удаленных на равное расстояние от них.

Результаты моделирования с учетом условий отрыва колеса показывают, что предложенная математическая модель, описывающая зависимость опорных реакций поверхности перемещения для конструкции мобильного робота с четырьмя колесами является нелинейной в отличие от моделей, предложенных ранее в других работах [11, 15]. В рамках данной модели могут быть выделены участки платформы (рамы) мобильного робота, в пределах которых расположение центра масс, обусловленное положением грузов, недопустимо даже на неподвижном роботе с четырьмя колесами.

2.2. Возникновение проскальзывания колеса

Рассмотрим задачу определения положения центра масс мобильного робота, при котором возникает проскальзывания колес мобильного робота. В общем случае условие возникновения проскальзывания k -го колеса может быть представлено в следующем виде:

$$\mathbf{F}_k > \mathbf{F}_k^*, \quad k = 1, \dots, 4, \quad (13)$$

где \mathbf{F}_k — реакции силы трения, действующая на k -е колесо; \mathbf{F}_k^* — сила трения скольжения для k -го колеса.

Согласно условию (13), если сила реакции, действующая на колесо со стороны горизонтальной плоскости, больше по модулю силы трения скольжения, то возникает проскальзывание k -го колеса. Для мобильных роботов с роликонесущими колесами проскальзывание возникает вдоль оси вращения ролика k -го колеса.

В качестве первого приближения рассмотрим модель сухого трения Амонтона—Кулона:

$$\mathbf{F}_k^* = \mu N_k \frac{\mathbf{v}_k}{|\mathbf{v}_k|}, \quad (14)$$

где μ — коэффициент трения скольжения; N_k — модуль силы нормального давления (опорной реакции) для k -го колеса; \mathbf{v}_k — линейная скорость движения k -го колеса.

Расположение центра масс мобильного робота будем изменять относительно геометрического центра в следующем диапазоне:

$$-\frac{a}{2} \leq x_c \leq \frac{a}{2}, \quad -\frac{b}{2} \leq y_c \leq \frac{b}{2}.$$

Проведем моделирование для прямолинейного движения мобильного робота, при котором для рассматриваемой симметричной конструкции касательные реакции на всех колесах будут одинаковыми. Реакции силы трения \mathbf{F}_k , действующие вдоль осей вращения роликов колес, могут быть определены аналогичным образом, описанным в работе [4]. Произвол в выборе реакции силы трения, действующей вдоль оси вращения ролика четвертого колеса, может быть устранен с помощью введения дополнительного уравнения, обеспечивающего оптимизацию управления (например, для минимизации энергозатрат на движение). Согласно результатам, полученным в указанной работе, значение реакции силы трения, действующей вдоль оси вращения ролика k -го колеса, в случае прямолинейного движения прямо пропорционально требуемому линейному ускорению мобильного робота.

Рассмотрим несколько случаев для различных ускорений и соответствующих им реакций сил трения. Зависимость реакции силы трения скольжения \mathbf{F}_k^* для k -го колеса получим на основе решения системы уравнений (1)—(4) с учетом замены (12) и зависимости (14) для пары трения резина—бетон ($\mu = 0,6$).

На рис. 7, а (см. вторую полосу обложки) приведен график поверхности, определяющей зависимость модуля силы трения скольжения F_1^* для первого колеса от положения центра масс, а также график плоскости, соответствующий реакции силы трения для первого колеса, модуль которой равен $F_1 = 10$ Н.

Рассматривая зависимости модуля силы трения для всех колес одновременно, получим область допустимых положений центра масс мобильного робота, при которых проскальзывание всех колес отсутствует. На рис. 7, б (см. вторую полосу обложки) представлены области допустимых положений центра масс мобильного робота для различных значений реакций силы трения ($F_k = 10$ Н, $F_k = 20$ Н, $F_k = 30$ Н и $F_k = 40$ Н).

Результаты моделирования с учетом условий возникновения проскальзывания показывают, что с увеличением ускорения мобильного робота область допустимых положений центра масс уменьшается, а ее предел стремится к точке, расположенной в геометрическом центре платформы.

Заключение

В работе рассмотрена задача определения опорных реакций поверхности перемещения для мобильного робота с четырьмя колесами. Зависимости опорных реакций для конструкции робота с четырьмя колесами описаны с использованием метода сил, позволяющего раскрыть статическую неопределимость системы. Предложенная математическая модель, описывающая зависимость опорных реакций от расположения центра масс мобильного робота, является нелинейной.

На основе полученных уравнений проведен анализ возникающих сил реакций, действующих на колеса со стороны опорной поверхности, который позволил сформулировать выводы о влиянии положения центра масс мобильного робота на возникновение отрыва колеса от поверхности перемещения, а также на возникновение проскальзывания колес.

На неподвижном роботе, либо на движущемся с постоянной скоростью недопустимо расположение центра масс вдоль осей и их окрестностей, соединяющих центры соседних колес. При нестационарном режиме движения мобильного робота допустимое расположение центра масс зависит от требуемого ускорения. С увеличением ускорения область допустимых положений центра масс уменьшается, а ее предел стремится к точке, расположенной в геометрическом центре рамы робота.

Предложенная модель, описывающая зависимость опорных реакций поверхности перемещения, может быть использована при проведении дальнейших исследований, направленных на анализ динамики мобильных роботов, перемещение которых осуществляется помощью различных типов колес.

Список литературы

1. Мартыненко Ю. Г., Формальский А. М. О движении мобильного робота с роликонесущими колесами // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2007. № 6. С. 142–149.
2. Мартыненко Ю. Г. Устойчивость стационарных движений мобильного робота с роликонесущими колесами и смещенным центром масс // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74, № 4. С. 610–619.
3. Колесниченко Е. Ю., Павловский В. Е., Орлов И. А., Алисейчик А. П., Грибков Д. А., Подопросветов А. В. Математическая модель робота на омни-колесах, расположенных

в вершинах прямоугольного треугольника // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. Т. 19, № 5. С. 327–330.

4. Mamaev I. S., Kilin A. A., Karavaev Yu. L., Shestakov V. A. Criteria of Motion Without Slipping for an Omnidirectional Mobile // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2021. Vol. 17, N. 4. P. 527–546.
5. Малышенко А. М. Вход-выходные силомоментные отображения у шасси робокаров с тремя колесами Илона // Мехатроника, автоматизация, управление. 2022. Т. 23. № 9. С. 486–495.
6. Labakhua L., Martins I., Merkurjev I. Control of a mobile robot with Swedish wheels // Proc. of the 2017 IE International Conference on Power, Control, Signals and Instrumentation Engineering (ICPCSI), Chennai, India, 21–22 September 2017. P. 267–272.
7. Stonier D., Cho Si., Choi S., Kuppuswamy N., Kim J. Nonlinear Slip Dynamics for an Omniwheel Mobile Robot Platform // Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, Roma, Italy, 10-14 April 2007. P. 2367–2372.
8. Williams R., Carter B., Gallina P., Rosati G. Dynamic Model with Slip for Wheeled Omnidirectional Robots // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 2002. Vol. 18. P. 285–293.
9. Balakrishna R., Ghosal A. Modeling of Slip for Wheeled Mobile Robots // IEEE Transactions on robotics and automation. 1995. Vol.11. P. 126–131.
10. Vlahova A. V., Novoderova A. P. The skidding modelling of an apparatus with turned front wheels // Mechanics of solids. 2019. Vol. 54, N. 1. P. 19–38.
11. Adamov B. I., Saypulaev G. R. Research on the Dynamics of an Omnidirectional Platform Taking into Account Real Design of Mecanum Wheels (as Exemplified by KUKA youBot) // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2020. Vol. 16, N. 2. P. 291–307.
12. Blundell M. The Multibody Systems Approach to Vehicle Dynamics. Oxford: Harty Butterworth-Heinemann, 2015.
13. Milliken W. F., Milliken D. L. Race Car Vehicle Dynamics. Great Britain: Society of Automotive Engineers Inc., 1996.
14. Dugoff H., Fancher P., Segel L. An analysis of tire traction properties and their influence on vehicle dynamic performance // SAE Transactions. 1970. Vol. 79. P. 1219–1243.
15. Chang C., Lee T. Stability analysis of three- and four-wheel vehicles // JSME international journal. 1990. Vol. 33, N. 4. P. 567–574.
16. Pennestri E., Rossi V., Salvini P., Valentini P. Review and comparison of dry friction force models // Nonlinear Dynamics. 2016. Vol. 83. P. 1785–1801.
17. Широков Б. Н., Альгин В. Б., Иванов В. Г. Модели взаимодействия колеса с опорной поверхностью в продольной плоскости // Теоретическая и прикладная механика: международный научно-технический сборник. 2007. № 22. С. 38–47.
18. Adamov B. I., Saypulaev G. R. A study of the dynamics of an omnidirectional platform, taking into account the design of mecanum wheels and multicomponent contact friction // Proc. of the 2020 International Conference Nonlinearity, Information and Robotics (NIR), Innopolis, Russia, 03-06 December 2020. P. 1–6.
19. Olson B., Shaw S., Stepan G. Nonlinear dynamics of vehicle traction // Vehicle System Dynamics. 2003. Vol. 40, N. 6. P. 377–399.
20. Pacejka H. B. Tire and Vehicle Dynamics. UK: Elsevier, 2006.

Motion of a Four-Wheeled Omnidirectional Mobile Robot without Slipping and Detachment from the Surface

A. A. Kilin¹, kilin@rcd.ru,

Udmurt State University, Izhevsk, 426034, Russian Federation,

Yu. L. Karavaev, karavaev_yury@istu.ru, V. A. Shestakov, v.a.shestakov95@gmail.com,
Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, 426069, Russian Federation

Corresponding author: Shestakov V. A., PhD student, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, 426069, Russian Federation, e-mail: v.a.shestakov95@gmail.com

Accepted on February 25, 2023

Abstract

The article is devoted to the motion analysis of a highly maneuverable mobile robot with four omnivheels, taking into account the conditions for the appearance of wheel detachment from the surface, and the occurrence of wheel slipping. Within the motion analysis the task of determination support reactions for a mobile robot is considered. To solve this task, the design of a mobile robot is presented in the form of the frame with rods. To disclose the static indeterminacy of the considered system the forces method is used. Dependences of support reactions from the position of the center mass are obtained. The feature of the considered system is that the obtained dependences of the support reactions are nonlinear. Based on the obtained dependences of the support reactions, the influence of the position of the center of mass of a mobile robot with four wheels on the occurrence of detachment and slipping of wheels of a mobile robot was considered. Investigation was carried out within the framework of the dry friction model, according to which module of the friction force proportionally depends on the support reaction acting on the wheel from the side of the motion surface. Simulation was carried out, as a result of which the conditions for the position of the center of mass of a mobile robot were determined, in which wheels of a mobile robot do not detach from the motion surface, and there is no wheel slipping.

Keywords: highly maneuverable mobile robot, friction force, normal reaction forces, static indeterminacy, force method, slipping, simulation, center of mass

Acknowledgements: The work of Yu. L. Karavaev and V. A. Shestakov was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Education and Science of Russia FZZN-2020-0011, the work of A. A. Kilin was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Education and Science of Russia FEWS-2020-0009.

For citation:

Kilin A. A., Karavaev Yu. L., Shestakov V. A. Motion of a Four-Wheeled Omnidirectional Mobile Robot without Slipping and Detachment from the Surface, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2023, vol. 24, no. 8, pp. 403–411.

DOI: 10.17587/mau.24.403-411

References

1. Martynenko Yu. G., Formalsky A. M. On the movement of a mobile robot with omnivheels, *Izv. RAS. Theory and Control Systems*, 2007, no. 6, pp. 142–149 (in Russian).
2. Martynenko Yu. G. Stability of stationary movements of a mobile robot with roller-bearing wheels and a displaced center of mass, *PMM*, 2010, vol. 74, no. 4, pp. 610–619 (in Russian).
3. Kolesnichenko E. Y., Pavlovsky V. E., Orlov I. A., Alisey-chik A. P., Gribkov D. A., Podoprosvetov A. V. Mathematical Model of a Robot with Omni-Wheels Located at the Vertices of the Right Triangle, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 5, pp. 327–330 (in Russian).
4. Malysheiko A. M. Input-Output Force-Torque Mappings for the Chassis of Robocars with Three Ikon's Wheels, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 9, pp. 486–495 (in Russian).
5. Mamaev I. S., Kilin A. A., Karavaev Y. L., Shestakov V. A. Criteria of Motion Without Slipping for an Omnidirectional Mobile Robot, *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2021, vol. 17, no. 4, pp. 527–546.
6. Labakhua L., Martins I., Merkurjev I. Control of a mobile robot with Swedish wheels, *Proc. of the 2017 IEEE International Conference on Power, Control, Signals and Instrumentation Engineering (ICPCSI), Chennai, India, 21–22 September 2017*, pp. 267–272.
7. Stonier D., Cho Sl., Choi S., Kuppuswamy N., Kim J. Nonlinear slip dynamics for an omnivheel mobile robot platform, *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Roma, Italy, 10–14 April 2007, pp. 2367–2372.
8. Williams R., Carter B., Gallina P., Rosati G. Dynamic Model with Slip for Wheeled Omni-Directional Robots, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2002, vol. 18, pp. 285–293.
9. Balakrishna R., Ghosal A. Modeling of Slip for Wheeled Mobile Robots, *IEEE Transactions on robotics and automation*, 1995, vol. 11, pp. 126–131.
10. Vlahova A.V., Novoderova A. P. The skidding modelling of an apparatus with turned front wheels, *Mechanics of Solids*, 2019, vol. 54, no. 1, pp. 19–38.
11. Adamov B. I., Saypulaev G. R. Research on the Dynamics of an Omnidirectional Platform Taking into Account Real Design of Mecanum Wheels (as Exemplified by KUKA youBot), *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2020, vol. 16, no. 2, pp. 291–307.
12. Blundell M., Harty D. The Multibody Systems Approach to Vehicle Dynamics (Second Edition), Butterworth-Heinemann, 2015.
13. Milliken W. F., Milliken D. L. Race Car Vehicle Dynamics, Great Britain, Society of Automotive Engineers Inc., 1996.
14. Dugoff H., Segel L., Fancher P. An analysis of tire traction properties and their influence on vehicle dynamic performance, *SAE Transactions*, 1970, vol. 79, pp. 1219–1243.
15. Chang C., Lee T. Stability analysis of three- and four-wheel vehicles, *JSME international journal*, 1990, vol. 33, no. 4, pp. 567–574.
16. Pennestri E., Rossi V., Salvini P., Valentini P. Review and comparison of dry friction force models, *Nonlinear Dynamics*, 2016, vol. 83, pp. 1785–1801.
17. Shirobokov B. N., Algin V. B., Ivanov V. G. Models of interaction of a wheel with a support surface in a longitudinal plane, *Theoretical and applied Mechanics: international scientific and Technical collection*, 2007, vol. 22, pp. 38–47 (in Russian).
18. Adamov B. I., Saypulaev G. R. A study of the dynamics of an omnidirectional platform, taking into account the design of Mecanum wheels and multicomponent contact friction, *Proc. of the 2020 International Conference Nonlinearity, Information and Robotics (NIR), Innopolis, Russia, 03–06 December 2020*, pp. 1–6.
19. Olson B., Shaw S., Stepan G. Nonlinear dynamics of vehicle traction, *Vehicle System Dynamics*, 2003, vol. 40, no. 6, pp. 377–399.
20. Pacejka H. B. Tire and Vehicle Dynamics, UK, Elsevier, 2006.