

**В. В. Куликов**, соискатель, godefired@mail.ru, **Н. Н. Куцый**, д-р техн. наук, проф., kucyinn@mail.ru,  
**Е. А. Осипова**, канд. техн. наук, доц., osipovaelizaveta@yandex.ru,  
 Иркутский национальный исследовательский технический университет

## Параметрическая оптимизация ПИД регулятора с ограничением на основе метода сопряженных градиентов Полака—Поляка—Рибьера

*В автоматических системах регулирования (АСР) промышленных процессов различного типа с запаздыванием при ограничении на значение перерегулирования широко применяется ПИД регулятор с реальным дифференцирующим звеном (далее ПИД регулятор). Как известно, признаком наличия большого запаздывания у объекта регулирования является отношение  $\tau_{ob}/T_{ob} \geq 1$ , где  $\tau_{ob}$ ,  $T_{ob}$  — время запаздывания и максимальная постоянная времени объекта регулирования. При наличии в АСР большого запаздывания и ограничения на выходную координату параметрический синтез ПИД регулятора хорошо известными частотными методами становится затруднительным, что обуславливает интерес к разработке численных беспоисковых алгоритмов параметрической оптимизации, основанных на использовании функций чувствительности для определения градиента критерия оптимальности.*

*В данной работе предложен алгоритм численной оптимизации, вычисляющий исхода из минимума интегрального квадратичного критерия значения настраиваемых параметров ПИД регулятора в указанных АСР. Чтобы обеспечить отсутствие перерегулирования у результирующего переходного процесса, предлагается на этапе оптимизации вводить в АСР ограничение на регулирующее воздействие, которое, в свою очередь, учитывается путем добавления штрафной функции в интегральный критерий.*

*Предлагаемый алгоритм основан на методе сопряженных градиентов Полака—Поляка—Рибьера с его известными преимуществами. Составляющие градиента критерия оптимизации вычисляются с помощью таких функций чувствительности, которые позволяют получить все компоненты этого вектора без пробных поисковых вариаций настраиваемых параметров. Для вычисления шага оптимизации авторами реализован соответствующий алгоритм, в основе которого лежит градиентная процедура с применением функции чувствительности выходной координаты АСР к значению шага.*

*Сходимость предлагаемого алгоритма проверена с помощью вычислительной процедуры на основе зоны притяжения рекордных значений критерия оптимизации, которая определяется положительно определенной матрицей Гессе интегрального квадратичного критерия, построенного на разности усредненного и проверяемого переходных процессов.*

**Ключевые слова:** ПИД регулятор, запаздывание, параметрическая чувствительность, сопряженные градиенты, штрафная функция

### Введение

На данный момент уже можно утверждать, что для автоматической системы регулирования объекта с запаздыванием и ограничением на перерегулирование задача параметрического синтеза ПИД регулятора стала одной из фундаментальных. Анализ литературных источников показывает, что описание динамических систем с помощью пространства состояний и применение современных математических подходов для конструирования ПИД регулятора [1—4] не снизили в настоящее время интереса к синтезу такого регулятора в системах, представленных в частотной области или пространстве сигналов [5—10].

В большинстве производственных процессов присутствуют запаздывания, которые необходимо учитывать при разработке автоматических систем, так как запаздывание влияет на показатели качества таких систем [11—13].

Наличие большого запаздывания у объекта регулирования, использование реального дифференцирующего звена, ограничение на значение перерегулирования — все эти факторы

затрудняют применение аналитических методов для параметрического синтеза ПИД регулятора, что, в конечном итоге, приводит к использованию численных методов оптимизации. Одним из вариантов реализации итерационных алгоритмов оптимизации линейных регуляторов с ограничением на перерегулирование является применение критериев оптимизации со штрафной функцией [14, 15]. Особенности предлагаемого подхода: штрафная функция не содержит настраиваемых параметров; на этапе оптимизации задействован блок ограничения регулирующего воздействия, который гарантирует отсутствие перерегулирования у итоговых переходных процессов; в пространстве сигналов реализован метод сопряженных градиентов Полака—Поляка—Рибьера беспоисковым способом с применением компактов параметрической чувствительности, которые позволяют сократить объем вычислений, необходимый для моделирования системы. Эффективность применения данного подхода напрямую связана с точностью идентификации коэффициента усиления объекта регулирования.

## Постановка задачи

Структурная схема рассматриваемой автоматической системы регулирования со скалярными координатами представлена на рис. 1.

Процессы в представленной на рис. 1 автоматической системе регулирования можно описать следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t, \mathbf{q}) &= \lambda(t) - x(t); \\ u(t, \mathbf{q}) &= G_c(p, \mathbf{q})\varepsilon(t, \mathbf{q}); \\ x(t) &= G_p(p)u(t, \mathbf{q}), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$  — вектор настраиваемых параметров;  $x(t)$  — выходной сигнал автоматической системы;  $\varepsilon(t, \mathbf{q})$  — ошибка системы;  $\lambda(t) = \text{const}$  — задающее воздействие;  $u(t, \mathbf{q})$  — регулирующее воздействие;  $G_c(p, \mathbf{q}) = q_1 + \frac{q_2}{p} + \frac{pq_3}{(T_f p + 1)}$  — оператор ПИД регулятора;  $T_f$  — параметр реального дифференцирующего звена;  $G_p(p)$  — оператор объекта;  $p$  — оператор дифференцирования по времени.

При аппроксимации динамических характеристик объектов промышленной автоматики часто применяют соединения инерционных звеньев первого порядка и звена запаздывания с постоянными параметрами [16–19]:

$$G_p(p) = \frac{k_{ob}}{(T_{ob1}p + 1) \dots (T_{obn}p + 1)} e^{-\tau_{ob}p}, \quad (2)$$

где  $k_{ob}$  — статический коэффициент усиления;  $T_{ob1}, \dots, T_{obn}$  — постоянные времени;  $\tau_{ob}$  — время запаздывания;  $n$  — порядок объекта. Следует заметить, что выбор такого оператора объекта придает исследованиям необходимую для практики промышленного регулирования универсальность, поскольку он описывает процессы в достаточно широком классе промышленных объектов.

Зависимость значения параметра  $T_f$  от времени дифференцирования  $T_d$  регулятора принята в виде [16]

$$T_f = \frac{T_d}{N}, \quad 5 \leq N \leq 10, \quad (3)$$

где  $N$  — коэффициент связи между постоянными времени  $T_f$  и дифференцирования  $T_d = \frac{q_3}{q_1}$ .

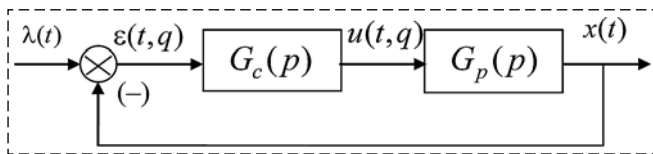


Рис. 1. Структурная схема автоматической системы регулирования

Fig. 1. Block diagram of an automatic control system

Представим оптимизируемый интегральный критерий с использованием штрафной функции  $y(t)$  для учета ограничения на перерегулирование [14]:

$$I = \int_0^{\infty} (\varepsilon(t, \mathbf{q})^2 + y(t)) dt, \quad (4)$$

$$y(t) = \begin{cases} \left( u(t, \mathbf{q}) - \frac{\lambda(t)}{k_{ob}} \right), & \text{при } u(t, \mathbf{q}) > \frac{\lambda(t)}{k_{ob}}; \\ 0, & \text{при } u(t, \mathbf{q}) \leq \frac{\lambda(t)}{k_{ob}}. \end{cases} \quad (4.1)$$

Штрафная функция  $y(t)$  увеличивает значение интегрального квадратичного критерия при выходе регулирующего воздействия  $u(t, \mathbf{q})$  за  $\frac{\lambda(t)}{k_{ob}}$  на значение выброса.

Далее в настоящей работе на этапе оптимизации для реализации критерия (4) в систему (1) вводится ограничение на регулирующее воздействие:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t, \mathbf{q}) &= \lambda(t) - x(t); \\ u(t, \mathbf{q}) &= G_c(p, \mathbf{q})\varepsilon(t, \mathbf{q}); \\ u_l(t) &= \begin{cases} \frac{\lambda(t)}{k_{ob}}, & \text{при } u(t, \mathbf{q}) > \frac{\lambda(t)}{k_{ob}}; \\ u(t, \mathbf{q}), & \text{при } u(t, \mathbf{q}) \leq \frac{\lambda(t)}{k_{ob}}; \end{cases} \\ x(t) &= G_p(p)u_l(t, \mathbf{q}), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $u_l(t, \mathbf{q})$  — регулирующее воздействие с ограничением.

Для критерия (4) характерны следующие зависимости:

$$y(t) \neq 0, \quad \varepsilon(t, \mathbf{q}) = 0; \quad (6)$$

$$\varepsilon(t, \mathbf{q}) \neq 0, \quad y(t) = 0. \quad (7)$$

Формализуем поставленную задачу параметрической оптимизации:

$$\min I(\mathbf{q}^*), \quad \mathbf{q}^* \in Q \subset R^3, \quad \int_0^{\infty} y(t) dt = 0. \quad (8)$$

Реализация критерия (4) требует выполнения следующих условий: объект регулирования обладает самовыравниванием, регулятор содержит интегральную компоненту. Эти условия позволяют выполнить неравенство  $u(t, \mathbf{q}) \leq \frac{\lambda(t)}{k_{ob}}$ , при котором переходный процесс объекта (2) не имеет перерегулирования.

## Алгоритм численной оптимизации

Как было отмечено выше, критерий (4) содержит штрафную функцию  $y(t)$  (4.1), которую

можно интерпретировать как скачки регулирующего воздействия над ограничением, что делает оптимизируемый критерий (4) квадратичным не для всей области  $\mathbf{q}$ . В работе [20] показана ориентированность теории чувствительности на параметрический синтез элементов автоматических систем градиентным методом для ситуации со "скачками" в сигналах. Это определило в настоящей работе выбор градиентного метода оптимизации. Как известно, применение сопряженных градиентов позволяет значительно ускорить сходимость алгоритма оптимизации при соответствующем выборе шага алгоритма  $h$  [21, 22].

В ходе предварительного исследования был сделан выбор в пользу алгоритма Полака—Поляка—Рибьера [21, 22], так как алгоритм Флетчера—Ривза показал неудовлетворительные результаты оптимизации критерия (4). Это можно объяснить тем (см. работу [22]), что шаг градиентной процедуры  $h[l]$  должен стремиться к  $0 \pm \Delta$  при  $l \rightarrow \infty$ :  $h[l]$  в алгоритме Полака—Поляка—Рибьера ограничен областью фиксированного конуса вокруг начального значения градиента критерия оптимизации, в отличие от алгоритма Флетчера—Ривза. Это делает реализацию алгоритма Полака—Поляка—Рибьера численно более устойчивой [22].

Для реализации градиентной процедуры метода Полака—Поляка—Рибьера необходимо вычисление составляющих градиента выбранного критерия оптимизации, которые в настоящей работе вычисляются с помощью функций чувствительности, что позволяет избежать поисковой вариации настраиваемых параметров. Приведем уравнения чувствительности для непрерывной системы (5) при выполнении критерия (4) [18]:

$$\xi_j(t) = G_p(p) \frac{\partial u(t, \mathbf{q})}{\partial q_j}, \quad (j = 1, 2, 3). \quad (9)$$

Отметим, что задействованный алгоритм из работы [14] в уравнении чувствительности (9) не использует ограничение на регулирующее воздействие  $u_i(t, \mathbf{q})$ , что позволяет применить компакты чувствительности в целях уменьшения объема вычислений при моделировании автоматической системы регулирования (5).

Представим выражения для расчета  $\xi_j(t)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) с применением компактов чувствительности [18, 25, 26]:

$$\xi_1(t) = G_p(p)(-G_c(p, \mathbf{q})\xi_1(t) + \varepsilon(t, \mathbf{q})), \quad (10)$$

$$\xi_2(t) = \frac{1}{p} \xi_1(t), \quad \xi_3(t) = \frac{p\xi_1(t)}{(T_f p + 1)}. \quad (11)$$

Далее компакты чувствительности используются в алгоритме, основанном на методе Полака—Поляка—Рибьера, где в процессе оптимизации вектор  $\mathbf{q}$  настраиваемых параметров изменяется в соответствии с выражением [22]

$$\mathbf{q}[l + 1] = \mathbf{q}[l] + h^*[l]\mathbf{s}[l], \quad (l = 0, 1, 2, \dots), \quad (12)$$

где  $h^*$  — шаг спуска градиентного алгоритма, схема вычисления  $h^*$  представлена далее;  $\mathbf{s}[0]$  — начальное направление движения, определяемое по антиградиенту  $-\nabla_{\mathbf{q}} I(\varepsilon(t, \mathbf{q}[0]))$ . Следующие новые направления  $\mathbf{s}[l]$ , сопряженные предыдущему, вычисляются как сумма антиградиента в текущей точке  $-\nabla_{\mathbf{q}} I(\varepsilon(t, \mathbf{q}[l]))$  и произведения направления в предыдущей точке  $\mathbf{s}[l - 1]$  и параметра  $\beta[l - 1]$ :

$$h^*[l] = \arg \min_h I(\varepsilon(t, \mathbf{q}[l]) + h\mathbf{s}[l]); \quad (13)$$

$$\mathbf{s}[l] = -\nabla_{\mathbf{q}} I(\varepsilon(t, \mathbf{q}[l])) + \beta[l - 1]\mathbf{s}[l - 1]; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \beta[l - 1] = \\ = \frac{\nabla_{\mathbf{q}}^T I(\varepsilon(t, \mathbf{q}[l]))(\nabla_{\mathbf{q}} I(\varepsilon(t, \mathbf{q}[l])) - \nabla_{\mathbf{q}} I(\varepsilon(t, \mathbf{q}[l - 1])))}{\nabla_{\mathbf{q}}^T I(\varepsilon(t, \mathbf{q}[l - 1]))\nabla_{\mathbf{q}} I(\varepsilon(t, \mathbf{q}[l - 1]))}, \quad (15) \\ l = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где  $\nabla_{\mathbf{q}}^T I(\varepsilon(t, \mathbf{q}[l]))(\nabla_{\mathbf{q}} I(\varepsilon(t, \mathbf{q}[l])) - \nabla_{\mathbf{q}} I(\varepsilon(t, \mathbf{q}[l - 1])))$  — скалярное произведение двух векторов. Отметим, что алгоритм Полака—Поляка—Рибьера автоматически осуществляет рестарты в случаях "зацикливания" в отличие от алгоритма Флетчера—Ривза. Обозначенный рестарт реализуется в выражении (15) при равенстве антиградиентов критерия оптимизации в двух соседних итерациях алгоритма (12).

Представим выражение для определения градиента  $\nabla_{\mathbf{q}} I(\varepsilon(t, \mathbf{q}))$ , связанного с вычислением вектора функций чувствительности (9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial q_i} = \int_0^{\infty} \left( -2\varepsilon(t, \mathbf{q})\xi_i(t) + \frac{\partial y(t)}{\partial q_i} \right) dt, \quad (i = 1, 2, 3); \\ \frac{\partial y(t)}{\partial q_i} = \begin{cases} \frac{\partial u(t, \mathbf{q})}{\partial q_i}, & \text{при } u(t, \mathbf{q}) > \frac{\lambda(t)}{k_{ob}}; \\ 0, & \text{при } u(t, \mathbf{q}) \leq \frac{\lambda(t)}{k_{ob}}. \end{cases} \quad (16) \end{aligned}$$

Формула (12) показывает, что в предлагаемом алгоритме для назначения шага оптимизации  $h^*[l]$  ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ) необходимо в точках  $\mathbf{q}[l]$  ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ) осуществлять одномерную минимизацию функционала (4) в ситуации, когда векторы  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{s}$  определены на шаге алгоритма  $l$ , а  $h$  — ва-

рируемая переменная, значение которой необходимо определить. Для этого, в частности, можно воспользоваться методом релаксации [21]:

$$h[k] = h[k-1] - \eta[k-1] \text{sign} \frac{\partial I(\mathbf{q}(h[k-1]))}{\partial h}, \quad (17)$$

$$k = 1, 2, \dots,$$

где  $h[k]$  — значение искомого параметра  $h$  на  $k$ -м шаге работы алгоритма метода релаксации;  $\eta[k-1]$  —  $(k-1)$ -й шаг изменения  $h$ , который может изменяться по той или иной стратегии;  $\text{sign}(\cdot)$  — функция знака. Остановимся на одной из простейших стратегий выбора длины шага  $\eta[k]$  ( $k = 1, 2, \dots$ ):

$$\eta[k] = \begin{cases} \eta[k-1], & I[k] \leq I[k-1]; \\ 0, 5\eta[k-1], & I[k] > I[k-1]. \end{cases} \quad (18)$$

При этом в ходе предварительного численно-эксперимента определены начальные данные для следующих величин:  $\eta[0] = 10^{-6}$ ,  $h[0] = 0$ .

По аналогии с (16) определяется выражение для частной производной  $\frac{\partial I(\mathbf{q}(h))}{\partial h}$ :

$$\frac{\partial I(\mathbf{q}(h))}{\partial h} = \int_0^{\infty} \left( -2\varepsilon(t, \mathbf{q}) \xi_h(t) + \frac{\partial y(t)}{\partial h} \right) dt; \quad (19)$$

$$\frac{\partial y(t)}{\partial h} = \begin{cases} \frac{\partial u(t, \mathbf{q})}{\partial h}, & \text{при } u(t, \mathbf{q}) > \frac{\lambda(t)}{k_{ob}}; \\ 0, & \text{при } u(t, \mathbf{q}) \leq \frac{\lambda(t)}{k_{ob}}, \end{cases}$$

где  $\xi_h(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial h}$  — функция чувствительности аналогично (9).  $\xi_h(t)$  представляет собой выходную координату модели объекта (2) с входной координатой  $\frac{\partial u(t, \mathbf{q})}{\partial h}$ :

$$\frac{\partial u(t, \mathbf{q})}{\partial h} = -G_c(p, \mathbf{q} + hs) \xi_h(t) + \left( s_1 + \frac{s_2}{p} + \frac{ps_3}{(T_f p + 1)} \right) \varepsilon(t, \mathbf{q}). \quad (20)$$

Для формирования условия останова алгоритма (17) используется подход из работы [25], опробованный в практике параметрического синтеза регуляторов различной природы при использовании теории чувствительности автоматических систем:

$$S_I[k] = S_I[k-1] + \begin{cases} 1, & \Delta I[k] \times \Delta I[k-1] < 0; \\ 0, & \Delta I[k] \times \Delta I[k-1] > 0. \end{cases} \quad (21)$$

$$S_{\partial I_h}[k] = S_{\partial I_h}[k-1] + \begin{cases} 1, & \frac{\partial I}{\partial q}[k] \times \frac{\partial I}{\partial q}[k-1] < 0; \\ 0, & \frac{\partial I}{\partial q}[k] \times \frac{\partial I}{\partial q}[k-1] > 0. \end{cases} \quad (22)$$

Здесь  $k = 1, 2, \dots$  и  $\Delta I[k] = I[k] - I[k-1]$  — разность между значениями критерия оптимальности на  $k$ -й и  $(k-1)$ -й итерациях алгоритма (17).

Алгоритм одномерной оптимизации по нахождению оптимального значения шага  $h^*[l]$  считается завершенным при выполнении условия:

$$(S_I[k] \geq n_I) \vee (S_{\partial I_h}[k] \geq n_{\partial I_h}), \quad (23)$$

где  $n_I, n_{\partial I_h}$  — заданные положительные значения, характеризующие число соответствующих смен знака приращений критерия оптимальности и знака частной производной  $\frac{\partial I}{\partial h}$ .

Для алгоритма нахождения значений настраиваемых параметров регулятора (12) критерий останова задается аналогичным условием (23) образом.

В результате работы алгоритма (12) получен вектор настраиваемых параметров  $\mathbf{q}^*$  и далее выполняется алгоритм вычисления параметра реального дифференцирующего звена  $T_f$  ПИД регулятора. В работе [16] представлен алгоритм нахождения  $T_f$ , где на каждой итерации вычисляются параметры идеализированного ПИД регулятора при увеличении инерционности объекта регулирования за счет параметра  $T_f$  с дальнейшим пересчетом в параметры реального ПИД регулятора, пока коэффициент  $N$  не примет заданное значение. Для сходимости данного алгоритма при необходимости корректируется значение параметра  $T_f$ . Исходя из этого алгоритма можно выделить два подхода в определении настраиваемых параметров ПИД регулятора с реальным дифференцирующим звеном: в первом подходе вычисляются параметры идеализированного регулятора и дальше вычисляется параметр  $T_f$  реального дифференцирующего звена [16, 26]; во втором подходе задается параметр  $T_f$ , и вычисляются параметры регулятора [17, 27, 28]. С учетом специфики критерия (4) в данной работе сформирован алгоритм на основе первого подхода, в котором итерационно происходит увеличение значения параметра  $T_f$  с пересчетом параметра  $q_3^*$  с заданным коэффициентом  $N$ , пока в системе (1) отсутствует перерегулирование:

$$\begin{aligned} & \text{while } (\sigma = 0) \text{ do} \\ & T_f[l] = T_f[l-1] + \Delta T_f; \\ & q_3^*[l] = T_f[l] q_1^* N; \\ & l = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (24)$$

где  $\sigma$  — коэффициент перерегулирования переходного процесса  $x(t)$  в автоматической системе (1);  $l$  — номер шага алгоритма (24);  $\Delta T_f$  — величина, на которую изменяется параметр  $T_f$ , ее предлагается выбирать относительно значения  $T_f[0] = \frac{q_3^*[0]}{q_1^*[0]N}$ , например, в процентном отношении.

### Компьютерная апробация алгоритма оптимизации

Поскольку сформированный в настоящей работе алгоритм (12) предназначен для использования в промышленных системах, необходимо провести исследование его работоспособности, заключающееся в проверке достоверности вычисленных значений настраиваемых параметров  $\mathbf{q}^*$  с точки зрения нахождения экстремума критерия (4). Алгоритм вычисления параметра реального дифференцирующего звена  $T_f$  (24) не имеет смысла проверять относительно минимизации критерия (4), так как увеличение параметра реального дифференцирующего звена  $T_f$  естественно приводит к изменению интегрального квадратичного критерия в большую сторону [16].

Наличие в критерии (4) штрафной функции  $u(t)$  (4.1) препятствует получению экстремума критерия  $I$  [4], учитывая, что при использовании ПИД регулятора переходный процесс для такого значения может иметь затухающую колебательную форму [16], а в настоящей работе рассматриваются автоматические системы с отсутствием перерегулирования.

Определим вычислительную процедуру для проверки сходимости алгоритма (12) при наличии ограничения на регулирующее воздействие (5).

Рассмотрим эту вычислительную процедуру подробнее.

Сходимость сформированного алгоритма (12) проверяется с помощью вычислительной процедуры на основе зоны притяжения рекордных значений критерия оптимизации.

При запуске алгоритма (12) при различных начальных значениях вектора настраиваемых параметров  $\mathbf{q}_k^{(0)} = (q_{1k}^{(0)}, q_{2k}^{(0)}, q_{3k}^{(0)})$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) соответствующие итоговые значения в точке  $\mathbf{q}_k^* = (q_{1k}^*, q_{2k}^*, q_{3k}^*)$ , вычисленные алгоритмом АПО (12), должны удовлетворять следующим условиям:

$$I(\mathbf{q}_k^*) < I(\mathbf{q}_k^{(0)}), k = 1, 2, \dots, \quad (25)$$

$$\Delta_i > 0, i = 1, 2, 3, \quad (26)$$

где  $\Delta_i$  — угловые миноры матрицы Гессе  $H(I_m(\mathbf{q}_k^*))$  (критерий Сильвестра) интегрально-го квадратичного критерия  $I_m$  следующего вида:

$$I_m = \int_0^\infty (\varepsilon(t, \bar{\mathbf{q}}^*) - \varepsilon(t, \mathbf{q}^*))^2 dt, \quad (27)$$

где  $\bar{\mathbf{q}}^* = \frac{\mathbf{q}_1^* + \dots + \mathbf{q}_n^*}{n}$ ;  $n$  — число запусков алгоритма (12).

Рекордными значениями критерия оптимизации  $I$  объявляются те минимальные значения, которые найдены в каждом  $k$ -м запуске алгоритма, а зона притяжения этих рекордных значений определяется положительно определенной матрицей Гессе критерия  $I_m$ . Согласно выражению (27) критерий  $I_m$  характеризует разность усредненного (по ансамблю реализаций) переходного процесса и проверяемого переходного процесса, т. е. условие (26) базируется на матрице вида

$$H(I_m(\mathbf{q}^*)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 I_m}{\partial^2 q_1} & \frac{\partial^2 I_m}{\partial q_1 \partial q_2} & \frac{\partial^2 I_m}{\partial q_1 \partial q_3} \\ \frac{\partial^2 I_m}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 I_m}{\partial^2 q_2} & \frac{\partial^2 I_m}{\partial q_2 \partial q_3} \\ \frac{\partial^2 I_m}{\partial q_3 \partial q_1} & \frac{\partial^2 I_m}{\partial q_3 \partial q_2} & \frac{\partial^2 I_m}{\partial^2 q_3} \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 I_m}{\partial q_i \partial q_j} = 2 \int_0^\infty (\xi_i(t)\xi_j(t) - \varepsilon_m(t)\xi_{ij}(t)) dt, \quad (29)$$

$$i, j = 1, 2, 3,$$

где  $\varepsilon_m(t) = \varepsilon(t, \bar{\mathbf{q}}^*) - \varepsilon(t, \mathbf{q}^*)$ ;  $\xi_{ij}(t)$  — матрица функций чувствительности второго порядка. Применим компакты чувствительности для сокращения объема вычислений матрицы функций чувствительности второго порядка  $\xi_{ij}(t)$ :

$$\xi_{ij}(t) = \begin{bmatrix} \xi_{11}(t) & \frac{\xi_{11}(t)}{p} & \frac{p\xi_{11}(t)}{T_f p + 1} \\ \frac{\xi_{11}(t)}{p} & \frac{\xi_{11}(t)}{p^2} & \frac{\xi_{11}(t)}{T_f p + 1} \\ \frac{p\xi_{11}(t)}{T_f p + 1} & \frac{\xi_{11}(t)}{T_f p + 1} & \frac{p^2 \xi_{11}(t)}{(T_f p + 1)^2} \end{bmatrix}, \quad (30)$$

$$(i, j = 1, 2, 3),$$

$$\xi_{11}(t) = G_p(p) \frac{\partial^2 u(t, \mathbf{q})}{\partial^2 q_1},$$

$$\frac{\partial^2 u(t, \mathbf{q})}{\partial^2 q_1} = -G_c(p, \mathbf{q})\xi_{11}(t) - 2\xi_1(t).$$

## Результаты исследования

Для апробации работы алгоритма (12) при единичном задающем воздействии  $\lambda(t) = 1(t)$  взяты следующие значения параметров оператора объекта (2), которые приняты в качестве базовых с выполнением условия большого запаздывания  $\tau_{ob}/T_{max} \geq 1$ :

$$n = 2, T_{ob1} = 10, T_{ob2} = 50, k_{ob} = 1, \tau_{ob} = 50. (31)$$

Перед началом запуска алгоритма (12) необходимо указать стартовое значение вектора  $\mathbf{q}$ . В настоящей работе для определения стартовых точек алгоритма (12) использовалось построение ПИД регулятора на основе регулятора с внутренней моделью при  $T_f = 0$ , так как данный параметр рассчитывается по алгоритму (24). Согласно работе [11] для объекта с параметрами (31) стартовое значение вектора  $\mathbf{q}$  имеет следующий вид:

$$q_1[0] = \frac{T_{ob1} + T_{ob2}}{k_{ob}(2\chi + \tau_{ob})}, \quad q_2[0] = \frac{1}{k_{ob}(2\chi + \tau_{ob})}, \quad (32)$$

$$q_3[0] = \frac{T_{ob1} + T_{ob2}}{k_{ob}(2\chi + \tau_{ob})} \left( \frac{T_{ob1}T_{ob2}}{T_{ob1} + T_{ob2}} \right),$$

где  $\chi$  — параметр, принимающий значения в диапазоне от 0 до  $+\infty$ , с помощью которого можно получить множество стартовых значений алгоритма оптимизации (12).

Рис. 2, б демонстрирует тот факт, что сформированный алгоритм (12) для автоматической системы (1) обеспечивает вычисление  $\mathbf{q}_k^*$  ( $k = 1, 2, 3$ ) для стартовых переходных процессов при различных  $\mathbf{q}_k^{(0)}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) и  $T_f = 0$ .

Для автоматической системы (1) и объекта (2), (32) согласно данным из табл. 1, 2, содержащим результаты численного эксперимента, получены векторы настраиваемых параметров  $\mathbf{q}_k^*$  ( $k = 1, 2, 3$ ), при которых выполняются условия (25), (26), что является в настоящей работе подтверждением работоспособности алгоритма (12).

В алгоритме (24) задается  $N = 5$ , что позволяет получить максимальное значение  $T_f$ . Табл. 3 представляет результаты работы алгоритма вычисления параметра реального дифференцирующего звена  $T_{fk}^*$  (24) для векторов  $\mathbf{q}_k^*$  ( $k = 1, 2, 3$ ), полученных после выполнения алгоритма (12).

Данные табл. 3 и рис. 3 подтверждают утверждение работы [16], что увеличение пара-

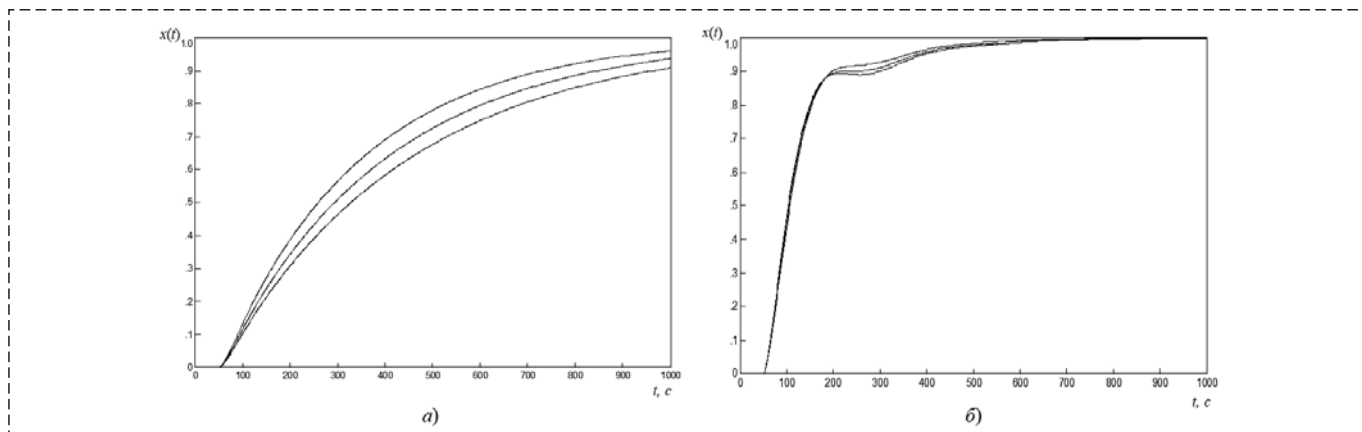


Рис. 2. Графики переходных процессов в автоматической системе (1):

а — при стартовых настраиваемых параметрах, определенных выражениями (32); б — при найденных настраиваемых параметрах алгоритмом на основе метода сопряженных градиентов Полака—Поляка—Рибьера (12)

Fig. 2. Graphs of transients in an automatic system (1):

а — with the initial configurable parameters defined by expressions (32); б — when the tunable parameters are found by an algorithm based on the method of conjugate Polak—Polyak—Ribier gradients (12)

Таблица 1  
Table 1

### Результаты работы алгоритма оптимизации на основе метода сопряженных градиентов Полака—Поляка—Рибьера (12)

#### Results of the optimization algorithm based on the method of conjugate gradients of Polak—Polyak—Ribier (12)

$k$	$\chi$	$q_1^{(0)}$	$q_2^{(0)}$	$q_3^{(0)}$	$q_1^*$	$q_2^*$	$q_3^*$	$T_f$	$I^{(0)}$	$I^*$
1	150	0,17143	0,00286	1,42857	0,65964	0,00730	1,42967	0	200,9	92,2
2	175	0,15000	0,00250	1,25000	0,61974	0,00746	1,25105		221,7	93,2
3	200	0,13333	0,00222	1,11111	0,68766	0,00720	1,11235		241,1	91,6

Таблица 2  
Table 2

Матрица Гессе  $H$  для критерия (29)  
Hesse matrix  $H$  for criterion (29)

$k$	$H(I_m(\mathbf{q}^*))$	Угловые миноры матрицы $H(I_m(\mathbf{q}^*))$		
		$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$
1	88,7; 31,8; -0,00668 31,4; 1439495,8; -176,9 -0,00668; -177,0; 0,13059	88,7	127729424,8	1390151,7
2	94,7; -218,0; 0,1028 -218,4; 1392010,7; -185,8 0,1028; -186,7; 0,13355	94,7	131825832,5	14312913,0
3	86,0; 169,8; -0,07625 169,4; 1476391,8; -175,7 -0,07625; -174,9; 0,13277	86,0	126978388,0	14211408,5

Таблица 3  
Table 3

Результаты работы алгоритма вычисления параметра реального дифференцирующего звена  $T_f^*$  (24)  
Results of the algorithm for calculating the parameter of the real differentiating link  $T_f^*$  (24)

$k$	$q_1^*$	$q_2^*$	$q_3^*$	$N$	Алгоритм (12)		Алгоритм (24)	
					$I^*$	$T_f$	$I^*$	$T_f^*$
1	0,65964	0,00730	26,71542	5	92,2	0	95,7	8,1
2	0,61974	0,00746	26,33895		93,2		96,8	8,5
3	0,68766	0,00720	28,19394		91,6		95,2	8,2

метра реального дифференцирующего звена  $T_f$  ведет к увеличению интегрального квадратичного критерия.

Как отмечено ранее, при наличии ограничения в критерии (4), продиктованного практикой автоматизации на производстве, необходи-

мое и достаточное условие экстремума данного критерия не выполняется, и появляется неоднозначная задача в проверке работоспособности алгоритма оптимизации (12). Этот факт заставляет обращаться к условиям (25), (26), которые позволяют подтвердить работоспособность алгоритма параметрической оптимизации ПИД регулятора по интегральному критерию (4) со штрафной функцией (4.1) для выбранных стартовых значений векторов  $\mathbf{q}_k^{(0)}$  ( $k = 1, 2, 3$ ).

### Заключение

В настоящей работе с помощью сформированного алгоритма на основе метода сопряженных градиентов Полака—Поляка—Рибьера (12) и алгоритма вычисления  $T_f$  (24) решена задача параметрического синтеза ПИД регулятора с реальным дифференцирующим звеном в условиях ограничения на перерегулирование для объекта с большим запаздыванием при использовании интегрального квадратичного критерия качества. Преимущество рассматриваемого интегрального критерия со штрафной функцией (4.1), в сравнении с интегральным критерием, включающим производные различного порядка  $\varepsilon(t, \mathbf{q})$ , состоит в том, что не требуется разбивать критерий на составные части и отдельно по ним выполнять оптимизацию. Для проверки работоспособности сформированного алгоритма АПО (12) привлекается один из вариантов реализации вычислительной процедуры, которая строится на основе зоны притяжения рекордных значений критерия оптимизации (4). Границы этой зоны определяются положительно определенной матрицей Гессе критерия (27).

При параметрическом синтезе ПИД регулятора с реальным дифференцирующим звеном можно выделить следующие этапы: вычисление значений настраиваемых параметров  $\mathbf{q}^*$  при  $T_f = 0$ ; вычисление значений настраиваемых параметров  $\mathbf{q}^*$  при  $T_f \neq 0$ . Указанные этапы могут реализовываться в различных по принципам действия алгоритмах, и важную роль в формировании алгоритма вычисления параметра реального дифференцирующего звена играет выбор критерия оптимизации, так как использование такого звена априори ухудшает качество работы регулятора в заданной автоматической системе.

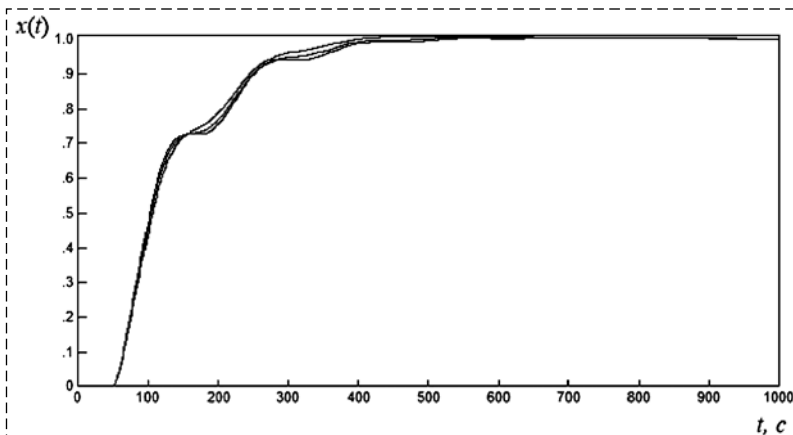


Рис. 3. Графики переходных процессов в автоматической системе (1) после выполнения алгоритма (24) вычисления параметров реального дифференцирующего звена  $T_{fk}^*$  ( $k = 1, 2, 3$ )

Fig. 3. Graphs of transients in the automatic system (1) after executing the algorithm (24) for calculating the parameters of the real differentiating link  $T_{fk}^*$  ( $k = 1, 2, 3$ )

## Список литературы

1. Бойченко В. А., Курдюков А. П., Тимин В. Н., Ядыкин И. Б. Некоторые методы синтеза регуляторов пониженного порядка и заданной структуры // Управление большими системами. 2007. № 19. С. 23–126.
2. Грязина Е. Н., Поляк Б. Т., Тремба А. А. Синтез регуляторов низкого порядка по критерию  $H_\infty$ : параметрический подход // Автоматика и телемеханика. 2007. № 3. С. 94–105.
3. Федотов И. А. Синтез ПИД-регуляторов на основе методов пространства состояний и техники линейных матричных неравенств // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2014. № 4-1. С. 445–455.
4. Поляк Б. Т., Хлебников М. В. Новые критерии настройки ПИД-регуляторов // Автоматика и телемеханика. 2022. № 11. С. 62–82.
5. Александров В. А. Оптимизация размещения полюсов в одномерной системе управления // Автоматика и телемеханика. 2021. № 6. С. 102–123.
6. Аязян Г. К., Таушева Е. В. О некоторых ограничениях при параметрическом синтезе ПИД-регуляторов // Вестник Астраханского государственного технического университета. 2020. № 2. С. 7–18.
7. Жмудь В. А., Востриков А. С., Ивойлов А. Ю., Саблина Г. В. Синтез робастных ПИД-регуляторов методом двойной оптимизации // Мехатроника, автоматизация, управление. 2013. № 21(2). С. 67–74.
8. Цавнин А. В., Ефимов С. В., Замятин С. В. Корневой подход к синтезу параметров ПИД-регулятора, гарантирующий отсутствие перерегулирования в переходной характеристике системы управления // Доклады ТУСУР. 2019. Т. 22, № 2. С. 77–82.
9. Опейко О. Ф. Робастный синтез дискретных ПИД регуляторов для объектов с интервальными параметрами // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. № 19(6). С. 374–379.
10. Саблина Г. В., Маркова В. А. Настройка параметров ПИД-регулятора в системе с объектом второго порядка с запаздыванием // Автоматика. 2022. № 4. С. 110–117.
11. Кулаков Г. Т. и др. Теория автоматического управления теплоэнергетическими процессами: учеб. пособие. Минск: Вышэйшая школа, 2017. 238 с.
12. Денисенко В. В. Компьютерное управление технологическим процессом, экспериментом, оборудованием. М.: Горячая линия — Телеком, 2009. 608 с.
13. Гурецкий Х. Анализ и синтез систем управления с запаздыванием / Пер. с польского. М.: Машиностроение, 1974. 328 с.
14. Широков Л. А., Широкова О. Л. Автоматическая параметрическая оптимизация систем регулирования с ограничениями на управляющие координаты // Машиностроение и инженерное образование. 2015. № 1. С. 52–60.
15. Жмудь В. А., Ядрышников О. Д. Численная оптимизация ПИД-регуляторов с использованием детектора правильности движения в целевой функции // Автоматика и программная инженерия. 2013. № 1 (3). С. 24–29.
16. Ротач В. Я. Теория автоматического управления. М.: Издательство МЭИ, 2004. 400 с.
17. Åström K. J., Hägglund T. The future of PID control // Control Engineering Practice. 2001. Vol. 9, Iss. 11. P. 1163–1175.
18. Костюк В. И., Широков Л. А. Автоматическая параметрическая оптимизация систем регулирования. М.: Энергоиздат, 1981. 96 с.
19. Космодамианский А. С. Автоматическое регулирование температуры обмоток тяговых электрических машин локомотивов. М.: Маршрут, 2005. 256 с.
20. Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М. Чувствительность систем управления. М.: Наука, 1981. 464 с.
21. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.
22. Полак Э. Численные методы оптимизации: единый подход / Пер. с англ. Ф. И. Ерешко; Под ред. И. А. Вателя. М.: Мир, 1974. 376 с.
23. Широков Л. А. Компактные анализаторы чувствительности высших порядков линейных динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1990. № 1. С. 19–29.
24. Широков Л. А. Синтез компактов чувствительности для автоматизации параметрического проектирования линейных систем регулирования // Машиностроение и инженерное образование. 2008. № 3. С. 22–29.
25. Куцый Н. Н. Автоматическая параметрическая оптимизация дискретных систем регулирования: дис. ... д-ра техн. наук: 05.13.07. Москва, 1997. 382 с.
26. Куликов В. В., Куцый Н. Н., Осипова Е. А. Градиентный алгоритм параметрической оптимизации ПИД-регулятора при использовании фильтра // Тезисы XXII Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. Новосибирск: ФИЦ ИВТ, 2021. С. 42–43.
27. Boyd S., Hast M., Astrom K. MIMO PID tuning via iterated LMI restriction // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2016. Vol. 26. P. 1718–1731.
28. Аязян Г. К., Таушева Е. В. Параметрический синтез ПИД-регуляторов с реальным дифференциатором // Математические методы в технике и технологиях. 2020. № 3. С. 16–19.

## Parametric Optimization of the PID Controller with Restriction Based on the Method of Conjugate Polak—Polyak—Ribier Gradients

V. V. Kulikov, godefire@mail.ru, N. N. Kutsyi, kucyinn@mail.ru, E. A. Osipova, osipovaelizaveta@yandex.ru, Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, 664074, Russian Federation

Corresponding author: Kulikov V. V., Postgraduate Student, Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, 664074, Russian Federation, e-mail: godefire@mail.ru

Accepted on November 20, 2022

### Abstract

In automatic control systems (ASR), industrial processes of various types with a delay with a limit on the amount of over-regulation, a PID controller with a real differentiating link (hereinafter referred to as the PID controller) is widely used. As is known, a sign of the presence of a large delay in the object of regulation is the ratio  $\tau_{ob}/T_{ob} \geq 1$ , where  $\tau_{ob}$  is the value of the delay time and  $T_{ob}$  is maximum time constant of the object of control. In the presence of a large delay and limitation in the ASR, the parametric synthesis of the PID controller by well-known frequency methods becomes difficult, which leads to interest in the development of numerical searchless algorithms for parametric optimization based on the use of sensitivity functions to determine the gradient of the optimality criterion. In this paper, an APO algorithm is formed that calculates, based on the minimum of the integral quadratic criterion, the values of the adjustable parameters of the PID controller in the specified ASR. In order to ensure that there is no re-regulation of the resulting transient process, the authors of this article propose to introduce a restriction on the regulatory effect into the automatic system at the optimization stage, which, in turn, is taken

into account by adding a penalty function to the integral criterion. The proposed algorithm is based on the method of conjugate Polak—Polyak—Ribier gradients with its known advantages. The components of the gradient vector of the optimization criterion are calculated using such sensitivity functions that allow you to obtain all the components of this vector without trial search variations of the configurable parameters. To calculate the value of the optimization step, the authors implemented an appropriate algorithm based on a gradient procedure using the sensitivity function of the output coordinate of the ASR to the step value. The convergence of the generated APO algorithm was verified using a numerical procedure based on the zone of attraction of record values of the optimization criterion, which is determined by a positive-definite Hesse matrix of the integral quadratic criterion based on the difference between the averaged and the tested transients.

**Keywords:** PID controller, delay, parametric sensitivity, conjugate gradients, penalty function

For citation:

**Kulikov V. V., Kutsyi N. N., Osipova E. A.** Parametric Optimization of the PID Controller with Restriction Based on the Method of Conjugate Polak—Polyak—Ribier Gradients, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2023, vol. 24, no. 5, pp. 240—248.

DOI: 10.17587/mau.24.240-248

## References

1. **Bojchenko V. A., Kurdyukov A. P., Timin V. N., Yadykin I. B.** Some methods of synthesis of regulators of a reduced order and a given structure, *Upravlenie bol'shimi sistemami*, 2007, no. 19, pp. 23—126 (in Russian).
2. **Gryazina E. N., Polyak B. T., Tremba A. A.** Synthesis of low-order regulators according to the  $H_\infty$  criterion: parametric approach, *Avtomatika i Telemekhanika*, 2007, no. 3, pp. 94—105 (in Russian).
3. **Fedotov I. A.** Synthesis of PID controllers based on state space methods and linear matrix inequalities techniques, *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N. I. Lobachevskogo*, 2014, no. 4-1, pp. 445—455 (in Russian).
4. **Polyak B. T., Hlebnikov M. V.** New criteria for setting up PID controllers, *Avtomatika i Telemekhanika*, 2022, no. 11, pp. 62—82 (in Russian).
5. **Aleksandrov V. A.** Optimization of pole placement in a one-dimensional control system, *Avtomatika i Telemekhanika*, 2021, no. 6, pp. 102—123 (in Russian).
6. **Ayazyan G. K., Tausheva E. V.** On some limitations in the parametric synthesis of PID regulators, *Vestnik Astrahanckogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2020, no. 2, pp. 7—18 (in Russian).
7. **Zhmud' V. A., Vostrikov A. S., Ivojlav A. Yu., Sablina G. V.** Synthesis of robust PID controllers by the double optimization method, *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2013, no. 21(2), pp. 67—74 (in Russian).
8. **Cavnin A. V., Efimov S. V., Zamyatin S. V.** A root approach to the synthesis of PID controller parameters, which guarantees the absence of overshoot in the transient characteristic of the control system, *Doklady TUSUR*, 2019, no. 22(2), pp. 77—82 (in Russian).
9. **Opejko O. F.** Robust synthesis of discrete PID controllers for objects with interval parameters, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, no. 19(6), pp. 374—379 (in Russian).
10. **Sablina G. V., Markova V. A.** Setting the parameters of the PID controller in a system with a second-order object with a delay, *Avtometriya*, 2022, no. 4, pp. 110—117 (in Russian).
11. **Kulakov G. T., Kulakov A. T., Kravchenko V. V., Kukharenko A. N., Artemenko K. I., Kovrigo Y. M., Golenko I. M., Bagan T. G., Bunker A. S.** Theory of automatic control of thermal power processes: textbook. stipend, Minsk, Higher School, 2017, 238 p. (in Russian).
12. **Denisenko V. V.** Computer control of technological process, experiment, equipment, Moscow, Hotline — Telecom, 2009, 608 p. (in Russian).
13. **Guretsky H.** Analysis and synthesis of control systems with delay / trans. from Polish, Moscow, Mashinostroenie, 1974, 328 p. (in Russian).
14. **Shirokov L. A., Shirokova O. L.** Automatic parametric optimization of control systems with restrictions on control coordinates, *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie*, 2015, no. 1, pp. 52—60 (in Russian).
15. **Zhmud' V. A., Yadryshnikov O. D.** Numerical optimization of PID controllers using a motion correctness detector in the objective function, *Avtomatika i programmaya inzheneriya*, 2013, no. 1(3), pp. 24—29 (in Russian).
16. **Rotach V. Ya.** Theory of automatic control, Moscow, Publishing House of MEI, 2004, 400 p. (in Russian).
17. **Åström K. J., Hägglund T.** The future of PID control, *Control Engineering Practice*, 2001, vol. 9, iss. 11, pp. 1163—1175.
18. **Kostyuk V. I., Shirokov L. A.** Automatic parametric optimization of control systems, Moscow, Energoizdat, 1981, 96 p. (in Russian).
19. **Kosmodamiansky A. S.** Automatic temperature control of windings of traction electric machines of locomotives, Moscow, Route, 2005, 256 p. (in Russian).
20. **Rosenwasser E. N., Yusupov R. M.** Sensitivity of control systems, Moscow, Nauka, 1981, 464 p. (in Russian).
21. **Polyak B. T.** Introduction to optimization, Moscow, Nauka, 1983, 384 p. (in Russian).
22. **Polak E.** Numerical optimization methods: a unified approach / trans. from English, Moscow, Mir, 1974, 376 p. (in Russian).
23. **Shirokov L. A.** Compact sensitivity analyzers of higher orders of linear dynamical systems, *Avtomatika i Telemekhanika*, 1990, no. 1, pp. 19—29 (in Russian).
24. **Shirokov L. A.** Synthesis of sensitivity compacts for automation of parametric design of linear control systems, *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie*, 2008, no. 3, pp. 22—29 (in Russian).
25. **Kutsyi N. N.** Automatic parametric optimization of discrete control systems: dis. ... Doctor of Technical Sciences: 05.13.07, Moscow, 1997, 382 p. (in Russian).
26. **Kulikov V. V., Kucyj N. N., Osipova E. A.** Gradient algorithm for parametric optimization of the PID controller when using a filter, *Tezisy XXII Vserossijskoj konferencii molodyh uchyonih po matematicheskomu modelirovaniyu i informacionnym tekhnologiyam*, Novosibirsk, FIC IVT, 2021, pp. 42—43, Moscow, 2021, pp. 42—43 (in Russian).
27. **Boyd S., Hast M., Astrom K.** MIMO PID tuning via iterated LMI restriction, *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 2016, vol. 26, pp. 1718—1731.
28. **Ayazyan G. K., Tausheva E. V.** Parametric synthesis of PID controllers with a real differentiator, *Matematicheskie metody v tekhnike i tekhnologiyah*, 2020, no. 3, pp. 16—19 (in Russian).