

А. Н. Жирабок<sup>1, 2</sup>, д-р техн. наук, проф., zhirabok@mail.ru,  
А. В. Зуев<sup>1, 2</sup>, канд. техн. наук, доц., alvzuev@yandex.ru,  
А. Е. Шумский<sup>1</sup>, д-р техн. наук, проф., a.e.shumsky@yandex.com,  
Е. Ю. Бобко<sup>1</sup>, ст. преподаватель, bobko.eyu@dvfu.ru,  
<sup>1</sup> Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток,  
<sup>2</sup> Институт проблем морских технологий ДВО РАН, г. Владивосток

## Построение интервальных наблюдателей для дискретных нелинейных динамических систем\*

*Рассматривается задача построения интервальных наблюдателей для нелинейных динамических систем, описываемых дискретными моделями, при действии на систему внешних неконтролируемых возмущений, а также при наличии шумов измерений и параметрических неопределенностей. Ставится задача синтеза наблюдателя размерности меньшей, чем размерность исходной системы, формирующего верхнюю и нижнюю границы множества допустимых значений заданной нелинейной функции вектора состояния исходной системы. Для решения используется математический аппарат так называемой алгебры функций, достоинством которого является то, что он позволяет анализировать динамические системы, описываемые моделями с негладкими нелинейностями. Для синтеза интервального наблюдателя вначале ищется модель исходной системы, нечувствительная или малочувствительная к внешним возмущениям, размерности меньшей, чем размерность исходной системы. Процедура основана на двух алгоритмах, первый из которых предназначен для построения модели, малочувствительной к внешним возмущениям, второй — для уменьшения размерности модели. Формулируются правила, позволяющие обеспечить устойчивость такой модели для заданного множества желаемых собственных чисел за счет введения в модель обратной связи. Строящийся интервальный наблюдатель состоит из двух подсистем, первая из которых генерирует нижнюю границу множества допустимых значений заданной функции вектора состояния системы, вторая — аналогичную верхнюю границу. Приводятся соотношения, описывающие каждую подсистему. Для синтеза такого наблюдателя в нелинейном случае вводятся понятия положительного и отрицательного влияния переменных, входящих в построенную модель, на компоненты вектора состояния модели. Эти понятия позволяют определить, каким образом верхние и нижние границы соответствующих переменных будут входить в строящийся интервальный наблюдатель. Получены условия, при которых наблюдатель может быть получен. Теоретические результаты иллюстрируются примером известной трехтанковой системы, для которой синтезирован соответствующий интервальный наблюдатель. Проведенное на основе пакета MATLAB моделирование исходной системы и наблюдателя подтвердило правильность принятых допущений и разработанной теории.*

**Ключевые слова:** динамические системы, негладкие нелинейности, параметрические неопределенности, дискретные модели, алгебра функций, границы, интервальные наблюдатели, устойчивость

### Введение

Настоящая статья является логическим продолжением работ [1, 2], в которых рассматривалась задача построения интервальных наблюдателей для систем, описываемых линейными моделями с непрерывным временем при наличии внешних возмущений и шумов измерений.

Задача синтеза интервальных наблюдателей активно исследуется последние годы, обстоятельные обзоры полученных за это время ре-

зультатов содержатся в статьях [3, 4], решения для различных классов систем, а также практические приложения можно найти в работах [5—15]. В этих работах, как правило, определяется оценка множества допустимых значений полного вектора состояния, в то время как теоретический и практический интерес может представлять интервальная оценка только для допустимых значений заданной функции этого вектора. Соответствующий интервальный наблюдатель может оказаться существенно проще наблюдателя для полного вектора состояния, а ширина интервала заметно меньше, что повышает точность оценивания.

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-29-00191).

В работе ставится и решается задача построения интервальных наблюдателей для стационарных дискретных систем, описываемых динамическими моделями с негладкими нелинейностями, работающими в условиях действия внешних возмущений, шумов измерений и параметрических неопределенностей, которые позволяют оценить множество допустимых значений заданной функции вектора состояния.

Задача решается в общем виде с использованием алгебры функций, разработанной в работе [16], кратко изложенной в приложении для решения задач анализа нелинейных динамических систем и позволяющей рассматривать системы с негладкими нелинейностями, к числу которых относятся такие нелинейности, как сухое трение, люфт, гистерезис, насыщение.

### Основные соотношения

Рассматривается класс систем, описываемых нелинейной моделью

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(x(t), u(t), \rho(t), \vartheta(t)); \\ y(t) &= h(x(t), v(t)), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x(t) \in X \subseteq R^n$ ,  $u(t) \in U \subseteq R^m$  и  $y(t) \in R^l$  — векторы состояния, управления и выхода;  $\rho(t) \in R^s$  — неизвестная ограниченная функция времени, описывающая возмущения на систему,  $\|\rho(t)\| \leq \rho_*$ ;  $v(t) \in R^l$  описывает шумы измерений и также полагается неизвестной ограниченной функцией времени,  $\|v(t)\| \leq v_*$ ;  $f$  и  $h$  — нелинейные функции, при этом  $f$  может быть недифференцируемой. Предполагается, что значения вектора параметров  $\vartheta(t) \in R^p$  могут находиться в границах  $\underline{\vartheta} \leq \vartheta(t) \leq \bar{\vartheta}$ . Как и в работе [3], для векторов  $x^1$ ,  $x^2$  отношение  $x^1 \leq x^2$  понимается поэлементно.

Требуется построить интервальный наблюдатель, не чувствительный к возмущениям, формирующий нижнюю  $\underline{z}(t)$  и верхнюю  $\bar{z}(t)$  границы функции вектора состояния, которая задана в виде  $z(t) = \mu(x(t))$  для известной функции  $\mu$ , такие что  $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t)$  при всех  $t \geq 0$ .

Такой наблюдатель строится на основе модели, описываемой в виде

$$\begin{aligned} x_*(t+1) &= f_*(x_*(t), y(t), z(t), u(t)); \\ z(t) &= h_z(x_*(t), y_0(t)); \\ y_*(t) &= h_y(x_*(t)), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $x_*(t) \in R^k$  — вектор состояния модели;  $k$  — ее размерность;  $y_*(t) \in R$  — переменная, удовлет-

воряющая при отсутствии шумов измерений и возмущений условию  $y_*(t) = \psi(y(t))$  для некоторой функции  $\psi$ , которая вместе с функциями  $f_*$ ,  $h_z$  и  $h_y$  подлежит определению. Переменная  $y_*(t)$  необходима для дальнейшего обеспечения устойчивости модели, смысл и способ нахождения переменной  $y_0(t)$  поясняется ниже.

Условия и способы построения модели (2), рассматриваемые ниже, опираются на математический аппарат алгебры функций, который детально изложен в работе [16] и кратко описан в Приложении. Основные конструкции этого аппарата: отношение частичного порядка  $\leq$  на множестве функций с областью определения  $X$ , бинарные операции  $\times$  и  $\oplus$ , бинарное отношение  $\Delta$ , а также операторы  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{m}$ . Отметим только, что неравенство  $\alpha \leq \beta$  можно трактовать следующим образом: функция  $\alpha$  содержит информации о состояниях из множества  $X$  не меньше, чем  $\beta$ .

Предполагается, что при отсутствии возмущений векторы состояния  $x(t)$  и  $x_*(t)$  связаны соотношением  $x_*(t) = \varphi(x(t))$  для некоторой функции  $\varphi$ . Из описания модели следует, что рассматриваемая задача близка к задаче функционального диагностирования, детально рассмотренной на языке алгебры функций в работе [17]. Общность этих задач позволяет утверждать, что функции  $\varphi$  удовлетворяет условию [17]

$$h_* \times \varphi \leq \mathbf{M}(\varphi), \quad (3)$$

где

$$h_*(x) = (h \times \mu)(x) = \begin{pmatrix} h(x) \\ \mu(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}.$$

Отметим, что неравенство (3) на языке алгебры функций описывает динамику модели (2).

Наилучшим вариантом решения является модель, не чувствительная к возмущениям. Для построения такой модели введем минимальную в смысле отношения  $\leq$  (содержащую максимальное число функционально независимых компонент) функцию  $\alpha^0$  такую, что функция  $\alpha^0(f(x, u, \rho))$  не зависит от  $\rho$ . Определим семейство функций  $\alpha^0 \leq \alpha^1 \leq \dots$  следующим образом:

$$\alpha^{i+1} = \alpha^i \oplus \mathbf{m}(\alpha^i \times h_*), \quad i = 0, 1, \dots$$

Известно [16, 18], что найдется  $k$ , удовлетворяющее условию  $\alpha^{k+1} \cong \alpha^k$ . Положим  $\varphi := \alpha^k$ .

**Теорема 1** [16, 18]. Функция  $\varphi$  является минимальной (содержащей максимальное число функционально независимых компонент),

удовлетворяющей условиям (3) и  $\alpha^0 \leq \varphi$ , что позволяет построить модель (2), не чувствительную к возмущению.

Из определения оператора  $\mathbf{M}$  и отношения  $\leq$  следует, что условие (3) эквивалентно существованию функции  $f_*$  такой, что

$$f_*((\varphi \times h_*)x(t), u(t)) = \varphi(f(x(t), u(t), \rho(t))), \quad (4)$$

а из условия  $\alpha^0 \leq \varphi$  и определения функции  $\alpha^0$  следует, что возмущение  $\rho(t)$  не оказывает влияния на функцию  $f_*$ .

Чтобы это возмущение не оказывало влияния и на  $z(t)$ , переменная  $y_0(t)$  в модели (2) также не должна испытывать воздействия со стороны  $\rho(t)$ . Из сказанного следует, что эта переменная должна формироваться как  $y_0(t) = (\alpha^0 \oplus h)(x(t))$ . Приведенное выражение означает, что  $y_0(t)$  формируется только теми компонентами вектора выхода  $y(t)$ , которые не чувствительны к возмущению. Обозначим  $h_0 = \alpha^0 \oplus h$ .

Для построения модели (2) запишем выражение

$$x_*(t+1) = \varphi(x(t)) = \varphi(f(x(t), u(t), \rho(t)))$$

и с учетом (4) преобразуем его правую часть, что в итоге дает искомое описание динамической части модели (2). Для завершения процедуры выясним возможность построения статической части модели, заданной в виде  $y_* = h_y(x_*)$  и  $z = h_z(x_*, y_0)$ . Перепишем их с учетом введенных обозначений:

$$\psi(h(x)) = h_y(\varphi(x)), \quad \mu(x) = h_z(\varphi(x), h_0(x)), \quad (5)$$

откуда с учетом определения отношения  $\leq$  следуют соотношения

$$\varphi \oplus h \neq \text{const}; \quad (6)$$

$$\varphi \times h_0 \leq \mu. \quad (7)$$

Если для построенной функции  $\varphi$  эти условия выполняются, конкретный вид функций  $\psi$  и  $h_y$  определяется на основе первого равенства в (5) и (6), записанном в виде  $\psi(h) = \varphi \oplus h = h_y(\varphi)$ , функции  $h_z$  — на основе условия (7) и определения отношения  $\leq$ . Этим заканчивается процесс построения модели, не чувствительной к возмущению.

Отметим, что минимальность функции  $\varphi$  создает наилучшие условия для выполнения условий (6) и (7), откуда следует, что если они

не выполняются, модели, не чувствительной к возмущению, не существует. В этом случае для построения модели, слабо чувствительной к возмущению, необходимо дополнить  $\varphi$  максимальной (содержащей минимальное число функционально независимых компонент) функцией  $\varphi'$ , удовлетворяющей условиям

$$(\varphi' \times \varphi) \oplus h \neq \text{const}, \quad \varphi \times \varphi' \times h_0 \leq \mu. \quad (8)$$

Поскольку функция  $\varphi'$  определяется неоднозначно, выбирать ее рекомендуется так, чтобы "вклад"  $\rho(t)$  в функцию  $\varphi'(f(x, u, \rho))$  был минимальным.

*Замечание 1.* Более конкретный вид рассматриваемой системы, например, когда она линейна и описывается матричными уравнениями, позволяет ставить и решать задачу построения модели, минимально чувствительной к возмущению, с формальным определением вклада возмущения в функцию  $\varphi'(f(x, u, \rho))$  [19]. В общем случае можно говорить только о слабый (в интуитивном смысле) чувствительности.

Таким образом, модель теперь будет представлять собой композицию ранее построенной системы (2), не чувствительной к возмущению, и новой системы с вектором состояния  $x_0 = \varphi_0(x)$  (рис. 1), где функция  $\varphi_0$  должна удовлетворять условиям

$$\varphi_0 \leq \varphi', \quad (\varphi \times h_*) \times \varphi_0 \leq \mathbf{M}(\varphi_0). \quad (9)$$

Первое условие означает, что функция  $\varphi_0$  содержит информации не меньше, чем  $\varphi'$ , и может быть использована в условии (8) вместо  $\varphi'$ . Второе условие в (9) подобно неравенству (7) и обеспечивает существование второй системы на рис. 1; наличие функции  $\varphi$  в этом условии позволяет уменьшить размерность второй системы.

Построить функцию  $\varphi_0$  с указанными свойствами можно с помощью изложенного ниже алгоритма [16, 18].

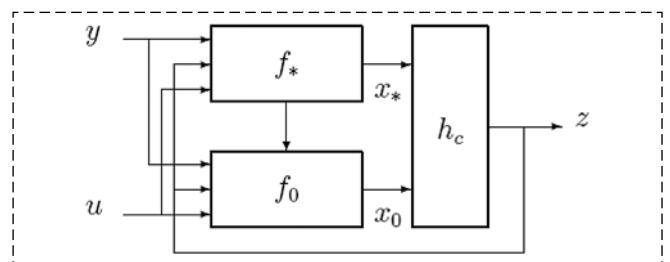


Рис. 1. Результирующая модель  
Fig. 1. Resulting model

### Алгоритм 1

1. Положить  $i := 1$ ,  $\beta^1 = \varphi'$ .
2. Вычислить функцию  $\gamma = \mathbf{M}(\beta^i)$ . Если  $\gamma$  выражается через функцию  $\varphi \times h_* \times \beta^1 \times \dots \times \beta^i$ , перейти к п. 4.
3. Найти функцию  $\beta^{i+1}$  с минимальным числом компонент, такую что

$$\varphi \times h_* \times \beta^1 \times \dots \times \beta^i \times \beta^{i+1} \leq \gamma, \quad (10)$$

положить  $i := i + 1$  и перейти к п. 2.

4. Положить  $\varphi_0 = \beta^1 \times \dots \times \beta^i$ . Конец.

Алгоритм не гарантирует единственности получаемого решения, так как при выполнении п. 3 возможен выбор различных (не сравнимых в смысле отношения  $\leq$ ) функций, удовлетворяющих неравенству (10), но все эти решения будут не сравнимы друг с другом. Более детальную информацию по алгоритму можно найти в работах [16, 18].

После определения функции  $\varphi_0$  модель (2) приобретает следующий конечный вид:

$$\begin{aligned} x_*(t+1) &= f_*(x_*(t), y(t), z(t), u(t)); \\ x_0(t+1) &= f_0(x_0(t), x_*(t), y(t), z(t), u(t)); \\ z(t) &= h_c(x_0(t), x_*(t), y_0(t)); \\ y_*(t) &= h_y(x_0(t), x_*(t)), \end{aligned} \quad (11)$$

где функции  $h_c$ ,  $h_y$  и  $f_0$  определяются на основе соотношений (8) и (9) (после замены в первом функции  $\varphi'$  на  $\varphi_0$ ) соответственно.

*Замечание 2.* Функция  $\varphi$ , обеспечивающая нечувствительность модели к возмущению, не гарантирует ее минимальной размерности. После построения функций  $\varphi$  и  $f_*$  размерность модели может быть уменьшена эвристическими методами. В предположении, что  $\alpha^0 \leq \mu$ , можно также воспользоваться приведенным ниже алгоритмом, являющимся модификацией алгоритма 1.

### Алгоритм 2

1. Положить  $i := 1$ ,  $\beta^1 = \mu$ .
2. Вычислить функцию  $\gamma = \mathbf{M}(\beta^i)$ . Если  $\gamma$  выражается через функцию  $h_* \times \beta^1 \times \dots \times \beta^i$ , перейти к п. 4.
3. Найти функцию  $\beta^{i+1}$  с минимальным числом компонент, такую что  $\alpha^0 \leq \beta^{i+1}$ ,  $h_* \times \beta^1 \times \dots \times \beta^i \times \beta^{i+1} \leq \gamma$ , положить  $i := i + 1$  и перейти к п. 2.
4. Положить  $\varphi_* = \beta^1 \times \dots \times \beta^i$ . Конец.

Так как при всех  $i$  выполняется условие  $\alpha^0 \leq \beta^i$ , то и  $\alpha^0 \leq \varphi_*$ . Из алгоритма 2 также следует, что  $h_* \times \varphi_* \leq \mathbf{M}(\varphi_*)$ ; если при этом  $\varphi_* \oplus h \neq \text{const}$ , то функция  $\varphi_*$  может быть использована для построения модели, не чувствительной к возмущению.

Алгоритм 2 не гарантирует минимальной размерности такой модели, но, как правило, дает модели размерности меньшей, чем построенные на основе функции  $\varphi$ . Однако в отличие от этой функции он не гарантирует построения модели, даже если она существует. Это связано с тем, что в п. 3 может не найтись функции  $\beta^{i+1}$ , удовлетворяющей условию  $\alpha^0 \leq \beta^{i+1}$ .

### Обеспечение устойчивости

Устойчивость построенной нелинейной модели может быть обеспечена различными методами [20], детально рассмотрим один из них, для чего после подстановки  $z = h_c(x_0, x_*, y_0)$  в (11) и введения обратной связи  $Kr(t)$  запишем эти уравнения в компактном виде:

$$\begin{aligned} x_c(t+1) &= f_c(x_c(t), y(t), u(t), \vartheta(t)) + Kr(t); \\ z(t) &= h_c(x_c(t), y_0(t)); \\ y_*(t) &= h_y(x_c(t)), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $K$  — матрица обратной связи,

$$r(t) = \psi(y(t)) - y_*(t), \quad x_c = (x_*^T \quad x_0^T)^T.$$

Для простоты предполагается, что шумы измерений, возмущения и вариации параметров системы невелики и не оказывают влияния на устойчивость модели, поэтому в функции  $f_c$  ниже они опущены. Их учет при рассмотрении вопросов устойчивости представляет собой сложную задачу.

Введем ошибку  $e(t) = \varphi(x(t)) - x_c(t)$ ; предполагаем, что она мала, функция  $f_c(x_c, y, u)$  дифференцируема по  $x_c$  и может быть разложена в ряд Тейлора относительно его текущего значения. Запишем уравнение для ошибки  $e(t)$ :

$$\begin{aligned} e(t+1) &= \varphi(f(x(t), u(t))) - \\ &- f_c(x_c(t), y(t), u(t)) - Kr(t) = \\ &= f_c(\varphi(x(t)), y(y), u(t)) - \\ &- f_c(x_c(t), y(t), u(t)) - K(\psi(y(t)) - y_*(t)) = \\ &= f_c(x_c(t) + e(t), y(y), u(t)) - \\ &- f_c(x_c(t), y(t), u(t)) - K(\psi(y(t)) - y_*(t)) \approx \\ &\approx \frac{\partial f_c(x_c, y, u)}{\partial x_c} e(t) - K(h_y(\varphi(x(t))) - h_y(x_c(t))) \approx \\ &\approx \left( \frac{\partial f_c(x_c, y, u)}{\partial x_c} - K \frac{\partial h_y(x_c)}{\partial x_c} \right) e(t) = \\ &= F_r(K, x_c, y, u)e(t). \end{aligned}$$

В выводе принято, что функция  $h_y(x_c)$  также дифференцируема.

Для того чтобы модель была устойчивой, собственные числа матрицы  $F_r(K, x_c, y, u)$  должны находиться в окружности единичного радиуса с центром в начале координат. Из полученного уравнения следует, что элементы матрицы обратной связи  $K$  в этом случае будут зависеть от переменных  $x_c, y, u$ . Для определения этих элементов необходимо выполнить следующие операции: найти характеристический полином матрицы  $F_r(K, x_c, y, u)$  в виде

$$\det(F_r(K, x_c, y, u) - \lambda I_k) = \lambda^k + a_1(K, x_c, y, u)\lambda^{k-1} + \dots + a_k(K, x_c, y, u);$$

для обеспечения требуемой динамики наблюдателя задать значения собственных чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ; составить систему нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} a_1(K, x_c, y, u) &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k); \\ a_2(K, x_c, y, u) &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \dots + \lambda_{k-1}\lambda_k; \\ &\dots; \\ a_k(K, x_c, y, u) &= (-1)^k \lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_k, \end{aligned}$$

и найти из нее элементы матрицы  $K$ .

### Построение интервального наблюдателя

Процедура построения интервального наблюдателя сравнительно проста только для линейных систем [3], для нелинейных, особенно заданных в общем виде, она заметно усложняется. Для изложения общих правил запишем модель (12) с обратной связью в виде

$$\begin{aligned} x_c(t+1) &= f_g(x_c(t), h(x(t)), u(t), \rho(t), \vartheta(t)); \\ z(t) &= h_c(x_c(t), h_0(x(t))). \end{aligned}$$

Замена  $y(t)$  на  $h(x(t))$  и  $y_0(t)$  на  $h_0(x(t))$  объясняется необходимостью учесть шумы измерений. Неопределенностями, влияющими на значение интервала, являются переменные  $h(x(t)), h_0(x(t)), \rho(t)$  и  $\vartheta(t)$ ; неопределенность в  $h(x(t))$  и  $h_0(x(t))$  связана с шумами измерений, поскольку в наблюдатель входят переменные  $y(t) = h(x(t)) + v(t)$  и  $y_0(t) = h_0(x(t)) + v_0(t)$ , где  $v_0(t)$  — часть вектора  $v(t)$ , соответствующая переменной  $y_0(t)$ .

Введем важные определения. Будем говорить, что  $i$ -я компонента функции  $f_g$  монотонна по аргументу  $x_c$ , если

$$\begin{aligned} x'_c \leq x''_c &\Rightarrow f_{gi}(x'_c, h(x), u, \rho, \vartheta) \leq \\ &\leq f_{gi}(x''_c, h(x), u, \rho, \vartheta) \end{aligned} \quad (13)$$

или

$$\begin{aligned} x'_c \leq x''_c &\Rightarrow f_{gi}(x'_c, h(x), u, \rho, \vartheta) \geq \\ &\geq f_{gi}(x''_c, h(x), u, \rho, \vartheta) \end{aligned} \quad (14)$$

независимо от значений других аргументов. В случае (13) будем говорить о положительном влиянии переменной  $x_c$  на  $i$ -ю компоненту функции  $f_g$ , в случае (14) — об отрицательном.

В дальнейшем будем предполагать, что все компоненты функций  $f_g$  и  $h_c$  монотонны по всем своим аргументам, при этом допускается, что если аргумент представляет собой вектор, то часть его компонент может иметь положительное влияние, часть отрицательное.

Вхождение в наблюдатель информации о неопределенностях в виде их нижних и верхних границ зависит от влияния этих неопределенностей на правые части уравнений, в которые они входят. Если влияние рассматриваемой неопределенности положительно, то в нижнюю границу соответствующей компоненты функции  $f_g$  должна входить нижняя же граница этой неопределенности, в случае отрицательного влияния — верхняя граница. Граница шумов измерений  $v_*$  в первом случае входит с отрицательным знаком, во втором — с положительным. Для положительно влияющей переменной  $x_{cj}(t)$  в нижнюю границу соответствующей компоненты функции  $f_g$  должна входить переменная  $\underline{x}_{cj}(t)$ , для отрицательно влияющей — переменная  $\bar{x}_{cj}(t)$ . Для нижней границы функции  $h_c$  вхождения формируются аналогичным образом. Для верхних границ компонент функций  $f_g$  и  $h_c$  описанные выше вхождения меняются на противоположные.

В качестве примера приведем описание интервального наблюдателя для скалярных функций  $f_g$  и  $h_c$ , когда влияния неопределенностей  $h(x(t)), h_0(x(t))$  и  $\rho(t)$  положительны, параметра  $\vartheta(t)$  и переменной  $x_c(t)$  — отрицательны:

$$\begin{aligned} \underline{x}_c(t+1) &= f_g(\bar{x}_c(t), y(t) - v_*, u(t), \rho, \bar{\vartheta}); \\ \bar{x}_c(t+1) &= f_g(\underline{x}_c(t), y(t) + v_*, u(t), \bar{\rho}, \underline{\vartheta}); \\ \underline{z}(t) &= h_c(\bar{x}_c(t), y_0(t) - v_0); \\ \bar{z}(t) &= h_c(\underline{x}_c(t), y_0(t) + v_0). \end{aligned} \quad (15)$$

Для подтверждения правильности проведенных операций введем ошибки оценивания:

$$\begin{aligned} \underline{e}_c(t) &= x_c(t) - \underline{x}_c(t), \quad \bar{e}_c(t) = \bar{x}_c(t) - x_c(t), \\ \underline{e}_z(t) &= z(t) - \underline{z}(t), \quad \bar{e}_z(t) = \bar{z}(t) - z(t). \end{aligned}$$

**Теорема 2.** Если функции  $f_g(x_c, h(x), u, \rho, \vartheta)$  и  $h_c(x_c, h_0(x))$  монотонны по каждому своему аргументу независимо от значений других аргументов и  $\underline{x}_c(0) \leq x_c(0) \leq \bar{x}_c(0)$ , то для наблюдателя (15) и всех  $t \geq 0$  выполняются соотношения  $\underline{x}_c(t) \leq x_c(t) \leq \bar{x}_c(t)$  и  $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t)$ .

**Доказательство.** Нетрудно видеть, что уравнение для ошибки  $\underline{e}_c(t)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \underline{e}_c(t+1) &= f_g(x_c(t), h(x(t)), u(t), \rho(t), \vartheta(t)) - \\ &- f_g(\bar{x}_c(t), y(t) - v_*, u(t), \rho, \bar{\vartheta}), \end{aligned}$$

а так как  $x_c(0) \geq \underline{x}_c(0)$ ,  $y(t) - v_* = h(x(t)) + v(t) - v_*$ ,  $v(t) - v_* \leq 0$  и функция  $f_g(x_c, h(x), u, \rho, \vartheta)$  монотонна по каждому своему аргументу, то  $\underline{e}_c(1) \geq 0$ , т. е.  $x_c(1) \geq \underline{x}_c(1)$ . По индукции можно доказать неравенства  $\underline{e}_c(t) \geq 0$  и  $x_c(t) \geq \underline{x}_c(t)$  и аналогично, что  $\bar{e}_c(t) \geq 0$  и  $\bar{x}_c(t) \geq x_c(t)$  для всех  $t \geq 0$ . Поскольку  $h_c(x_c, h_0(x))$  монотонна по каждому своему аргументу и  $x_c(t) \geq \underline{x}_c(t)$ , то

$$\begin{aligned} \underline{e}_z(t) &= z(t) - \underline{z}(t) = h_c(x_c(t), h_0(x(t))) - \\ &- h_c(\underline{x}_c(t), y(t) - v_0) \geq 0, \end{aligned}$$

что эквивалентно неравенству  $z(t) \geq \underline{z}(t)$  при всех  $t \geq 0$ . Аналогично доказывается соотношение  $\bar{z}(t) \geq z(t)$ . Теорема доказана.

### Практический пример

Рассмотрим систему управления

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= a_4 u_1(t) - a_1 \sqrt{x_1(t) - x_2(t)} + x_1(t); \\ x_2(t+1) &= a_5 u_2(t) + a_1 \sqrt{x_1(t) - x_2(t)} - \\ &- a_2 \sqrt{x_2(t) - x_3(t)} + x_2(t); \\ x_3(t+1) &= a_2 \sqrt{x_2(t) - x_3(t)} - \\ &- a_3 \sqrt{x_3(t)} + x_3(t) + \rho(t); \\ y_1(t) &= x_2(t) + v_1(t); \quad y_2(t) = x_3(t) + v_2(t). \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнения (16) описывают дискретизованную модель трехтанковой системы, состоящей из трех резервуаров, соединенных между собой трубами, детально описанную в работе [1]; отметим только, что уровни жидкости в танках обозначены  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  и  $x_3(t)$ . Предполагается, что  $x_1(t) \geq x_2(t) \geq x_3(t)$ .

Построим интервальный наблюдатель, оценивающий переменную  $x_1(t) := z(t)$ , что дает  $\mu(x) = x_1$ . Нетрудно видеть, что  $h_*(x) = (h \times \mu)(x) = x_2 \times x_3 \times x_1$ ,  $\alpha^0(x) = x_1 \times x_2$ . Так как

$(\alpha^0 \times h_*)(x) = x_1 \times x_2 \times x_3 = \mathbf{0}$ , то  $\mathbf{m}(\alpha^0 \times h_*)(x) = \mathbf{0}$ , откуда  $\varphi(x) = \alpha^1(x) = \alpha^0(x) = x_1 \times x_2$ , что дает модель размерности 2.

Применяя алгоритм 2, получим более простую модель. Действительно, так как

$$\beta^1(x) = \mu(x) = x_1 \geq \alpha^0(x) = x_1 \times x_2,$$

то

$$\gamma(x) = \mathbf{M}(\beta^1)(x) = a_1 \sqrt{x_1 - x_2} + x_1,$$

что выражается через функцию

$$(h_* \times \beta^1)(x) = x_2 \times x_3 \times x_1.$$

В результате  $x_* = \varphi_*(x) = x_1$ ; модель описывается уравнениями

$$\begin{aligned} x_*(t+1) &= a_4 u_1(t) - a_1 \sqrt{x_*(t) - h_1(x)} + x_*(t); \\ z(t) &= x_*(t). \end{aligned} \quad (17)$$

Нетрудно видеть, что модель устойчива.

Предполагается, что параметры  $a_1$  и  $a_4$  могут находиться в границах  $\underline{a}_1 \leq a_1 \leq \bar{a}_1$  и  $\underline{a}_4 \leq a_4 \leq \bar{a}_4$  соответственно. Нетрудно проверить, что влияние неопределенностей  $a_4$  и  $h_1(x)$  на  $x_*$  в (17) положительно, а  $a_1$  — отрицательно; переменная  $x_*$  влияет двояко: находящаяся под знаком корня влияет отрицательно, в виде слагаемого  $+x_*$  — положительно. С учетом этого интервальный наблюдатель описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \underline{x}_*(t+1) &= \underline{a}_4 u_1(t) - \bar{a}_1 \sqrt{\bar{x}_*(t) - (y_1(t) - v_{*1})} + \underline{x}_*(t); \\ \bar{x}_*(t+1) &= \bar{a}_4 u_1(t) - \underline{a}_1 \sqrt{\underline{x}_*(t) - (y_1(t) + v_{*1})} + \bar{x}_*(t); \\ \underline{z}(t) &= \underline{x}_*(t); \\ \bar{z}(t) &= \bar{x}_*(t). \end{aligned}$$

Отметим, что функция  $\sqrt{\cdot}$  монотонна.

Введем ошибку оценивания  $\underline{e}_*(t) = x_*(t) - \underline{x}_*(t)$  и уравнение для нее:

$$\begin{aligned} \underline{e}_*(t+1) &= a_4 u_1(t) - a_1 \sqrt{x_*(t) - h_1(x(t))} + x_*(t) - \\ &- (\underline{a}_4 u_1(t) - \bar{a}_1 \sqrt{\bar{x}_*(t) - (y_1(t) - v_{*1})} + \underline{x}_*(t)) = \\ &= u_1(t)(a_4 - \underline{a}_4) + \bar{a}_1 \sqrt{\bar{x}_*(t) - (y_1(t) - v_{*1})} - \\ &- a_1 \sqrt{x_*(t) - h_1(x(t))} + \underline{e}_*(t) = \\ &= u_1(t)(a_4 - \underline{a}_4) + \bar{a}_1 \sqrt{\bar{x}_*(t) - h_1(x(t))} - \\ &- a_1 \sqrt{x_*(t) - h_1(x(t))} + \underline{e}_*(t). \end{aligned}$$

Так как  $\bar{x}_*(0) \geq x_*(0)$ ,  $\bar{a}_1 \geq a_1$ ,  $a_4 \geq \underline{a}_4$ ,  $u_1(t) \geq 0$  и  $\underline{e}_*(0) \geq 0$ , из приведенного выражения следует  $\underline{e}_*(1) \geq 0$ , т. е.  $x_*(1) \geq \underline{x}_*(1)$ . По ин-

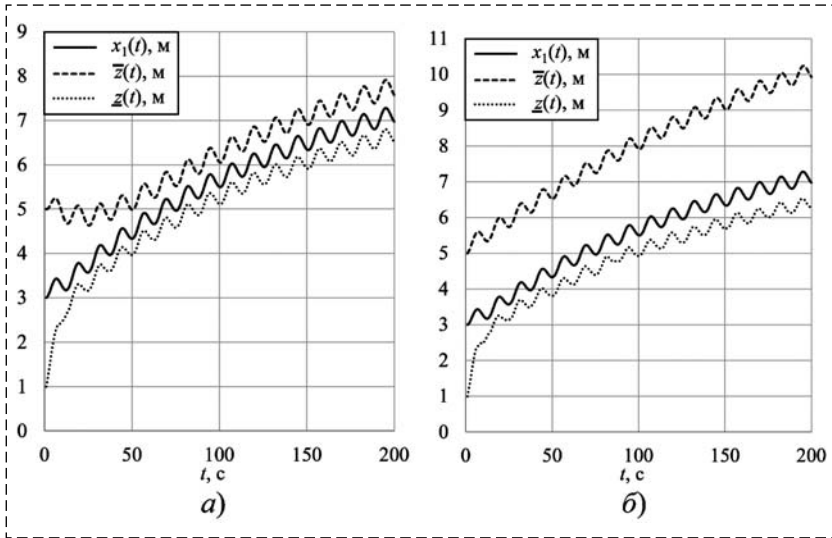


Рис. 2. Поведение переменных  $x_1(t)$ ,  $z(t)$  и  $\bar{z}(t)$   
 Fig. 2. Behavior of variables  $x_1(t)$ ,  $z(t)$  and  $\bar{z}(t)$

дукции нетрудно показать, что  $e_*(t) \geq 0$  и  $x_*(t) \geq \underline{x}_*(t)$  для всех  $t \geq 0$ , что дает  $z(t) \geq \underline{z}(t)$  для всех  $t \geq 0$ . Подобным образом показывается, что  $\bar{z}(t) \geq z(t)$ .

Для моделирования примем  $a_1 = a_2 = a_3 = 0,1$ ,  $a_4 = a_5 = 1$ , возмущение  $\rho(t)$  и шумы измерений представлены случайными величинами, равномерно распределенными на интервале  $[-0,2; 0,2]$ ,  $u_1(t) = u_2(t) = 0,1(1 + \sin(t/2))$ . На рис. 2 представлены результаты моделирования наблюдателя с начальными состояниями  $x_1(0) = 3, x_2(0) = 2, x_3(0) = 1, \underline{x}_*(0) = 1, \bar{x}_*(0) = 5$ . На рис. 2, а  $\bar{a}_1 = 0,11, \underline{a}_1 = 0,09$ , на рис. 2, б  $\bar{a}_1 = 0,15, \underline{a}_1 = 0,05$ . Видно, что при увеличении значений коэффициентов сверх минимальных интервал становится ожидаемо шире.

### Заключение

В работе рассмотрена задача построения интервальных наблюдателей для нелинейных динамических систем, описываемых дискретными моделями, при наличии внешних возмущений, шумов измерений и параметрических неопределенностей. Решение проведено на языке алгебры функций, позволяющей получить общее решение. Получены расчетные соотношения и правила, дающие возможность построить интервальные наблюдатели, не чувствительные к возмущениям и чувствительные в ограниченной степени. Теоретические результаты иллюстрированы примером для реальной технической системы.

Используемый в работе математический аппарат (алгебра функций) содержит четыре основные конструкции: 1) отношение частичного предпорядка, обозначаемое как  $\leq$ ; 2) две бинарные операции  $\times$  и  $\oplus$ ; 3) бинарное отношение  $\Delta$ ; 4) операторы  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{M}$ . Эти конструкции определены на множестве  $V_X$  векторных функций с областью определения в пространстве состояний  $X$ . Рассмотрим эти элементы более подробно.

1. *Отношение частичного предпорядка.* Для произвольных функций  $\alpha, \beta \in V_X$  записывается  $\alpha \leq \beta$ , если существует функция  $\gamma$  такая,

что  $\beta(x) = \gamma(\alpha(x))$  для всех  $x \in X$ . Определение означает, что каждая компонента функции  $\beta$  может быть выражена через компоненты функции  $\alpha$ . Если  $\alpha \leq \beta$  и  $\beta \leq \alpha$ , то функции  $\alpha$  и  $\beta$  называются эквивалентными, что обозначается как  $\alpha \cong \beta$ . Тожественная и эквивалентные ей функции обозначаются символом  $\mathbf{0}$ .

2. *Бинарные операции.* Известно, что для произвольных функций  $\alpha, \beta \in V_X$  существуют две бинарные операции  $\times$  и  $\oplus$ , определяемые следующим образом:

$$\alpha \times \beta = \inf(\alpha, \beta), \quad \alpha \oplus \beta = \sup(\alpha, \beta).$$

Указанные операции определяют функции с точностью до эквивалентности.

Правило вычисления операции  $\times$  выглядит просто:

$$(\alpha \times \beta)(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) \\ \beta(x) \end{pmatrix}.$$

Операция  $\oplus$  может быть вычислена с использованием средств дифференциальной геометрии [16]. В простейших случаях может быть использовано определение операции  $\alpha \oplus \beta$  как наименьшей верхней грани функций  $\alpha$  и  $\beta$ .

Рассмотрим пример вычисления функций  $\alpha \times \beta$  и  $\alpha \oplus \beta$ . Пусть  $X = R^3$ ,

$$\alpha(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \beta(x) = \begin{pmatrix} x_1 x_3 \\ x_2 x_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\alpha \times \beta)(x) &\cong (x_1 + x_2, x_3, x_1 x_3)^T, \\ (\alpha \oplus \beta)(x) &= x_3(x_1 + x_2). \end{aligned}$$

3. *Бинарное отношение*  $\Delta$ . Для произвольных функций  $\alpha, \beta \in V_X$

$$(\alpha, \beta) \in \Delta \Leftrightarrow \alpha(f(x, u)) = f_*(\beta(x), u)$$

для всех  $(x, u) \in X \times U$  и некоторой функции  $f_*$ . Бинарное отношение  $\Delta$  самостоятельного значения не имеет и используется для определения операторов.

4. *Операторы*  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{M}$ . Для произвольных функций  $\alpha, \beta \in V_X$  операторы  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{M}$  определяются следующим образом.

Оператор  $\mathbf{m}$  задает функцию  $\mathbf{m}(\alpha) \in V_X$ , которая удовлетворит условиям: (i)  $(\alpha, \mathbf{m}(\alpha)) \in \Delta$ ; (ii) если  $(\alpha, \beta) \in \Delta$ , то  $\mathbf{m}(\alpha) \leq \beta$ .

Оператор  $\mathbf{M}$  задает функцию  $\mathbf{M}(\beta) \in V_X$ , которая удовлетворяет условиям: (i)  $(\mathbf{M}(\beta), \beta) \in \Delta$ ; (ii) если  $(\alpha, \beta) \in \Delta$ , то  $\alpha \leq \mathbf{M}(\beta)$ .

Из последних определений следует, что для произвольной  $\alpha$  выражение  $\mathbf{m}(\alpha)$  представляет собой минимальную функцию, формирующую пару с  $\alpha$ , и для произвольной  $\beta$  выражение  $\mathbf{M}(\beta)$  представляет собой максимальную функцию, формирующую пару с  $\beta$ .

Операторы  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{M}$  обладают рядом свойств, которые детально описаны в работе [16], где также можно найти правила вычисления операторов.

#### Список литературы

1. **Жирабок А. Н., Зуев А. В., Ким Чхун Ир.** Метод построения интервальных наблюдателей для стационарных линейных систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2022. № 4. С. 22–32. DOI: 10.31857/S0002338822010139.
2. **Жирабок А. Н., Ким Чхун Ир, Бобко Е. Ю.** Сравнительный анализ канонических форм в задачах диагностирования и оценивания // Мехатроника, автоматизация, управление. 2022. Т. 23, № 6. С. 289–294. DOI: 10.17587/mau.23.289-294.
3. **Ефимов Д. В., Раисси Т.** Построение интервальных наблюдателей для динамических систем с неопределенностями // АИТ. 2016. № 2. С. 5–49. DOI: 10.1134/S0005117916020016.
4. **Khan A., Xie W, Zhang L., Liu L.** Design and applications of interval observers for uncertain dynamical systems // IET Circuits Devices Syst. 2020. Vol. 14. P. 721–740. DOI: 10.1049/iet-cds.2020.0004.

5. **Kolesov N., Gruzlikov A., Lukoyanov E.** Using fuzzy interacting observers for fault diagnosis in systems with parametric uncertainty // Proceedings of the XII-th Inter. Symp. Intelligent Systems, INTELS'16, 5-7 October 2016, Moscow, Russia. P. 499–504.
6. **Кремлев А. С., Чеботарев С. Г.** Синтез интервального наблюдателя для линейной системы с переменными параметрами // Изв. вузов. Приборостроение. 2013. Т. 56, № 4. С. 42–46.
7. **Efimov D., Raissi T., Perruquetti W., Zolghadri A.** Estimation and control of discrete-time LPV systems using interval observers // Proceedings of the 52nd IEEE Conf. On Decision and Control. Florence, Italy. 2013. P. 5036–5041.
8. **Chebotarev S., Efimov D., Raissi T., Zolghadri A.** Interval observers for continuous-time LPV systems with L1/L2 performance // Automatica. 2015. Vol. 51. P. 82–89. DOI: 10.1016/j.automatica.2015.05.009.
9. **Blesa J., Puig V., Bolea Y.** Fault detection using interval lpv models in an open-flow canal // Control Engineering Practice. 2010. Vol. 18. P. 460–470. DOI: 10.1016/j.conengprac.2010.01.002.
10. **Liu L., Xie W., Khan A., Zhang L.** Finite-time functional interval observer for linear systems with uncertainties // IET Control Theory and Applications. 2020. Vol. 14. P. 2868–2878. DOI: 10.1049/iet-cta.2020.0200.
11. **Marouani G., Dinh T., Raissi T., Wang X., Messaoud H.** Unknown input interval observers for discrete-time linear switched systems // European J. Control. 2021. Vol. 59. P.165–174. DOI: 10.1016/j.ejcon.2020.09.004.
12. **Mazenc F., Bernard O.** Asymptotically stable interval observers for planar systems with complex poles // IEEE Trans. Automatic Control. 2010. Vol. 55, N. 2. P. 523–527. DOI: 10.1109/TAC.2009.2037472.
13. **Meyer L.** Robust functional interval observer for multi-variable linear systems // J. Dynamic Systems, Meas. Control. 2019. Vol. 141. Art. no. 094502. DOI: 10.1115/1.4043334.
14. **Zheng G., Efimov D., Perruquetti W.** Interval state estimation for uncertain nonlinear systems // Proceedings of the IFAC NOLCOS 2013. Toulouse, France, 2013.
15. **Zhang K., Jiang B., Yan X., Edwards C.** Interval sliding mode based fault accommodation for non-minimal phase LPV systems with online control application // Intern. J. Control. 2019. DOI: 10.1080/00207179.2019.1687932.
16. **Жирабок А. Н., Шумский А. Е.** Алгебраические методы анализа нелинейных динамических систем. Владивосток: Дальнаука, 2008.
17. **Жирабок А. Н.** Поиск дефектов в нелинейных системах методом функционального диагностирования на основе обобщенных алгебраических инвариантов // АИТ. 1994. № 7. С. 160–169.
18. **Kaldmae A., Kotta U., Jiang B., Shumsky A., Zhirabok A.** Faulty plant reconfiguration based on disturbance decoupling methods // Asian J. Control. 2016. Vol. 8, N. 3. P. 858–867. DOI: 10.1371/journal.pone.0193972
19. **Жирабок А. Н., Шумский А. Е., Соляник С. П., Суворов А. Ю.** Метод построения нелинейных робастных диагностических наблюдателей // АИТ. 2017. № 9. С. 34–48. DOI: 10.1134/S000511791709003X.
20. **Нелинейная динамика и управление: Сборник статей.** Вып. 6 / Под ред. С. В. Емельянова, С. К. Коровина. М.: Физматлит, 2008.

## Interval Observer Design for Discrete-Time Nonlinear Dynamic Systems

A. N. Zhirabok<sup>1,2</sup>, zhirabok@mail.ru, A. V. Zuev<sup>1,2</sup>, alvzuev@yandex.ru,  
A. E. Shumsky<sup>1</sup>, a.e.shumsky@yandex.ru, E. Yu. Bobko<sup>1</sup>, bobko.eyu@dvfu.ru,

<sup>1</sup> Far Eastern Federal University, Vladivostok, 690950, Russian Federation,

<sup>2</sup> Institute of Marine Technology Problems, 690950, Russian Federation

Corresponding author: **Zhirabok Alexey N.**, Dr. of Sci., Professor, Far Eastern Federal University, Vladivostok, 690950, Russian Federation, e-mail: zhirabok@mail.ru

Accepted on February 03, 2023

#### Abstract

The paper considers the problem of interval observer design for nonlinear dynamic systems described by discrete-time models under external disturbances, measurement noise, and parametric uncertainties. The problem is to design the

observer with fewer dimensions than that of the original system; such an observer must generate upper and lower bounds of admissible values of the prescribed nonlinear function of the original system state vector. To solve the problem, special mathematical tool is used. The advantage of this tool is that it allows studying the systems described by models with non-smooth nonlinearities. To construct interval observer, the reduced-order model of the original system insensitive or having minimal sensitivity to the disturbances is designed. The designing procedure is based on two algorithms: the first one is intended to design the model of minimal sensitivity; the second one is used to reduce the dimension of the model. The rules are formulated to ensure stability based on the prescribed set of the desirable eigenvalues and feedback. The interval observer consists of two subsystems: the first one generates the lower bound, the second one the upper bound. The relations describing both subsystems are given. To construct such an observer in the nonlinear case, the terms of positive and negative influence of variables describing the model are introduced. These terms allow finding out how the upper and lower bounds of these variables will appear in the interval observer. The conditions under which the observer can be designed are given. The theoretical results are illustrated by an example of three tank system. Simulation results based on the package Matlab show the effectiveness of the developed theory.

**Keywords:** dynamic systems, non-smooth nonlinearities, parametric uncertainties, discrete-time models, algebra of functions, bounds, interval observers, stability

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Scientific Foundation, project no. 23-29-00191.

For citation:

Zhirabok A. N., Zuev A. V., Shumsky A. E., Bobko E. Yu. Interval Observer Design for Discrete-Time Nonlinear Dynamic Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2023, vol. 24, no. 6, pp. 283–291.

DOI: 10.17587/mau.24.283-291

### References

- Zhirabok A., Zuev A., Kim C. Method to design interval observers for linear time-invariant systems, *J. Computer and Systems Sciences Int.*, 2022, vol. 61, no. 5, pp. 485–495, DOI: 10.31857/S0002338822010139.
- Zhirabok A., Zuev A., Kim C., Bobko E. Yu. Comparative analysis of canonical forms in fault diagnosis and estimation problems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 6, pp. 289–294, DOI: 10.17587/mau.23.289-294 (in Russian).
- Efimov D., Raissi T. Design of interval state observers for uncertain dynamical systems, *Autom. Remote Control*, vol. 77, no. 2, pp. 191–225, DOI: 10.1134/S0005117916020016.
- Khan A., Xie W., Zhang L., Liu L. Design and applications of interval observers for uncertain dynamical systems // *IET Circuits Devices Syst.*, 2020, vol. 14, pp. 721–740, DOI: 10.1049/iet-cds.2020.0004.
- Kolesov N., Gruzlikov A., Lukoyanov E. Using fuzzy interacting observers for fault diagnosis in systems with parametric uncertainty, *Proceedings of the XII-th Inter. Symp. Intelligent Systems, INTELS'16*, 5-7 October 2016, Moscow, Russia, pp. 499–504.
- Kremlev A., Chebotarev S. Synthesis of interval observers for linear systems with variable parameters, *Izv. Vuzov. Priboroostroenie*, 2013, vol. 56, no. 4, pp. 42–46 (in Russian).
- Efimov D., Raissi T., Perruquetti W., Zolghadri A. Estimation and control of discrete-time LPV systems using interval observers, *Proceedings of the 52nd IEEE Conf. on Decision and Control. Florence, Italy*, 2013, pp. 5036–5041.
- Chebotarev S., Efimov D., Raissi T., Zolghadri A. Interval observers for continuous-time LPV systems with L1/L2 performance, *Automatica*, 2015, vol. 51, pp. 82–89, DOI: 10.1016/j.automatica.2015.05.009.
- Blesa J., Puig V., Bolea Y. Fault detection using interval LPV models in an open-flow canal, *Control Engineering Practice*, 2010, vol. 18, pp. 460–470, DOI: 10.1016/j.conengprac.2010.01.002.
- Liu L., Xie W., Khan A., Zhang L. Finite-time functional interval observer for linear systems with uncertainties, *IET Control Theory and Applications*, 2020, vol. 14, pp. 2868–2878, DOI: 10.1049/iet-cta.2020.0200.
- Marouani G., Dinh T., Raissi T., Wang X., Messaoud H. Unknown input interval observers for discrete-time linear switched systems, *European J. Control*, 2021, vol. 59, pp. 165–174, DOI: 10.1016/j.ejcon.2020.09.004.
- Mazenc F., Bernard O. Asymptotically stable interval observers for planar systems with complex poles, *IEEE Trans. Automatic Control*, 2010, vol. 55, no. 2, pp. 523–527, DOI: 10.1109/TAC.2009.2037472.
- Meyer L. Robust functional interval observer for multi-variable linear systems. *J. Dynamic Systems, Measur. Control*, 2019, vol. 141, art. no. 094502, DOI: 10.1115/1.4043334.
- Zheng G., Efimov D., Perruquetti W. Interval state estimation for uncertain nonlinear systems, *Proceedings of the IFAC NOLCOS 2013*, Toulouse, France, 2013.
- Zhang K., Jiang B., Yan X., Edwards C. Interval sliding mode based fault accommodation for non-minimal phase LPV systems with online control application, *Intern. J. Control*, 2019, DOI: 10.1080/00207179.2019.1687932.
- Zhirabok A., Shumsky A. Algebraic methods of nonlinear dynamic system analysis. Vladivostok, Dalnaura, 2008 (in Russian).
- Zhirabok A. Fault isolation in nonlinear systems by fault diagnosis method based on generalized algebraic invariants, *Autom. and Remote Control*, 1994, no. 7, pp. 160–169.
- Kaldmae A., Kotta U., Jiang B., Shumsky A., Zhirabok A. Faulty plant reconfiguration based on disturbance decoupling methods, *Asian J. Control*, 2016, vol. 8, pp. 858–867, DOI: 10.1371/journal.pone.0193972.
- Zhirabok A., Shumsky A., Solyanic S., Suvorov A. Method of design of nonlinear diagnostic observers, *Autom. and Remote Control*, 2017, vol. 78, pp. 1572–1584, DOI: 10.1134/S000511791709003X.
- Emelyanov S., Korovin S. eds. Nonlinear dynamic and control. Vol. 6. Moscow, 2008 (in Russian).