

С. А. Плотников, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., waterwalf@gmail.com
Институт проблем машиноведения Российской академии наук, г. Санкт-Петербург

Десинхронизация и колебательность в возбудимых сетях ФитцХью—Нагумо*

Изучение динамики сложных сетевых систем является одной из актуальных задач. Сетевые системы могут пребывать в различных состояниях, начиная от полной синхронизации, когда все системы в сети ведут себя согласованно, заканчивая полной десинхронизацией, т. е. полной рассогласованностью в функционировании систем. Явление синхронизации уже изучено достаточно хорошо: введены математические определения синхронизации, предложены алгоритмы исследования синхронизации, получены условия синхронизации для различных типов сетевых систем. Однако не так много работ на текущий момент посвящено исследованию десинхронизации. В данной работе вводится определение десинхронизации по выходу для сетей из нелинейных систем. Рассматриваются определения колебательности по Якубовичу, и устанавливается связь между колебательностью и десинхронизацией в сетях из возбудимых нелинейных систем. Возбудимые системы являются устойчивыми, поэтому колебания в них отсутствуют. Добавление связей между такими системами может привести к возникновению колебаний. Выводятся условия колебательности для диффузионно-связанных сетей из простейших моделей нейронов ФитцХью—Нагумо. Сначала рассматривается случай простейшей сети из двух связанных систем ФитцХью—Нагумо, а затем результат обобщается на случай из нескольких систем. Спектр матрицы Лапласа играет ключевую роль в динамике таких сетей. Получено условие, связывающее параметры единичной системы, входящей в сеть, и собственные числа матрицы Лапласа, которое устанавливает, будет ли сеть колебательной или нет. Число систем, которые будут генерировать колебания в такой сети, зависит от числа собственных чисел матрицы Лапласа, удовлетворяющих полученным условиям. Полученные аналитические результаты подтверждаются проведенным численным моделированием. Приводятся результаты моделирования полной десинхронизации в сети, когда все системы начинают колебаться, а также химероподобного состояния, при котором колеблется лишь часть систем, а остальные находятся в покое.

Ключевые слова: десинхронизация, колебательность, нейронные сети, система ФитцХью—Нагумо, матрица Лапласа

Введение

Изучение динамики сетей из нелинейных систем является важной задачей и имеет приложения в различных областях науки, таких как физика, инженерные науки, биология, социология и пр. [1, 2]. Системы в таких сетях могут формировать различные состояния сети: полную синхронизацию, при которой все системы в сети функционируют согласованно [3]; кластерную синхронизацию, при которой системы функционируют согласованно в небольших группах (кластерах), а сами группы не согласованы между собой [4]; состояние химеры, при котором одна часть систем синхронизирована, а другая — нет [5, 6]; десинхронизацию, при которой нет согласованности в функционировании систем.

В области нейронаук различные режимы функционирования нейронных сетей тесно связаны с нормальным функционированием мозга, а их нарушение приводит к возникновению различных патологий, таких как эссенциальный тремор [7], эпилепсия [8] и болезнь

Паркинсона [9]. В нормальном состоянии нейроны функционируют в несинхронизированном режиме. Поэтому важной задачей является поиск условий пребывания сетей в различных состояниях [10–12], а также синтез алгоритмов управления для перевода сети в желаемое состояние [13, 14].

В данной работе изучается явление десинхронизации в нейронных сетях. Для его изучения требуется ввести подходящее определение, которое будет удобно использовать для получения аналитических условий десинхронизации. Некоторые попытки ввести определение десинхронизации были сделаны в работах [15–17]. В настоящей работе будет введено другое определение десинхронизации и показана его связь с колебательностью. Понятие колебательности и удобные подходы к ее изучению были введены В. А. Якубовичем в 1973 г. [18]. Данный аппарат был применен к задаче Смейла — исследованию возможности возникновения колебаний при соединении пары возбудимых (асимптотически устойчивых) систем (клеток) [19, 20]. В настоящей работе этот аппарат будет применен для исследования колебаний и десинхронизации в сетях из возбудимых систем ФитцХью—Нагумо [21, 22].

*Работа выполнена в ИПМаш РАН при поддержке Российского Научного Фонда (проект № 21-72-00107).

Предварительные сведения

Колебательность по Якубовичу. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в форме Лурье

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\xi(t); \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t); \quad \xi(t) = \varphi(\mathbf{y}(t)),\end{aligned}\quad (1)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$ — выход; $\xi: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$ — гладкая вектор-функция; \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} — постоянные вещественные матрицы размеров $n \times n$, $n \times m$, $l \times n$ соответственно. Отметим, что произвольная система $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ может быть записана в виде (1).

Определение 1. Для $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ скалярная функция $\psi(t)$ называется (α, β) -колебательной при $t \rightarrow +\infty$, если она ограничена, и выполнены следующие неравенства:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) \geq \beta, \quad \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) \leq \alpha.$$

Скалярная функция $\psi(t)$ называется колебательной по Якубовичу при $t \rightarrow +\infty$, если существуют некоторые константы α, β такие, что $\psi(t)$ является (α, β) -колебательной при $t \rightarrow +\infty$.

Определение 2. Система (1) называется колебательной по Якубовичу по выходу \mathbf{y} , если для почти всех $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ее решения $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ ограничены, и хотя бы для одного \mathbf{y}_i , $i = 1, \dots, l$, выполнены неравенства

$$\underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{y}_i(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) < \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{y}_i(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)).$$

Следующая теорема является одним из простейших критериев колебательности, но она не дает оценки для размаха колебаний α, β .

Теорема 1. Пусть все решения системы (1) ограничены. Кроме того, пусть хотя бы одно из собственных чисел каждой из матриц линеаризованных систем $\mathbf{Q}_i = \mathbf{A} + \mathbf{B}\varphi'(\mathbf{C}\mathbf{x}_i^*)\mathbf{C}$, где \mathbf{x}_i^* — положения равновесия системы (1), а $\varphi'(\mathbf{y})$ — матрица Якоби вектор-функции $\varphi(\mathbf{y})$, находится в правой комплексной полуплоскости, и ни одно из них не находится на мнимой оси. Тогда система (1) является колебательной по Якубовичу по выходу \mathbf{y} . Если все собственные числа матриц \mathbf{Q}_i находятся в правой полуплоскости, то множество начальных данных, для которых решения не являются колебаниями по выходу \mathbf{y} , имеет вид $\Omega = \{\mathbf{x}: \mathbf{x} = \mathbf{x}_i^*\}$.

Данные определения и теорема первоначально были сформулированы В. А. Якубовичем в работах [18, 19] и использовались для

диссипативных систем. Позже в работе [23] авторы заменили условие диссипативности на условие ограниченности.

Система ФитцХью—Нагумо. Одной из самых значимых работ в области вычислительной нейробиологии является работа Ходжкина и Хаксли [24] о нервной проводимости в гигантском аксоне кальмара. Однако система, синтезированная в этой работе, описывается четырехмерными нелинейными дифференциальными уравнениями и поэтому является достаточно сложной для исследования, особенно в контексте исследования динамики сетей из таких систем. Существуют также упрощенные модели, описывающие динамику единичного нейрона. Одной из таких моделей является система ФитцХью—Нагумо (ФХН) [21, 22], описываемая дифференциальными уравнениями второго порядка с кубической нелинейностью:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x}(t) = x(t) - \frac{x^3(t)}{3} - y(t); \\ \dot{y}(t) = x(t) + a, \end{cases}\quad (2)$$

где $x, y \in \mathbb{R}$ являются переменными состояния и описывают трансмембранный потенциал и медленный ток восстановления, соответственно. Параметр $\varepsilon \in \mathbb{R}$, где $0 < \varepsilon \leq 1$, используется для разделения динамики на медленную и быструю; $a \in \mathbb{R}$ является бифуркационным параметром: при $|a| < 1$ система (2) является колебательной, тогда как при $|a| > 1$ она является возбудимой, т. е. глобально асимптотически устойчивой.

Определение десинхронизации

Под синхронизацией понимается согласованное во времени функционирование двух или нескольких процессов [1–3]. В зависимости от того, какие характеристики рассматриваемых процессов или объектов сравниваются, можно выделить различные типы синхронизации. Это может быть частотная синхронизация, используемая для процессов, для которых определено понятие частоты [25]; фазовая синхронизация, обобщенное понятие которой может использоваться для описания синхронизации хаотических процессов [26]; координатная синхронизация, понимаемая как совпадение координат векторов состояний систем [27] и др. Если рассматриваются идентичные процессы или объекты без возмущений, то синхронизация может

быть асимптотической [3] — случай, когда разность между рассматриваемыми характеристиками процессов стремится к нулю. В противном случае необходимо рассматривать понятие приближенной синхронизации (ε -синхронизации) [3, 28, 29], где ε определяет уровень точности синхронизации.

Если под десинхронизацией понимать отсутствие синхронизации, то можно упустить из рассмотрения несколько интересных режимов, таких как кластерная синхронизация и состояние химеры. Поэтому необходимо ввести корректное определение десинхронизации, которое не будет охватывать "промежуточные" случаи. Определение фазовой десинхронизации было дано в работах [15, 30]. В данной работе рассмотрим случай десинхронизации по выходу.

Определение десинхронизации по выходу было дано в работе [17] и основано на определении колебательности по Якубовичу. Если под синхронизацией по выходу понимается сходимость к нулю ошибок синхронизации (разности координат выходов различных систем), то под десинхронизацией по выходу предлагается понимать колебательность по Якубовичу системы из ошибок синхронизации. Однако это определение не определяет границы колебаний, поэтому, например, ε -синхронизация тоже может считаться десинхронизацией в смысле этого определения. Введем новое определение десинхронизации по выходу, учитывающее обозначенную проблему.

Рассмотрим сеть из N связанных систем размерности n :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}); \mathbf{y}_i = \mathbf{C}\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, N, \quad (3)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{Nn}$ — вектор состояния всей сети; $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^l$ — выход i -й системы; \mathbf{C} — постоянная матрица размера $n \times l$; $\mathbf{F}: \mathbb{R}^{Nn} \rightarrow \mathbb{R}^{Nn}$ — локально липшицева функция.

Для сети (3) введем среднюю взвешенную динамику

$$\mathbf{x}_s = \sum_{i=1}^N v_i \mathbf{x}_i; \mathbf{y}_s = \sum_{i=1}^N v_i \mathbf{y}_i; \sum_{i=1}^N v_i = 1.$$

Определение 3. Пару систем (i, j) в сети (3) будем называть десинхронизированной по выходу \mathbf{y} , если $|\mathbf{y}_{ik}(t) - \mathbf{y}_{jk}(t)| \geq \varepsilon, k = 1, \dots, l, \forall t \geq 0$, где $\varepsilon > 0$ — уровень десинхронизации.

Сеть из систем (3) будем называть полностью десинхронизированной по выходу \mathbf{y} , если

$|\mathbf{y}_{ik}(t) - \mathbf{y}_{sk}(t)| \geq \varepsilon, k = 1, \dots, l, i = 1, \dots, N, \forall t \geq 0$, где $\varepsilon > 0$ — уровень десинхронизации.

Определение 3 позволяет исключить случаи асимптотической синхронизации и ε -синхронизации, но оно тоже не лишено недостатков. Например, в случае противофазной синхронизации средняя динамика $\mathbf{y}_s(t) = 0, \forall t \geq 0$, поэтому этот случай удовлетворяет определению 3. Однако такое определение позволяет использовать подход координатного преобразования к системе из средней динамики и ошибок синхронизации [10, 11] и дальнейшего использования теорем, предложенных В. А. Якубовичем [18, 19] для анализа системы из ошибок синхронизации

Теперь, если для сети (3) ввести систему из ошибок синхронизации и показать, что она является колебательной по Якубовичу по выходу \mathbf{y} , причем для всех компонент выхода, то уровень десинхронизации ε можно будет определять как

$$\varepsilon = \max_{\substack{i=1, \dots, N \\ k=1, \dots, l}} \beta_{ik},$$

где каждая компонента выхода $\mathbf{y}_{ik}(t) - \mathbf{y}_{sk}(t)$ является $(\alpha_{ik}, \beta_{ik})$ -колебательной.

Отметим, что ε должен быть достаточно велик, например, в случае колебательной сети он должен быть соизмерим с амплитудой колебаний несвязанной системы.

Десинхронизация в двух связанных системах ФитцХью—Нагумо

В качестве примера рассмотрим две идентичные диффузионно-связанные системы ФХН

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x}_1(t) = x_1(t) - \frac{x_1^3(t)}{3} - y_1(t) + c(x_1(t) - x_2(t)); \\ \dot{y}_1(t) = x_1(t) + a; \\ \varepsilon \dot{x}_2(t) = x_2(t) - \frac{x_2^3(t)}{3} - y_2(t) + c(x_2(t) - x_1(t)); \\ \dot{y}_2(t) = x_2(t) + a, \end{cases} \quad (4)$$

где c — сила связи между двумя узлами. Введем переменные средней динамики и ошибок синхронизации

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2), & y_s &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \\ \delta_x &= \frac{1}{2}(x_1 - x_2), & \delta_y &= \frac{1}{2}(y_1 - y_2), \end{aligned}$$

тогда уравнения (4) можно представить в новых координатах в виде

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x}_s(t) = x_s(t) - \frac{x_s^3(t)}{3} - \delta_x^2(t)x_s(t) - y_s(t); \\ \dot{y}_s(t) = x_s(t) + a; \\ \varepsilon \dot{\delta}_x(t) = (1 + 2c)\delta_x(t) - \frac{\delta_x^3(t)}{3} - \\ - \delta_x(t)x_s^2(t) - \delta_y(t); \\ \dot{\delta}_y(t) = \delta_x(t). \end{cases} \quad (5)$$

Заметим, что напрямую применить Теорему 1 к подсистеме из ошибок синхронизации не получится, так как данная подсистема не является замкнутой. Поэтому применим ее ко всей системе (5). Для этого найдем ее положения равновесия и линеаризуем эту систему возле каждого из них. Полученная система (5) имеет единственное положение равновесия

$$x_s^* = -a, \quad y_s^* = -a + \frac{a^3}{3}, \quad \delta_x^* = 0, \quad \delta_y^* = 0,$$

значит, ее линеаризованная форма имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_s(t) = \frac{1}{\varepsilon}[(1 - a^2)x_s(t) - y_s(t)]; \\ \dot{y}_s(t) = x_s(t); \\ \dot{\delta}_x(t) = \frac{1}{\varepsilon}[(1 - a^2 + 2c)\delta_x(t) - \delta_y(t)]; \\ \dot{\delta}_y(t) = \delta_x(t), \end{cases}$$

а матрица линейной части имеет блочно-диагональную форму:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} (1 - a^2)/\varepsilon & -1/\varepsilon & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - a^2 + 2c)/\varepsilon & -1/\varepsilon \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и следующие собственные числа:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 - a^2 \pm \sqrt{(1 - a^2)^2 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon},$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{1 - a^2 + 2c \pm \sqrt{(1 - a^2 + 2c)^2 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon}.$$

Числа $\lambda_{1,2}$ соответствуют средней динамике и имеют отрицательные вещественные части при $|a| > 1$. Числа $\lambda_{3,4}$ соответствуют системе из ошибок синхронизации и имеют положительные вещественные части, если $2c > a^2 - 1$. Заметим, что собственные числа матриц не меняются при координатном преобразовании, поэтому они же являются собственными числами матрицы линейной части исходной системы (4). Ограниченность решений в диффузионно-связанной сети систем ФХН была доказана в работе [12]. Поэтому условия Теоремы 1 выполнены, значит, выполнено и ее заключение.

Теорема 2. Две связанные идентичные возбудимые ($|a| > 1$) системы ФХН (4) колебательны по Якубовичу по выходу $(x_1, x_2)^T$ для почти всех начальных данных, если $2c > a^2 - 1$

В данном случае колебательность системы (4) означает колебательность системы из ошибок синхронизации, а значит, система (4) полностью десинхронизирована по выходу $(x_1, x_2)^T$ с некоторым уровнем ε .

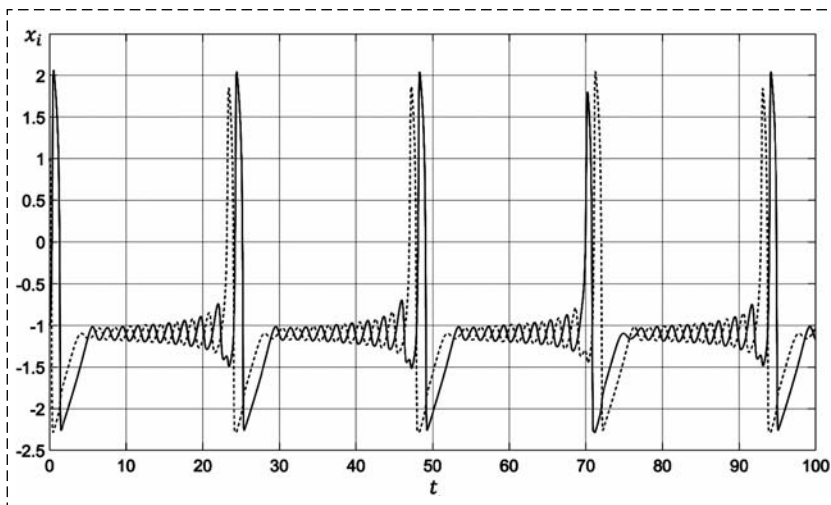


Рис. 1. Динамика трансмембранных потенциалов x_i двух систем ФХН (4). Случай десинхронизации

Fig. 1. Dynamics of transmembrane potentials x_i of two FHN systems (4). Desynchronization case

Отметим, что в случае колебательной системы ФХН ($|a| < 1$) средняя динамика сети будет тоже колебательной, поэтому исходная система (4) будет колебательной при любой силе связи.

Промоделируем динамику двух связанных систем ФХН (4) при параметрах $a = 1,1$, $\varepsilon = 0,1$, $c = 0,11$ и начальных данных $x_1 = -1$, $y_1 = -1$, $x_2 = 1$, $y_2 = 1$. В данном случае несвязанные системы ФХН являются возбудимыми, т. е. колебания отсутствуют. Условия Теоремы 2 выполнены, а значит, связанные системы ФХН колебательны по Якубовичу по выходу $(x_1, x_2)^T$. На рис. 1 представлена динамика трансмембранных по-

тенциалов x_1, x_2 двух систем ФХН: имеют место десинхронизированные колебания.

Десинхронизация в сети из систем ФитцХью—Нагумо

Теперь рассмотрим сеть из N диффузионно-связанных возбудимых систем ФХН:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x}_i(t) = x_i(t) - \frac{x_i^3(t)}{3} - \\ - y_i(t) + \sum_{j=1}^N c_{ij}(x_j(t) - x_i(t)); \\ \dot{y}_i(t) = x_i(t) + a, \quad i = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (6)$$

где $\mathbf{C} = (c_{ij})$, $i, j = 1, \dots, N$, — матрица смежности графа G , соответствующего рассматриваемой сети.

Данная сеть имеет единственное положение равновесия

$$x_i^* = -a, \quad y_i^* = -a + \frac{a^3}{3}, \quad i = 1, \dots, N,$$

поэтому ей соответствует следующая линеаризованная система:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \\ = \frac{1}{\varepsilon} \left[(1 - a^2)x_i(t) - y_i(t) + \sum_{j=1}^N c_{ij}(x_j(t) - x_i(t)) \right]; \\ \dot{y}_i(t) = x_i(t), \quad i = 1, \dots, N, \end{cases}$$

которую можно представить в векторной форме:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = ((\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A}) + (\mathbf{L} \otimes \mathbf{B}))\mathbf{x}(t),$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} (1 - a^2)/\varepsilon & -1/\varepsilon \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1/\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N}$ — вектор состояния всей сети; \mathbf{I}_N — единичная матрица размера $N \times N$; \mathbf{L} — матрица Лапласа графа G ; \otimes — произведение Кронекера двух матриц. Предположим, что граф G является неориентированным, тогда существует матрица $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ такая, что $\mathbf{L} = \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^T$, где \mathbf{A} — диагональная матрица, на диагонали которой стоят собственные числа матрицы Лапласа.

Сделаем преобразование координат $\mathbf{z} = \mathbf{U}^T \otimes \mathbf{I}_2 \mathbf{x}$, используя свойство произведения

Кронекера, тогда уравнения сети в новых координатах имеют вид

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{J}\mathbf{z}(t) = ((\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}))\mathbf{z}(t).$$

Матрица полученного линейного уравнения имеет блочно-диагональную форму, где первый блок соответствует средней динамике, а остальные — ошибкам синхронизации (см., например, [10, 11]). Каждый блок \mathbf{J}_i полученной матрицы \mathbf{J} имеет вид

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} (1 - a^2 + \lambda_i(G))/\varepsilon & -1/\varepsilon \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, N,$$

где $\lambda_i(G)$ — собственные числа матрицы Лапласа \mathbf{L} графа G . Найдем собственные числа блока \mathbf{J}_i :

$$\lambda_{i,1,2} = \frac{1 - a^2 + \lambda_i(G) \pm \sqrt{(1 - a^2 + \lambda_i(G))^2 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon}.$$

Матрица Лапласа \mathbf{L} имеет нулевое собственное число $\lambda_1(G) = 0$, которое является минимальным. При $|a| > 1$ собственные числа блока \mathbf{J}_1 имеют отрицательные вещественные части, а значит, подсистема, описывающая среднюю динамику, является возбудимой. Для того чтобы система (6) была колебательной по Якубовичу, достаточно, чтобы собственные числа хотя бы одного блока \mathbf{J}_i имели положительные вещественные части. Ограниченность решений в диффузионно-связанной сети систем ФХН была доказана в работе [12]. Поэтому условия Теоремы 1 выполнены, значит, выполнено и ее заключение.

Теорема 3. Сеть из связанных возбудимых ($|a| > 1$) систем ФХН (6) с неориентированным графом связей колебательна по Якубовичу по выходу $(x_1, \dots, x_N)^T$ для почти всех начальных данных, если $\lambda_{\max}(G) > a^2 - 1$.

Таким образом, в зависимости от того, сколько собственных чисел матрицы Лапласа удовлетворяют условию $\lambda_i(G) > a^2 - 1$, будет разное число колебательных компонент вектора из ошибок синхронизации, а значит, и число десинхронизированных пар в сети (6). В данном случае десинхронизированные пары систем сети будут колебательными, а оставшиеся синхронизированные системы будут возбудимыми (в них колебания будут отсутствовать), т. е. полученное состояние сети можно охарактеризо-

вать как некоторое химероподобное состояние. Если же все собственные числа всех блоков \mathbf{J}_i , кроме первого, будут иметь положительные вещественные части, т. е. будет выполнено неравенство $\lambda_2(G) > a^2 - 1$, то сеть (6) будет полностью десинхронизирована по выходу $(x_1, \dots, x_N)^T$ с некоторым уровнем ε . Второе минимальное собственное число матрицы Лапласа $\lambda_2(G)$ называется алгебраической связностью и является положительным, если граф связей является связным.

Отметим, что для сети из колебательных систем ФХН ($|a| < 1$) все блоки \mathbf{J}_i имеют собственные числа с положительными вещественными частями даже при отсутствии связей в сети.

Проведем моделирование динамики сети из $N = 100$ систем ФХН (6). Параметры системы выбраны следующим образом: $a = 1,1$, $\varepsilon = 1$. Матрица смежности \mathbf{C} является симметричной, с нулями на главной диагонали, где остальные элементы являются произвольными положительными числами, т. е. рассматривается случай полного взвешенного неориентированного графа связей G без петель. Начальные данные равномерно распределены на отрезке $[0; 1]$.

В первом случае матрица \mathbf{C} выбрана таким образом, что только два собственных числа соответствующей матрицы Лапласа \mathbf{L} удовлетворяют неравенству $\lambda_i(G) > a^2 - 1$. По Теореме 3 такая сеть из систем ФХН будет колебательной по Якубовичу по выходу $(x_1, \dots, x_N)^T$. Результаты моделирования динамики такой сети представлены на рис. 2 (см. вторую сторону обложки). Здесь ось абсцисс соответствует времени t , тогда как ось ординат соответствует номеру узла в сети $i = 1, \dots, N$. Значения функций $x_i(t)$ изображены цветом. Из рис. 2 видно, что только две системы в сети являются колебательными, остальные же являются возбудимыми, т. е. в них колебания отсутствуют.

Теперь рассмотрим случай, при котором все собственные числа матрицы Лапласа \mathbf{L} , кроме первого, удовлетворяют неравенству $\lambda_i(G) > a^2 - 1$, т. е. выполнено неравенство $\lambda_2(G) > a^2 - 1$. Результаты моделирования динамики такой сети представлены на рис. 3 (см. вторую сторону обложки). Видно, что в данном случае все системы в сети являются колебательными. Состояние такой сети удовлетворяет определению полностью десинхронизированной. Однако также можно утверждать, что некоторые узлы такой сети противофазно синхронизированы, тогда как другие — синфазно.

Заключение

В работе было предложено определение десинхронизации по выходу для сети из нелинейных систем. Показана взаимосвязь между понятиями колебательности по Якубовичу и десинхронизации в сетях из возбудимых систем. На примере двух связанных возбудимых систем ФитцХью—Нагумо было показано, как можно получать условия колебательности для возбудимых систем. Далее данный результат был обобщен на случай сети из связанных систем ФитцХью—Нагумо. Показано, что число колебательных систем в такой сети зависит от спектра матрицы Лапласа графа связей сети. Также было проведено моделирование динамики сетей из систем ФитцХью—Нагумо, результаты которого соотносятся с полученными аналитическими условиями.

Список литературы

1. **Блехман И. И.** Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981. 352 с.
2. **Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.** Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 411 p.
3. **Фрадков А. Л.** Кибнетическая физика: принципы и примеры. СПб.: Наука, 2003. 208 с.
4. **Ma C., Yang Q., Wu X., Lu J.** Cluster synchronization: from single-layer to multi-layer networks // *Chaos*. 2019. Vol. 29. P. 123120.
5. **Kuramoto Y., Battogtokh D.** Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators // *Nonlinear Phenom. Complex Syst.* 2002. Vol. 4. P. 380–385.
6. **Panaggio M. J., Abrams D. M.** Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators // *Nonlinearity*. 2015. Vol. 28, N. 3. P. R67.
7. **Schnitzler A., Munks C., Butz M., Timmermann L., Gross J.** Synchronized brain network associated with essential tremor as revealed by magnetoencephalography // *Mov. Disorders*. 2009. Vol. 24, N. 11. P. 1629–1635.
8. **Wong R. K., Traub R. D., Miles R.** Cellular basis of neuronal synchrony in epilepsy // *Adv. Neurol.* 1986. Vol. 44. P. 583–592.
9. **Hammond C., Bergman H., Brown P.** Pathological synchronization in Parkinson's disease: networks, models and treatments // *Trends Neurosci.* 2007. Vol. 30, N. 7. P. 357–364.
10. **Джунусов И. А., Фрадков А. Л.** Синхронизация в сетях линейных агентов с обратными связями по выходам // *Авт. 2011. № 8. С. 41–52.*
11. **Panteley E., Loria A.** Synchronization and dynamic consensus of heterogeneous networked systems // *IEEE Trans. Automat. Control*. 2017. Vol. 62, N. 8. P. 3758–3773.
12. **Steuer E., Tyukin I., Nijmeijer H.** Semipassivity and synchronization of diffusively coupled neuronal oscillators // *Phys. D*. 2009. Vol. 328, N. 21. P. 2119–2128.
13. **Plotnikov S. A., Fradkov A. L.** Desynchronization control of FitzHugh-Nagumo networks with random topology // *IFAC-PapersOnLine*. 2019. Vol. 52, N. 16. P. 640–645.
14. **Имангазиева А. В.** Синхронизация сети нелинейных объектов с запаздыванием по состоянию в условиях неопределенности // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2020. Т. 21. № 5. С. 266–273.

15. **Franci A., Chaillet A., Panteley E., Lamnabhi-Lagarrigue F.** Desynchronization and inhibition of Kuramoto oscillators by scalar mean-field feedback // *Math. Control Signals Syst.* 2012. Vol. 24. P. 169–217.
16. **Zhao Y., Feng Z.** Desynchronization in synchronous multi-coupled chaotic neurons by mix-adaptive feedback control // *J. Biol. Dyn.* 2013. Vol. 7, N. 1. P. 1–10.
17. **Plotnikov S. A., Fradkov A. L.** Desynchronization in oscillatory networks based on Yakubovich oscillatory // *IFAC PapersOnLine.* 2020. Vol. 53, N. 2. P. 1037–1042.
18. **Якубович В. А.** Частотные условия автоколебаний в нелинейных системах с одной стационарной нелинейностью // *Сиб. Мат. Журн.* 1973. Т. 14. № 5. С. 1100–1129.
19. **Томберг Э. А., Якубович В. А.** Условия автоколебаний в нелинейных системах // *Сиб. Мат. Журн.* 1989. Т. 30. № 4. С. 180–195.
20. **Томберг Э. А., Якубович В. А.** Об одной задаче Смейла // *Сиб. Мат. Журн.* 2000. Т. 41, № 4. С. 926–928.
21. **FitzHugh R.** Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // *Biophys. J.* 1961. Vol. 1, N. 6. P. 445–466.
22. **Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S.** An active pulse transmission line simulating nerve axon // *Proc. IRE.* 1962. Vol. 50, N. 10. P. 2061–2070.
23. **Ефимов Д. В., Фрадков А. Л.** Условия колебательности по Якубовичу для нелинейных систем // *Вестн. СПбГУ.* 2006. Т. 1, № 4. С. 28–40.
24. **Hodgkin A. L., Huxley A. F.** A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // *J. Physiol.* 1952. Vol. 117, N. 4. P. 500–544.
25. **Arenas A., Díaz-Guilera A., Kurths J., Moreno Y., Zhou C.** Synchronization in complex networks // *Phys. Rep.* 2008. Vol. 469, N. 3. P. 93–153.
26. **Rosenblum M. G., Pikovsky A. S., Kurths J.** Phase synchronization of chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76. P. 1804–1807.
27. **Афраймович В. С., Веричев Н. Н., Рабинович М. И.** Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1986. Т. 29. № 9. С. 1050–1060.
28. **He W., Du W., Qian F., Cao J.** Synchronization analysis of heterogeneous dynamical networks // *Neurocomputing.* 2013. Vol. 104. P. 146–154.
29. **Plotnikov S. A., Fradkov A. L.** On synchronization in heterogeneous FitzHugh–Nagumo networks // *Chaos, Solit. Fract.* 2019. Vol. 121. P. 85–91.
30. **Franci A., Panteley E., Chaillet A., Lamnabhi-Lagarrigue F.** Desynchronization of coupled phase oscillators, with application to the Kuramoto system under mean-field feedback // *In 50th IEEE Conf. on Decis. Cont. & Europ. Cont. Conf.* 2011. P. 6748–6753.

Desynchronization and Oscillatory in Excitable FitzHugh-Nagumo Networks

S. A. Plotnikov, waterwalf@gmail.com,

Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences,
St. Petersburg, 199178, Russian Federation

*Corresponding author: Plotnikov Sergei A., PhD, Senior Researcher,
Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences,
St. Petersburg, 199178, Russian Federation, e-mail: waterwalf@gmail.com*

Accepted on March 06, 2023

Abstract

Study of dynamics of complex networked systems is one of the relevant problems. Networked systems can be in various states, ranging from complete synchronization, when all systems in the network are coherent, to complete desynchronization, i.e. complete incoherence in the functioning of systems. Synchronization phenomenon has already been well studied, namely, the mathematical definitions of synchronization are introduced, algorithms of studying synchronization are proposed, and synchronization conditions of various types of networked systems are established. Whereas a few works are devoted to the study of desynchronization nowadays. This paper introduces output desynchronization notion for networks of nonlinear systems. The definitions about Yakubovich oscillatory are considered and the link between oscillatory and desynchronization in networks of excitable nonlinear systems is established. Excitable systems are stable; therefore, they do not generate oscillations. Adding couplings between such systems can lead to occurrence of oscillations. The conditions about oscillatory in diffusively coupled networks of FitzHugh–Nagumo systems, which are the simplest neuron models, are derived. Firstly, the case of the simplest network of two coupled systems is considered, and afterwards, obtained result is generalized for the case of several systems. Laplace matrix spectrum plays crucial role in dynamics of such networks. The condition that connects the parameters of the uncoupled system in the network and the eigenvalues of the Laplace matrix, is obtained which determines whether the network is oscillatory or not. The number of systems that generate oscillations in such a network depends on the number of eigenvalues of the Laplace matrix that satisfy the obtained conditions. Obtained analytical results are confirmed by simulation. The results of simulation of complete desynchronization in the network, when all systems begin to oscillate, as well as a chimera-like state, in which only a part of the systems oscillates, while the other part are rest, are presented.

Keywords: desynchronization, oscillatory, neural networks, FitzHugh–Nagumo system, Laplace matrix

Acknowledgements: This work was performed in IPME RAS and supported by Russian Science Foundation (project no. 21-72-00107).

For citation:

Plotnikov S. A. Desynchronization and Oscillatory in Excitable FitzHugh–Nagumo Networks, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravleniye*, 2023, vol. 24, no. 6, pp. 292–299.

DOI: 10.17587/mau.24.292-299

References

1. **Blekhman I. I.** Synchronization in science and technology, New York, ASME Press, 1988, 255 p.
2. **Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.** Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences, Cambridge, Cambridge University Press, 2001, 411 p.
3. **Fradkov A.** Cybernetical physics: from control of chaos to quantum control, Berlin, Springer-Verlag, 2007, 248 p.
4. **Ma C., Yang Q., Wu X., Lu J.** Cluster synchronization: from single-layer to multi-layer networks, *Chaos*, 2019, vol. 29, pp. 123120.
5. **Kuramoto Y., Battogtokh D.** Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators, *Nonlinear Phenom. Complex Syst.*, 2002, vol. 4, pp. 380–385.
6. **Panaggio M. J., Abrams D. M.** Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators, *Nonlinearity*, 2015, vol. 28, no. 3, pp. R67.
7. **Schnitzler A., Munks C., Butz M., Timmermann L., Gross J.** Synchronized brain network associated with essential tremor as revealed by magnetoencephalography, *Mov. Disorders*, 2009, vol. 24, no. 11, pp. 1629–1635.
8. **Wong R. K., Traub R. D., Miles R.** Cellular basis of neuronal synchrony in epilepsy, *Adv. Neurol.*, 1986, vol. 44, pp. 583–592.
9. **Hammond C., Bergman H., Brown P.** Pathological synchronization in Parkinson's disease: networks, models and treatments, *Trends Neurosci.*, 2007, vol. 30, no. 7, pp. 357–364.
10. **Dzhunusov I. A., Fradkov A. L.** Synchronization in networks of linear agents with output feedbacks, *Autom. Remote Control*, 2011, vol. 72, no. 8, pp. 1615–1626.
11. **Panteley E., Loria A.** Synchronization and dynamic consensus of heterogeneous networked systems, *IEEE Trans. Automat. Control*, 2017, vol. 62, no. 8, pp. 3758–3773.
12. **Steuer E., Tyukin I., Nijmeijer H.** Semipassivity and synchronization of diffusively coupled neuronal oscillators, *Phys. D*, 2009, vol. 328, no. 21, pp. 2119–2128.
13. **Plotnikov S. A., Fradkov A. L.** Desynchronization control of FitzHugh–Nagumo networks with random topology, *IFAC PapersOnLine*, 2019, vol. 52, no. 16, pp. 640–645.
14. **Imangazieva A. V.** Synchronization of a network of nonlinear plants with time delay as in condition under uncertainty, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 5, pp. 266–273 (in Russian).
15. **Franci A., Chaillet A., Panteley E., Lamnabhi-Lagarrigue F.** Desynchronization and inhibition of Kuramoto oscillators by scalar mean-field feedback, *Math. Control Signals Syst.*, 2012, vol. 24, pp. 169–217.
16. **Zhao Y., Feng Z.** Desynchronization in synchronous multi-coupled chaotic neurons by mix-adaptive feedback control, *J. Biol. Dyn.*, 2013, vol. 7, no. 1, pp. 1–10.
17. **Plotnikov S. A., Fradkov A. L.** Desynchronization in oscillatory networks based on Yakubovich oscillatory, *IFAC PapersOnLine*, 2020, vol. 53, no. 2, pp. 1037–1042.
18. **Yakubovich V. A.** Frequency-domain criteria for oscillation in nonlinear systems with one stationary nonlinear component, *Sib. Math. J.*, 1973, vol. 14, no. 5, pp. 768–788.
19. **Tomberg E. A., Yakubovich V. A.** Conditions for auto-oscillations in nonlinear systems, *Sib. Math. J.*, 1989, vol. 30, no. 4, pp. 641–653.
20. **Tomberg E. A., Yakubovich V. A.** On one problem of Smale, *Sib. Math. J.*, 2000, vol. 41, no. 4, pp. 771–773.
21. **FitzHugh R.** Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane, *Biophys. J.*, 1961, vol. 1, no. 6, pp. 445–466.
22. **Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S.** An active pulse transmission line simulating nerve axon, *Proc. IRE*, 1962, vol. 50, no. 10, pp. 2061–2070.
23. **Efimov D. V., Fradkov A. L.** Conditions of Yakubovich oscillatory for nonlinear systems, *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, 2006, vol. 39, no. 4, pp. 203–215.
24. **Hodgkin A. L., Huxley A. F.** A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve, *J. Physiol.*, 1952, vol. 117, no. 4, pp. 500–544.
25. **Arenas A., Díaz-Guilera A., Kurths J., Moreno Y., Zhou C.** Synchronization in complex networks, *Phys. Rep.*, 2008, vol. 469, no. 3, pp. 93–153.
26. **Rosenblum M. G., Pikovsky A. S., Kurths J.** Phase synchronization of chaotic oscillators, *Phys. Rev. Lett.*, 1996, vol. 76, pp. 1804–1807.
27. **Afraimovich V. S., Verichev N. N., Rabinovich M. I.** Stochastic synchronization of oscillations in dissipative systems, *Izvestiya vuzov. Radiofizika*, 1986, vol. 29, no. 9, pp. 1050–1060 (in Russian).
28. **He W., Du W., Qian F., Cao J.** Synchronization analysis of heterogeneous dynamical networks, *Neurocomputing*, 2013, vol. 104, pp. 146–154.
29. **Plotnikov S. A., Fradkov A. L.** On synchronization in heterogeneous FitzHugh–Nagumo networks, *Chaos, Solit. Fract.*, 2019, vol. 121, pp. 85–91.
30. **Franci A., Panteley E., Chaillet A., Lamnabhi-Lagarrigue F.** Desynchronization of coupled phase oscillators, with application to the Kuramoto system under mean-field feedback. In *50th IEEE Conf. on Decis. Cont. & Europ. Cont. Conf.*, 2011, pp. 6748–6753.