

В. И. Краснощеченко, канд. техн. наук, доц., v.krasnoschchenko@yandex.ru,
Калужский филиал Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана

Синтез динамических регуляторов по выходу с использованием функций модальной кластеризации в D -областях

Рассматривается алгоритм синтеза динамических регуляторов по выходу (модальных регуляторов), где моды замкнутой системы управления должны располагаться в заданной области (D -области) комплексной плоскости. Основное направление исследования — синтезировать динамические регуляторы минимального порядка, когда полная модальная управляемость по выходу отсутствует. Делается краткий экскурс во внешнюю алгебру Грассманна с целью определить внешнее произведение векторов, на основании чего поясняется операция биальтернированного произведения матриц. Использование биальтернированного произведения матриц позволило ввести функции модальной кластеризации комплексных мод, располагаемых в отдельных трансформируемых D -областях. Для обычного произведения матриц вводятся функции модальной кластеризации вещественных мод, располагаемых в отдельных трансформируемых D -областях. Функции модальной кластеризации преобразуют (трансформируют), соответственно, комплексные или вещественные точки данной ограниченной или неограниченной D -области комплексной плоскости (диск, конус, степень устойчивости), представлены их матричные функции и функции модальной кластеризации вещественных и комплексных мод. Разработан алгоритм параметрической оптимизации динамических модальных регуляторов по D -областям. Рассмотрены практические примеры синтеза. Для объекта четвертого порядка (двухмассовая слабо демпфированная система с двумя интеграторами и параметрической неопределенностью) синтезирован динамический регулятор второго порядка, обеспечивающий робастное качество.

Ключевые слова: биальтернированное произведение матриц, динамический модальный регулятор по выходу, функции модальной кластеризации, D -области, параметрическая оптимизация

Введение

Задача синтеза модальных регуляторов относится к классическому типу задач теории и практики автоматического управления и достаточно хорошо разработана [1]. На начальном этапе в основном синтезировались статические модальные регуляторы полного порядка, в том числе с применением наблюдателей [2]. В таких задачах основным фактором для возможности решения являлась полная (модальная) управляемость и наблюдаемость (для синтеза по выходу). При этом рассматривались задачи *точечной* модальной управляемости по вектору состояния, т. е. конечной целью было размещение полюсов замкнутой системы в заданных точках комплексной плоскости. Задача синтеза (точечных) модальных регуляторов непосредственно по выходу требует выполнения дополнительных условий. А именно, для объекта управления

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t),\end{aligned}\quad (1)$$

где $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in R^{n \times m}$, $\mathbf{u} \in R^m$, $\mathbf{y} \in R^p$, $\mathbf{C} \in R^{p \times n}$ в работе Виллемса и Хесселинка [3] представлен модальный синтез универсального порядка по выходу. Здесь под универсальностью (genericity) понимается возможность размещения полюсов в заданных точках для всех матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , и почти для всех выбранных мод существует *динамический регулятор* q -го порядка, который обеспечит данное размещение:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_k(t) &= \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k(t) + \mathbf{B}_k \mathbf{y}(t); \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k(t) + \mathbf{D}_k \mathbf{y}(t),\end{aligned}\quad (2)$$

где $\mathbf{x}_k \in R^q$, $\mathbf{A}_k \in R^{q \times q}$, $\mathbf{B}_k \in R^{q \times p}$, $\mathbf{u} \in R^m$, $\mathbf{y} \in R^p$, $\mathbf{C}_k \in R^{m \times q}$, $\mathbf{D}_k \in R^{m \times p}$. Показывается, что *необходимым* условием для существования такого регулятора является выполнение неравенства

$$q(m + p - 1) + mp > n, \quad (\mathbf{u} \in R^m, \mathbf{y} \in R^p). \quad (3)$$

Там же отмечено, что для статического модального регулятора $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{y}$ необходимое условие определяется неравенством $mp > n$. В статье [4] рассмотрен один из возможных современных

подходов к проектированию статических модальных регуляторов по выходу с использованием доверительных областей (trust regions), где непосредственно оптимизируется квадратичная целевая функция относительно желаемых мод с соблюдением неравенства $tr > n$. Из последнего неравенства и неравенства (3) следует, что размерность как статического, так и динамического точечного модального регулятора должна быть высокой.

Но нужна ли такая полная точечная модальная трансформация? Если отталкиваться от практических требований, то одно из важнейших — это требование минимального порядка регулятора и его робастности при выполнении необходимого качества. И тогда на первый план выходит модальный синтез по так называемым D-областям — некоторым областям на комплексной плоскости, описываемым алгебраическими неравенствами, где должны размещаться моды замкнутой системы управления. Такие исследования ведутся с середины 80-х годов прошлого века как для статических модальных регуляторов [5], так и для динамических [6—8]. В статье Хаддада и Бернштейна [8] предлагается для каждой D-области сформировать аналитическое отображение, которое *трансформирует* данную область в левую открытую комплексную полуплоскость. Структура данного отображения принимает форму модифицированного уравнения Ляпунова, из которого определяются коэффициенты статического регулятора. Нельзя не отметить в связи с трансформируемыми D-областями классические работы Джури и Гутмана [9, 10].

Такой же подход применения трансформируемых D-областей для синтеза модальных динамических регуляторов низкого порядка предлагается в настоящей работе, но с использованием функций модальной кластеризации, биальтернированного произведения матриц и параметрической оптимизации.

1. Биальтернированное произведение матриц

Биальтернированное произведение матриц является важной операцией в современной линейной теории управления, которая широко используется для проверки робастной устойчивости [11], контроля расположения собственных значений матриц (мод) в определенных областях комплексной плоскости [12], синтеза регуляторов [13].

Кратко изложим некоторые важные особенности этой операции. Сама операция базируется

на внешнем (альтернированном [14]) произведении Грассманна, суть которого по прямому назначению заключается в определении линейной зависимости или независимости векторов (в общем случае поливекторов). Внешнее произведение \wedge для двух векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n$ дает бивектор, объект вида $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \in R^{n_{ba}}$, $n_{ba} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Основные свойства внешнего произведения векторов: $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in R^n, \alpha \in R$

- а) антисимметричность $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$;
- б) билинейность $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \alpha \mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \alpha \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}$;
- в) ассоциативность $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \in R^n$, $\alpha \in R$.

Из свойства а) имеем важное свойство внешнего произведения:

- г) $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{0}$,

которое дало Грассманну основание для введения термина "внешнее".

Наглядно бивектор можно представить в пространстве $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^3$. Сам бивектор — это параллелограмм, натянутый на данные векторы. Проекция (в общем случае произвольного знака) этого параллелограмма на базисные бивекторы $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ являются ориентированными площадными проекциями и представляют собой двумерные аналоги проекций обычного вектора на базисные одномерные оси. Подробнее с поливекторами можно ознакомиться в монографии [14].

Теперь рассмотрим саму операцию на примере двух векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^3$. Пусть в координатной форме $\mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \ a_3)^T$, $\mathbf{b} = (b_1 \ b_2 \ b_3)^T$. Через базисные векторы \mathbf{e}_i , $i = 1, \dots, 3$, эти же векторы представлены как $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 b_i \mathbf{e}_i$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = & \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \\ & + \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (4)$$

Формулу (4) можно получить непосредственно из свойств внешнего произведения а) — г). Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = & \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i \wedge \sum_{i=1}^3 b_i \mathbf{e}_i = \\ = & a_1 b_2 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + a_1 b_3 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + a_2 b_1 \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 + \\ & + a_2 b_3 \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + a_3 b_1 \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 + a_3 b_2 \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 = \\ = & a_1 b_2 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + a_1 b_3 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + a_2 b_3 \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 - \\ & - a_2 b_1 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 - a_3 b_2 \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 - a_3 b_1 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 = \\ = & (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \\ & + (a_1 b_3 - a_3 b_1) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Определители в формуле (4) — это ориентированные проекции площади бивектора $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ на базисные бивекторы. Нетрудно увидеть, что для векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n$ имеем следующие базисные бивекторы:

$$\begin{aligned} & \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_n, \\ & \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_n, \dots, \mathbf{e}_{n-1} \wedge \mathbf{e}_n, \end{aligned} \quad (5)$$

всего $n_{ba} = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ проекций — размерность пространства бивекторов. Отметим, что в формуле (5) $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j, i = 1, \dots, n-1; j = 2, \dots, n; i < j$.

Далее рассмотрим биальтернированное (двойное альтернированное) произведение квадратных матриц (такое название этому произведению дал Стефанос [15]). При переводе книги Джури [16] Я. З. Цыпкин предложил называть его перекрестным произведением, однако перекрестным (cross product [18]) произведением также называют внешнее произведение векторов, одна из форм которого в пространстве R^3 (по координатам) является обычным векторным произведением (для небивекторного представления). Так как термин не устоялся, мы используем прямой перевод (bialternate product). Обозначение данного произведения — \odot (наиболее широко используемый символ).

Покажем, как формально определяется биальтернированное произведение двух матриц на одном базисном бивекторе, а затем приведем общую формулу данного произведения. Имеем (при раскрытии формулы используем свойства а) — г) внешнего произведения векторов):

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \odot \mathbf{B})\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{e}_s &= \frac{1}{2}(\mathbf{Ae}_r \wedge \mathbf{Be}_s - \mathbf{Ae}_s \wedge \mathbf{Be}_r) = \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{a}_r \wedge \mathbf{b}_s - \mathbf{a}_s \wedge \mathbf{b}_r) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n a_{ir} \mathbf{e}_i \wedge \sum_{j=1}^n b_{js} \mathbf{e}_j - \sum_{i=1}^n a_{is} \mathbf{e}_i \wedge \sum_{j=1}^n b_{jr} \mathbf{e}_j \right) = \quad (6) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=2 \\ j>i}}^n \sum_{i=1}^{n-1} (a_{ir} b_{js} - a_{is} b_{jr} + a_{js} b_{ir} - a_{jr} b_{is}) \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j. \end{aligned}$$

Коэффициенты данного произведения с двойными индексами обычно определяются достаточно сложным образом (см., например, [16]). Ниже мы предложим компактный алгоритм, по которому можно непосредственно сформировать матрицу $\mathbf{C} = \mathbf{A} \odot \mathbf{B}$ (размерность матрицы $\mathbf{C}_{n_{ba} \times n_{ba}}, n_{ba} = n(n-1)/2$).

Программный код (в MATLAB) формирования биальтернированного произведения матриц (матрицы \mathbf{A}, \mathbf{B} заданы, определяем $\mathbf{C} = \mathbf{A} \odot \mathbf{B}$):

```
for p = 1:n-1;
  for q = p + 1:n;
    for r = 1:n-1;
      for s = r + 1:n;
        i = (p-1)*n + q-1/2*p*(p + 1);
        j = (r-1)*n + s-1/2*r*(r + 1);
        c(j,i) = 1/2*(a(r,p)*b(s,q)-a(s,p)*b(r,q) +
          b(r,p)*a(s,q)-b(s,p)*a(r,q));
      end
    end
  end
end
```

Некоторые свойства биальтернированного произведения матриц:

- 1° $\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \mathbf{B} \odot \mathbf{A}$;
- 2° $\alpha \mathbf{A} \odot \beta \mathbf{B} = \alpha \beta \mathbf{A} \odot \mathbf{B}; \alpha, \beta \in R$;
- 3° $\mathbf{A} \odot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \odot \mathbf{B} + \mathbf{A} \odot \mathbf{C}$;
- 4° $\mathbf{AB} \odot \mathbf{CD} = (\mathbf{A} \odot \mathbf{C})(\mathbf{B} \odot \mathbf{D})$.

В основе дальнейшего использования биальтернированного произведения лежит следующая теорема Стефаноса.

Теорема 1 [15]. Пусть матрица $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$ имеет собственные значения (моды) $\{\lambda_i, i = 1, \dots, n\}$. Тогда собственные значения матричной функции (всего $n_{ba} = \frac{n(n-1)}{2}$ значений)

$$\Phi(\mathbf{A}; \mathbf{A}) = \sum_{p,q} c_{pq} \mathbf{A}^p \odot \mathbf{A}^q, c_{pq} \in R \quad (7)$$

определяются как

$$\begin{aligned} \phi(\lambda_i; \lambda_j) &= \frac{1}{2} \sum_{p,q} c_{pq} (\lambda_i^p \lambda_j^q + \lambda_j^p \lambda_i^q), \\ & i = 1, \dots, n-1; j = 2, \dots, n; j > i. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (8)$$

Покажем конкретное подтверждение теоремы Стефаноса на примере.

Пример 1. Найдем собственные значения для так называемой биальтернированной суммы (ее собственные значения — сумма двух различных мод матрицы \mathbf{A} ; используется для трансформируемой D-области "степень устойчивости")

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{A}; \mathbf{I}_n) &= 2\mathbf{A} \odot \mathbf{I}_n = \mathbf{A} \odot \mathbf{I}_n + \mathbf{I}_n \odot \mathbf{A} = \\ &= \mathbf{A}^1 \odot \mathbf{A}^0 + \mathbf{A}^0 \odot \mathbf{A}^1. \end{aligned} \quad (9)$$

В соответствии с формулой (8) матричная функция (9) имеет следующие собственные значения:

$$\begin{aligned} \phi(\lambda_i; \lambda_j) &= \lambda_i^1 \lambda_j^0 + \lambda_j^1 \lambda_i^0 = \lambda_i + \lambda_j, \\ & i = 1, \dots, n-1; j = 2, \dots, n; j > i. \end{aligned} \quad (10)$$

Отметим, что подтверждение формулы (10) можно получить непосредственным использованием внешнего произведения на собственных векторах $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$ матрицы \mathbf{A} . Именно,

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{A}; \mathbf{I}_n) \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{v}_j &= (2\mathbf{A} \odot \mathbf{I}_n) \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{v}_j = \\ &= \mathbf{A} \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{v}_j - \mathbf{A} \mathbf{v}_j \wedge \mathbf{v}_i = \\ &= \lambda_i \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{v}_j - \lambda_j \mathbf{v}_j \wedge \mathbf{v}_i = \\ &= (\lambda_i + \lambda_j) \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{v}_j = \phi(\lambda_i; \lambda_j) \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{v}_j. \end{aligned} \quad (11)$$

В дальнейшем для получения матричных функций вида (7) в целях их практического использования мы будем решать обратную задачу: по заданной функции (8) определять матричную функцию (7).

2. Функции модальной кластеризации трансформируемых D-областей

Определение 1. Назовем *D-областью* область на комплексной плоскости, где располагаются корни характеристического полинома некоторой матричной функции.

Определение 2. Назовем некоторую D-область на комплексной плоскости *трансформируемой*, если ее функции кластеризации комплексных $\phi_D^c(\mathbf{A}, \bullet)$ и вещественных $\phi_D^r(\mathbf{A}, \bullet)$ мод (определения даны ниже) некоторой матрицы \mathbf{A} имеют все корни в левой полуплоскости $C^-, \text{Re}(\lambda_i(\phi_D(\mathbf{A}, \bullet))) < 0, i = 1, \dots, n_{ba}$, комплексной плоскости C (рис. 1).

Данное определение основано на определении трансформируемой D-области, которое ввел С. Гутман в своей статье [18]. Раздельное введение в данной работе функций кластеризации вещественных и комплексных мод позволило корректно описать каждую из областей для последующего синтеза модального регулятора.

Определение 3. Назовем *функцией кластеризации комплексных мод* трансформируемой

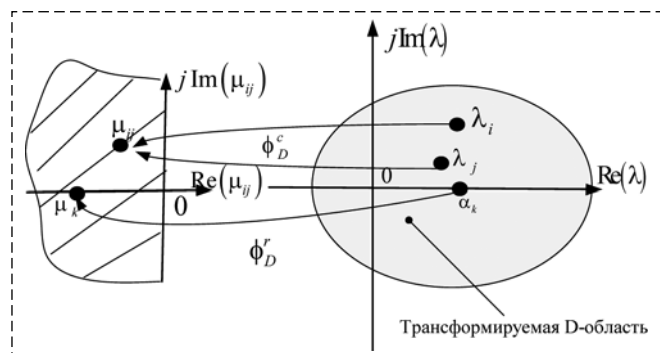


Рис. 1 Трансформируемая D-область (определение)
Fig. 1 Transformable D-region (definition)

D-области некоторой матрицы \mathbf{A} характеристический полином с *положительными* коэффициентами матричной функции $\Phi_D^c(\mathbf{A}; \bullet)$ и обозначим данную функцию $\phi_D^c(\mathbf{A}, \bullet)$.

Матричная функция $\Phi_D^c(\mathbf{A}; \bullet)$ билинтернированного произведения определяется в базисе бивекторов, и D-область на комплексной плоскости, где располагаются моды матрицы \mathbf{A} и которую характеризует данная функция, учитывает только комплексные моды.

Определение 4. Назовем *функцией кластеризации вещественных мод* трансформируемой D-области некоторой матрицы \mathbf{A} характеристический полином с *положительными* коэффициентами матричной функции $\Phi_D^r(\mathbf{A}; \bullet)$ и обозначим данную функцию $\phi_D^r(\mathbf{A}, \bullet)$.

В матричной функции $\Phi_D^r(\mathbf{A}; \bullet)$ используется обычное умножение матриц.

Определение 5. Назовем *функцией кластеризации мод* трансформируемой D-области некоторой матрицы \mathbf{A} характеристические полиномы матричных функций $\Phi_D^c(\mathbf{A}; \bullet), \Phi_D^r(\mathbf{A}; \bullet)$ с *положительными* коэффициентами и обозначим данную функцию $\phi_D(\mathbf{A}, \bullet) = \phi_D^c(\mathbf{A}, \bullet) \cap \phi_D^r(\mathbf{A}, \bullet)$.

Ниже мы рассмотрим конкретные матричные функции, характеризующие определенные D-области, которые наиболее часто используются на практике.

◇ D-область в виде конуса

Выясним, при каких условиях конус будет трансформируемой D-областью (рис. 2).

Обозначим $\lambda = \alpha + j\beta, \bar{\lambda} = \alpha - j\beta$ пару комплексно-сопряженных корней. Тогда имеем

$$\alpha = \frac{\lambda + \bar{\lambda}}{2}, \beta = \frac{\lambda - \bar{\lambda}}{2j}. \quad (12)$$

Все точки конуса на комплексной плоскости в *левой* полуплоскости с вершиной в на-

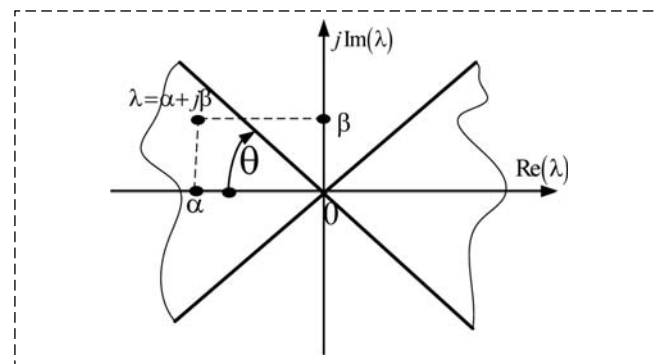


Рис. 2. D-область: конус с вершиной в начале координат и углом θ

Fig. 2. D-region: a cone with a vertex at the origin and an angle θ

чале координат и углом θ определяются следующим неравенством:

$$\alpha \operatorname{tg} \theta \leq -|\beta|. \quad (13)$$

Отсюда

$$\alpha \sin \theta \leq -|\beta| \cos \theta. \quad (14)$$

Для удобства обозначим $\xi = \cos \theta$, $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \xi^2}$. Тогда неравенство (14) примет вид

$$\alpha \sqrt{1 - \xi^2} \leq -|\beta| \xi. \quad (15)$$

Возведем обе части неравенства (15) в квадрат, соответственно изменив знак неравенства, и получим

$$\alpha^2(1 - \xi^2) - \beta^2 \xi^2 \geq 0$$

или

$$-\alpha^2(1 - \xi^2) + \beta^2 \xi^2 \leq 0. \quad (16)$$

Замечание. Отметим, что после возведения в квадрат выражения (15) неравенство (16) добавляет точки конуса (на рис. 2) и в правой полуплоскости. Но эта операция позволяет получить D-область для конуса.

Подставим соотношения (12) в неравенство (16), после упрощения и согласования формул Стефаноса [15] биальтернированного произведения матриц (7) и их собственных значений (8), например, $\lambda^2 \bar{\lambda}^0 \rightarrow \mathbf{A}^2 \odot \mathbf{I}$, получим

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \lambda^2 \bar{\lambda}^0 + \frac{1}{2} \bar{\lambda}^2 \lambda^0 + \frac{1}{2} (1 - 2\xi^2) \lambda^1 \bar{\lambda}^1 + \frac{1}{2} (1 - 2\xi^2) \bar{\lambda}^1 \lambda^1 \right). \quad (17)$$

В этом случае функция модальной кластеризации $\Phi_D^c(\mathbf{A}, \xi, s)$ комплексных собственных значений матрицы \mathbf{A} в конусе представляется следующим образом:

а) формальный переход от формулы (17) к матричному представлению D-области (конус) дает

$$\Phi_{cone}^c(\mathbf{A}, \xi) = -(\mathbf{A}^2 \odot \mathbf{I} + (1 - 2\xi^2)\mathbf{A} \odot \mathbf{A}), \quad (18)$$

где символ \odot , напоминаем, обозначает операцию биальтернированного произведения матриц, \mathbf{I}_n — единичная матрица размерности $n \times n$;

б) сама функция модальной кластеризации комплексных мод представляется в виде

$$\Phi_{cone}^c(\mathbf{A}, \xi, s) = \det(s\mathbf{I}_q + (\mathbf{A}^2 \odot \mathbf{I}_n + (1 - 2\xi^2)\mathbf{A} \odot \mathbf{A})) = \sum_{i=0}^{n_{ba}} p_i s^i, \quad p_i > 0, \quad (19)$$

где $n_{ba} = \frac{n(n-1)}{2}$ — размерность пространства биальтернированного произведения. Сразу отметим, что данная функция описывает не всю трансформируемую D-область, так как отображает только комплексно сопряженные собственные значения матрицы \mathbf{A} , принадлежащие конусу с углом θ (включая и правую полуплоскость) в \mathcal{C} . Для вещественных мод данная функция определяет только необходимые условия. При этом трансформируемость D-области справедлива для углов конуса $0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$ радиан. Покажем это. Имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{cone}^c(\mathbf{A}, \xi) \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{v}_j &= \\ &= -(\mathbf{A}^2 \odot \mathbf{I} + (1 - 2\xi^2)\mathbf{A} \odot \mathbf{A}) \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{v}_j = \\ &= -\frac{1}{2} (\mathbf{A}^2 \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{v}_j - \mathbf{A}^2 \mathbf{v}_j \wedge \mathbf{v}_i) - \\ &= -\frac{1}{2} (1 - 2\xi^2) (\mathbf{A} \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{A} \mathbf{v}_j - \mathbf{A} \mathbf{v}_j \wedge \mathbf{A} \mathbf{v}_i) = \\ &= -\frac{1}{2} ((\lambda_i + \lambda_j)^2 - 4\xi^2 \lambda_i \lambda_j) \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{v}_j = \mu_{ij} \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{v}_j, \end{aligned} \quad (20)$$

где λ_i, λ_j — собственные значения матрицы \mathbf{A} ; $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$ — правые собственные векторы матрицы \mathbf{A} ; $-\frac{1}{2} ((\lambda_i + \lambda_j)^2 - 4\xi^2 \lambda_i \lambda_j)$ — собственные значения матрицы $-(\mathbf{A}^2 \odot \mathbf{I} + (1 - 2\xi^2)\mathbf{A} \odot \mathbf{A})$. Далее рассмотрим варианты комплексных мод матричной функции $\Phi_{cone}^c(\mathbf{A}, \xi)$.

Вариант А. Рассматриваются комплексно сопряженные собственные значения (моды), т. е. $\lambda_i = \alpha_i + j\beta_i$, $\lambda_j = \bar{\lambda}_i$. Здесь $\xi^2 = \cos^2 \theta$, и вещественные части собственных значений матричной функции (20) имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\mu_{ij}) = \mu_{ij} &= -2(\alpha_i^2 - \cos^2 \theta (\alpha_i^2 + \beta_i^2)) < 0, \\ 0 < \theta &\leq \frac{\pi}{4}; \frac{1}{2} \leq \cos^2 \theta = \xi^2 < 1. \end{aligned} \quad (21)$$

Вариант Б. Рассматриваются разные комплексные собственные значения $\lambda_i = \alpha_i + j\beta_i$, $\lambda_j = \alpha_j + j\beta_j$. Формула (21) дает следующие вещественные части собственных значений матричной функции (20) для угла конуса $\theta = \pi/4$:

$$\operatorname{Re}(\mu_{ij}) = -((\alpha_i^2 - \beta_i^2) + (\alpha_j^2 - \beta_j^2)) < 0. \quad (22)$$

Если установить угол $\theta = \pi/4$, то соотношение (22) справедливо для всех комплексных мод матрицы \mathbf{A} , расположенных в данном

конусе. Более того, можно показать, что для углов $0 < \theta \leq \pi/4$ трансформируемость данной D-области также выполняется. Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\mu_{ij}) &= \operatorname{Re}\left(-\frac{1}{2}(\lambda_i^2 + \lambda_j^2 + 2(1 - 2\xi^2)\lambda_i\lambda_j)\right) = \\ &= -(\alpha_i^2 + \alpha_j^2 - \beta_i^2 - \beta_j^2 + 2(1 - 2\xi^2) \times \\ &\times (\alpha_i\alpha_j - \beta_i\beta_j)) < 0, \quad i = 1, \dots, n-1; \\ &j = 2, \dots, n; j > i, \lambda_i = \alpha_i + j\beta_i, \lambda_j = \alpha_j + j\beta_j. \end{aligned} \quad (23)$$

Наихудший случай

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\mu_{ij}) &= -\left(\frac{\alpha_i^2(1-t^2) + \alpha_j^2(1-t^2)}{2|\alpha_i\alpha_j|} \zeta^2 - \xi^2\right) < 0, \\ \lambda_i &= \alpha_i + j\beta_i, \lambda_j = \alpha_j + j\beta_j; \\ t_k &= \frac{|\beta_k|}{|\alpha_k|}, k = i, j; i = 1, \dots, n-1; j = 2, \dots, n; \\ j > i; t &= \max_k(t_k); \zeta^2 = \frac{1}{1+t^2}; \frac{1}{2} \leq \xi^2 < \zeta^2 < 1. \end{aligned}$$

Из неравенств (21)–(23) следует, что внутренность конуса (без вещественной оси) является трансформируемой D-областью. Для вещественных мод эти неравенства дают только необходимые условия принадлежности мод к данной D-области.

♦ **D-область в случае заданной степени устойчивости**

Неравенство на комплексной плоскости для данной D-области (рис. 3) имеет вид

$$\operatorname{Re}(\lambda_i = \alpha_i + j\beta_i) = \alpha_i \leq \alpha.$$

Формально, как и для конуса, получаем

$$\begin{aligned} \alpha_i = \frac{\lambda_i + \bar{\lambda}_i}{2} \leq \alpha &\Rightarrow \frac{\lambda_i + \bar{\lambda}_i}{2} - \alpha \leq 0, \\ \frac{\lambda_i^1 \bar{\lambda}_i^0}{2} + \frac{\bar{\lambda}_i^1 \lambda_i^0}{2} - \alpha &= \frac{\lambda_i^0 \bar{\lambda}_i^0}{2} - \alpha \frac{\bar{\lambda}_i^0 \lambda_i^0}{2} \leq 0. \end{aligned} \quad (24)$$

В этом случае функция модальной кластеризации $\Phi_{stab}^c(\mathbf{A}, s)$ комплексных мод матрицы \mathbf{A}

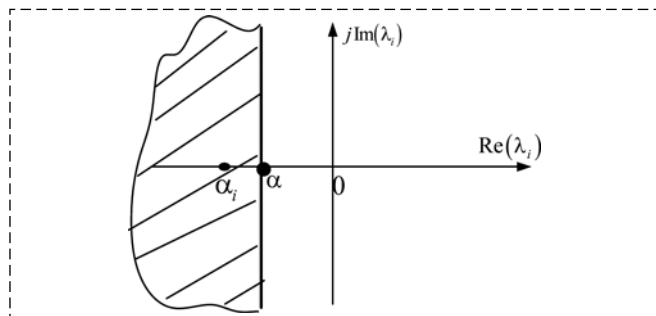


Рис. 3. D-область: заданная степень устойчивости, $\alpha \leq 0$
Fig. 3. D-region: stability margin, $\alpha \leq 0$

в рассматриваемой области представляется следующим образом:

а) формальный переход от формулы (24) к матричному представлению D-области (заданная степень устойчивости) дает

$$\Phi_{stab}^c(\mathbf{A}, \alpha) = 2(\mathbf{A} \odot \mathbf{I}_n - \alpha \mathbf{I}_n \odot \mathbf{I}_n); \quad (25)$$

б) сама функция модальной кластеризации комплексных мод и их вещественные части представляются в виде (трансформируемая D-область без вещественных мод)

$$\begin{aligned} \phi_{stab}^c(\mathbf{A}, \alpha, s) &= \det(s\mathbf{I}_q - \\ &- 2(\mathbf{A} \odot \mathbf{I}_n - \alpha \mathbf{I}_n \odot \mathbf{I}_n)) = \sum_{i=0}^{n_{ba}} p_i s^i, \quad p_i > 0, \\ \operatorname{Re}(\mu_{ij}) &= \operatorname{Re}(\lambda_i + \lambda_j - 2\alpha) = \\ &= \operatorname{Re}(\lambda_i + \bar{\lambda}_i - 2\alpha) = 2(\alpha_i - \alpha) < 0; \\ &i = 1, \dots, n-1; j = 2, \dots, n; j > i. \end{aligned} \quad (26)$$

Для вещественных мод неравенства (26) дают только необходимые условия принадлежности мод к данной D-области.

Далее (без вывода, поскольку он аналогичен выше рассмотренным), представим D-область в виде диска радиуса R с центром в начале координат.

♦ **D-область в виде диска**

В этом случае

а) матричное представление D-области (диск) имеет вид

$$\Phi_{disc}^c(\mathbf{A}, R) = 2(\mathbf{A} \odot \mathbf{A} - R^2 \mathbf{I}_n \odot \mathbf{I}_n); \quad (27)$$

б) сама функция модальной кластеризации комплексных мод и ее моды (трансформируемая D-область без вещественных мод) представляются в виде

$$\begin{aligned} \phi_{disc}^c(\mathbf{A}, R, s) &= \det(s\mathbf{I}_q - \\ &- 2(\mathbf{A} \odot \mathbf{A} - R^2 \mathbf{I}_n \odot \mathbf{I}_n)) = \sum_{i=0}^{n_{ba}} p_i s^i, \quad p_i > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\mu_{ij}) &= \operatorname{Re}(\lambda_i \lambda_j - R^2) = \alpha_i \alpha_j - \beta_i \beta_j - R^2 < 0, \\ &i = 1, \dots, n-1; j = 2, \dots, n; j > i, \\ &\lambda_i = \alpha_i + j\beta_i, \lambda_j = \alpha_j + j\beta_j. \end{aligned} \quad (28)$$

Доказательство неравенства (28). Для любой пары комплексно сопряженных мод имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\mu_{ij}) &= \operatorname{Re}(\lambda_i \lambda_j - R^2) = \\ &= \operatorname{Re}(\lambda_i \bar{\lambda}_i - R^2) = (|\lambda_i|^2 - R^2) < 0, \end{aligned} \quad (29)$$

т. е. $|\lambda_i| < R$. Тогда для произвольных комплексных корней справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}(\mu_{ij}) = |\lambda_i| |\lambda_j| \cos(\varphi_i + \varphi_j) - R^2 < 0,$$

$$i = 1, \dots, n-1; j = 2, \dots, n; j > i.$$

При синтезе модальных регуляторов по трансформируемым D-областям требуется также ввести функции кластеризации вещественных мод. Здесь мы рассмотрим две наиболее важные функции.

• Принадлежность вещественных мод матрицы \mathbf{A} левой полуплоскости комплексной плоскости с заданной степенью устойчивости $\alpha \leq 0$ (матричная функция $\Phi_{stab}^r(\mathbf{A}; \alpha) = \mathbf{A} - \alpha \mathbf{I}$) определяется положительными коэффициентами функции кластеризации вещественных мод и ее отрицательными вещественными модами [16], т. е.

$$\phi_{stab}^r(\mathbf{A}, \alpha, s) = \det(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I}_n) = \sum_{i=0}^n a_i s^i, a_i > 0, \quad (30)$$

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) = \alpha_i - \alpha < 0, \alpha \leq 0, \beta_i = 0, i \in [1, \dots, n].$$

• Принадлежность вещественных мод матрицы \mathbf{A} внутренности диска радиуса R (матричная функция $\Phi_{disc}^r(\mathbf{A}; R) = \mathbf{A}^2 - R\mathbf{I}$, при $R = 1$ важна для устойчивости дискретных систем) определяется положительными коэффициентами функции кластеризации вещественных мод и ее отрицательными вещественными модами, т. е.

$$\phi_{disc}^r(\mathbf{A}, R, s) = \det(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}^2 + R^2 \mathbf{I}_n) = \sum_{i=0}^n a_i s^i, a_i > 0, \quad (31)$$

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) = \alpha_i^2 - R^2 < 0, \beta_i = 0, i \in [1, \dots, n].$$

Теорема 2 [10]. Положительность коэффициентов функции модальной кластеризации $\phi(\mathbf{A}, \bullet) = \phi_D^c(\mathbf{A}, \bullet) \cap \phi_D^r(\mathbf{A}, \bullet)$, $p_i > 0$, $i = 0, 1, \dots, n_{ba}$; $a_i > 0$, $i = 0, 1, \dots, n$, гарантирует нахождение собственных значений некоторой матрицы \mathbf{A} внутри соответствующей трансформируемой D-области.

Например, трансформируемая D-область, представленная на рис. 4, имеет следующую полную функцию модальной кластеризации:

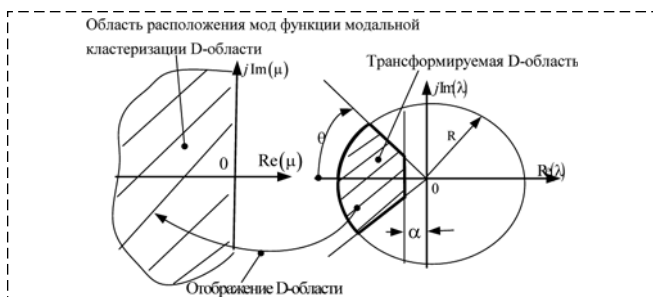


Рис. 4. Пример трансформируемой D-области
Fig. 4. Example of a transformable D-region

$$\phi_D(\mathbf{A}, \alpha, R, \xi, s) = \phi_{cone}^c(\mathbf{A}, \xi, s) \cap$$

$$\cap \phi_{stab}^r(\mathbf{A}, \alpha, s) \cap \phi_{stab}^c(\mathbf{A}, \alpha, s) \cap$$

$$\cap \phi_{disc}^c(\mathbf{A}, R, s) \cap \phi_{disc}^r(\mathbf{A}, R, s).$$

Отметим, что если происходит изменение параметров матрицы \mathbf{A} , то для контроля движения мод *внутри* D-области (хотя туда еще надо попасть, если речь идет о синтезе параметров, например регулятора) можно использовать подход, предложенный в работах [12, 13], — так называемое (буквально) защитное отображение (guardian map). По своему функциональному назначению это функция контроля мод в D-области (но не трансформируемой).

В соответствии с теоремой 2 рассмотрим алгоритм параметрической оптимизации для синтеза динамического регулятора с трансформируемыми D-областями.

3. Алгоритм оптимизации

В основе постановки задачи оптимизации параметров функций модальной кластеризации соответствующих D-областей лежит формирование ограничений, обеспечивающих по теореме 2 положительность коэффициентов данных функций, и выбор целевой функции.

Формирование ограничений. Используем подход, предложенный в работе [19]:

$$-t_i^2 b_i(\mathbf{k}) + w_i \leq 0, i = 1, \dots, N, \quad (32)$$

где N — общее число коэффициентов функций модальной кластеризации D-области; $\mathbf{k} \in R^{n_k}$ — вектор искомых параметров; $b_i(\mathbf{k})$ — i -й коэффициент функции модальной кластеризации; $w_i > 0$ — вес i -го ограничения (чаще всего используем $w_i = 1$).

Выбор целевой функции. Здесь рассмотрим два варианта решения задачи модального управления по трансформируемым D-областям:

а) квадратичная целевая функция с указанием желаемых мод в D-области

$$J_1 = \sum_{i=1}^N w_{bi} (b_i(\mathbf{k}) - b_i^*)^2 + \sum_{i=1}^N w_{ti} t_i^2 \rightarrow \min_{\mathbf{k}} \quad (33)$$

где $w_{bi} > 0$, $w_{ti} > 0$, $i = 1, \dots, N$ — веса; b_i^* — i -й коэффициент полиномов желаемых мод. Как показано в статье [4], минимизация в l_2 разности между коэффициентами желаемого полинома и коэффициентами параметрического

полинома менее чувствительна, чем минимизация между их модами. Но такой подход эффективен, если выполнено *необходимое* условие полной модальной управляемости по выходу [3]. Напомним: 1) для статических регуляторов $mp > n$ ($q = 0$); 2) для динамических регуляторов

$$q(m + p - 1) + mp > n, (\mathbf{u} \in R^m, \mathbf{y} \in R^p), \quad (34)$$

где q — порядок динамического регулятора. Моделирование показало, что оптимизация с целевой функцией J_1 хорошо работает только для простых задач невысокой размерности с небольшим числом параметров. При увеличении размерности сходимость достигается в очень ограниченных случаях. Помимо этого большая проблема — это выбор весов (коэффициенты различаются на порядки) для первой суммы в формуле (33), которые напрямую влияют на сходимость. В приведенном в разделе 4 примере 2 дается графическое пояснение проблемы использования критерия J_1 для синтеза динамического модального регулятора q -го порядка, связанной с отсутствием полной модальной управляемости (не выполнено условие (34));

б) простая квадратичная функция (в основном с единичными весами $w_{ki} = 1$) с минимизацией взвешенных параметров регулятора k_i , $i = 1, \dots, n_k$ и параметров ограничений t_i , $i = 1, \dots, N$,

$$J_2 = \sum_{i=1}^{n_k} w_{ki} k_i^2 + \sum_{i=1}^N t_i^2 \rightarrow \min_{\mathbf{k}}. \quad (35)$$

Целевая функция (35) позволила решить достаточно сложные задачи синтеза модальных регуляторов низкого порядка по трансформируемым D-областям.

4. Примеры синтеза регуляторов

Пример 2. Рассмотрим пример из статьи [13] синтеза ПИ регулятора $W_r(s) = K_p + K_i/s$ для следующего объекта управления:

$$W_o(s) = \frac{s + 5}{s^2 + s + 9}. \quad (36)$$

В работе [13] итерационным алгоритмом на основе функции контроля мод и биальтернированного произведения матриц был синтезирован ПИ регулятор для D-области: диск радиуса $R_d = 10$, степень устойчивости $\alpha = -2$,

конус с углом $\theta = 45^\circ$. Так как здесь динамический регулятор имеет первый порядок ($q = 1$), а объект имеет второй порядок ($n = 2$, $m = 1$, $p = 1$) и $q(m + p - 1) + mp = n$ (m — число входов, p — число выходов объекта управления), то произвольного расположения мод замкнутой системы добиться невозможно [7]. Поэтому в данном случае задавалась в некотором смысле вынужденная граница в виде радиуса диска, так как при заданных степени устойчивости и угле конуса получить меньшую область не удастся. Результаты работы алгоритма: $K_p = 15,34$; $K_i = 42,71$, моды замкнутой системы $\lambda_1 = -2,19$; $\lambda_{2,3} = -7,07 \pm j6,88$.

Рассмотрим теперь синтез ПИ регулятора для данного объекта управления на основе предложенного алгоритма с использованием функции модальной кластеризации, ограничений, формирующих область допустимых решений и оптимизации квадратичной целевой функции вида (35). Трансформируемая D-область представлена требуемой (вещественной) степенью устойчивости и конусом (комплексных мод):

$$\begin{aligned} \phi_D(\mathbf{A}, \alpha, R, \xi, s) &= \phi_{cone}^c(\mathbf{A}, \xi, s) \cap \phi_{stab}^r(\mathbf{A}, \alpha, s) = \\ &= \phi_{cone}^c(\mathbf{A}, 0.707, s) \cap \phi_{stab}^r(\mathbf{A}, -2, s). \end{aligned}$$

Напомним, здесь $\xi = \cos\theta = \cos 45^\circ = 0,707$. Матрица замкнутой системы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5K_i & -9 - K_i - 5K_p & -1 - K_p \end{pmatrix},$$

весовые коэффициенты искомым параметров регулятора: $w_{K_i} = 0,0005$; $w_{K_p} = 0,001$. Ограничения:

а) конус (кластеризация комплексных мод):

$$\begin{aligned} -t_1^2 p_{0,cone}(\mathbf{K}) + 1 &\leq 0, \\ -t_2^2 p_{1,cone}(\mathbf{K}) + 1 &\leq 0, \\ -t_3^2 p_{2,cone}(\mathbf{K}) + 1 &\leq 0; \end{aligned} \quad (37)$$

б) степень устойчивости (кластеризация вещественных мод):

$$\begin{aligned} -t_4^2 a_{0,stab}(\mathbf{K}) + 1 &\leq 0, \\ -t_5^2 a_{1,stab}(\mathbf{K}) + 1 &\leq 0, \\ -t_6^2 a_{2,stab}(\mathbf{K}) + 1 &\leq 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Целевая функция:

$$J = \min_{\mathbf{K}} \left(w_{K_i} K_i^2 + w_{K_p} K_p^2 + \sum_{i=1}^6 t_i^2 \right). \quad (39)$$

Решение задачи оптимизации в пакете символьных вычислений Maple 18 методом внутренней точки дает следующий результат: $K_i = 43,06$; $K_p = 15,53$. Моды замкнутой системы: $\lambda_1 = -2,19$; $\lambda_{2,3} = -7,16 \pm j6,86$.

Комментарий. Данные результаты были получены в результате пошагового движения с изменением параметра α : $0,5 \rightarrow -2$, параметры конуса не изменялись. На первом этапе оптимизации начальные условия выбирались по умолчанию, а далее начальные условия i -го этапа — это оптимальные параметры $(i - 1)$ -го этапа. В каждом этапе оптимизации проводилось максимум 1000 итераций. Конечным не улучшаемым решением является выход всех ограничений (37), (38) на границу.

Рассмотрим еще один подход — графическое представление попытки решить задачу модального синтеза для заданного (точного) расположения мод. Желательные моды замкнутой системы: $\lambda_1^* = -1,1$; $\lambda_{2,3}^* = -8 \pm j8$. Формируем полиномы для функций кластеризации комплексных мод конуса, а также полиномы для функций кластеризации вещественных мод степени устойчивости. Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях параметризованного полинома и желаемого полинома. Получаем:

а) функция кластеризации комплексных мод конуса ($\theta = 45^\circ$), $\xi = 0,707$

$$\begin{aligned} p_{2,cone}(\mathbf{K}) &= p_{2,cone}^* : -8,002K_p + K_p^2 - 2K_i - 17,005 = 113,24; \\ p_{1,cone}(\mathbf{K}) &= p_{1,cone}^* : -13,76K_p^3 - 172,28 + 3,13K_p^4 - 0,25K_i^3 + 0,125K_i^2K_p^2 - 7,26K_i^2 - 5,25K_iK_p^2 - K_i^2K_p - 37,28K_i - 133,12K_p^2 - 30,53K_pK_i - 272,50K_p = 74561,29; \\ p_{0,cone}(\mathbf{K}) &= p_{0,cone}^* : -K_iK_p^2 + 8K_pK_i + 92,56 - 4K_p^3 + 0,25K_p^4 + 90,56K_p + 19,01K_i + 13,76K_p^2 + 1,26K_i^2 = 4536,75. \end{aligned} \quad (40)$$

б) функция кластеризации вещественных мод степени устойчивости $\alpha = -1,1$

$$\begin{aligned} a_{2,stab}(\mathbf{K}) &= a_{2,stab}^* : -2,3 + K_p = 13,8; \\ a_{1,stab}(\mathbf{K}) &= a_{2,stab}^* : K_i + 2,8K_p + 10,43 = 55,61; \\ a_{0,stab}(\mathbf{K}) &= a_{0,stab}^* : 3,9K_i - 4,29K_p - 10,02 = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Отметим, что в последнем уравнении системы (41) правый нуль — это результат совпадения желаемого вещественного полюса $\lambda_1^* = -1,1$ и степени устойчивости $\alpha = -1,1$ (граница области). На рис. 5 (где в индексах легенды полиномов для компактности использованы сокращения: *cone* \rightarrow *c*, *stab* \rightarrow *s*) построены кривые (линии уровней) выражений (40), (41), из которых следует, что точного решения нет, а *выбранная* (в частности) точка $K_i = 18,6$; $K_p = 16,2$ определяет следующие моды замкнутой системы: $\lambda_1 = -1,008$; $\lambda_{2,3} = -8,096 \pm j5,171$. Теперь представим графически точное решение, полу-

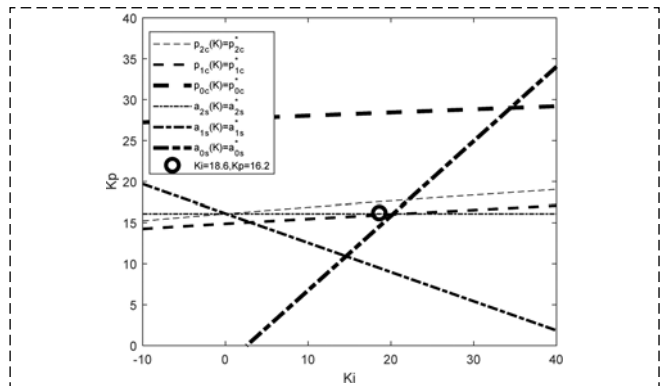


Рис. 5. Графическое представление уравнений поиска параметров ПИ регулятора в D-области по задаваемым модам $\lambda_1^* = -1,1$; $\lambda_{2,3}^* = -8 \pm j8$

Fig. 5. Graphical representation of the equations for finding the parameters of the PI controller in the D-domain according to the specified eigenvalues $\lambda_1^* = -1,1$; $\lambda_{2,3}^* = -8 \pm j8$

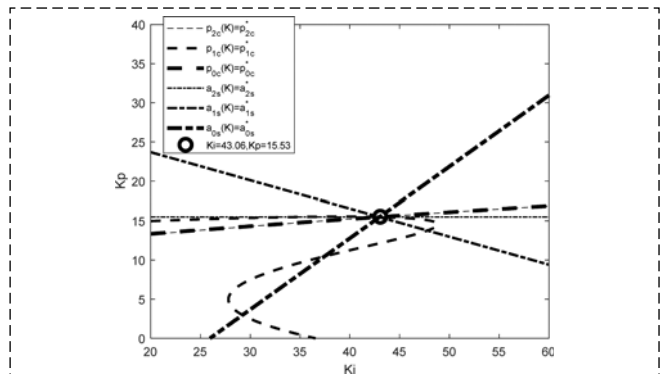


Рис. 6. Графическое представление точного решения уравнений (40), (41) для мод $\lambda_1 = \lambda_1^* = -2,19$; $\lambda_{2,3} = \lambda_{2,3}^* = -7,6 \pm j6,86$ и параметров ПИ регулятора $K_p = 15,53$; $K_i = 43,06$

Fig. 6. Graphical representation of the exact solution of equations (40), (41) for eigenvalues $\lambda_1 = \lambda_1^* = -2,19$; $\lambda_{2,3} = \lambda_{2,3}^* = -7,6 \pm j6,86$ and the parameters of the PI controller $K_p = 15,53$; $K_i = 43,06$

ченное после оптимизации (37)—(39) для мод $\lambda_1 = \lambda_1^* = -2,19$; $\lambda_{2,3} = \lambda_{2,3}^* = -7,6 \pm j6,86$ и параметров ПИ регулятора $K_p = 15,53$; $K_i = 43,06$ (рис. 6). Результат: все ограничения пересекаются в одной точке.

Пример 3. В качестве более сложного примера рассмотрим синтез робастного регулятора второго порядка слабо демпфированной двухмассовой системы спутник—инструментальный блок (рис. 7), где J_1, J_2 — моменты инерции масс спутника и инструментального блока, соответственно, связанных гибкой связью с неопределенными параметрами: $k \in [k_{\min}, k_{\max}]$ — жесткость пружины; $f \in [f_{\min}, f_{\max}]$ — коэффициент вязкого трения; τ — вращающий момент, приложенный к первой массе. Эта задача синтеза с использованием линейных матричных неравенств была рассмотрена автором в статье [20]. Ниже будет показано, что синтез регулятора с использованием трансформируемых D-областей и функций модальной кластеризации позволит для регулятора минимального (второго) порядка получить хорошие показатели качества во всем диапазоне неопределенности параметров объекта управления (и даже в более широком диапазоне, как показало моделирование), чего не удалось добиться с линейными матричными неравенствами. Отметим, что здесь рассматривается так называемая несогласованная (в зарубежной литературе "noncollocated") установка привода и датчика: привод — на спутнике, а датчик — на инструментальном блоке, что заметно усложняет задачу синтеза, так как инструментальный блок со спутником соединен нежесткой связью.

Фиксированные и интервально неопределенные параметры объекта управления: $k \in [0,09...0,4]$, $f \in [0,0038...0,042]$, $J_1 = 1 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$,

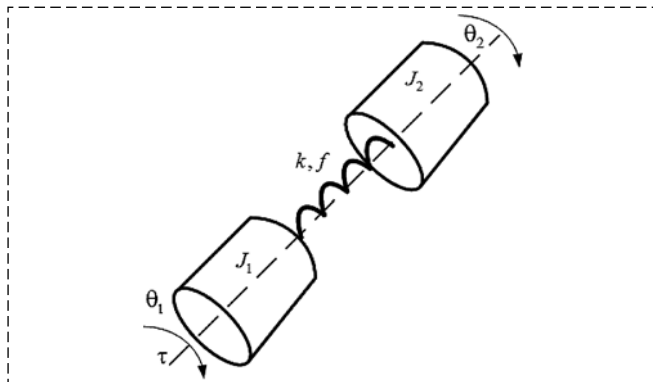


Рис. 7. Схематическое изображение объекта управления
Fig. 7. Schematic representation of the plant

$J_2 = 0,1 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. Управлением является момент τ , создаваемый приводом.

Требуется синтезировать регулятор второго порядка, обеспечивающий следующие показатели качества для любых параметров объекта управления:

- 1) время переходного процесса не более 20 с;
- 2) перерегулирование не более 15 %.

Решение. Объект управления:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (42)$$

Переменные состояния: $x_1 = \theta_1$, $x_2 = \dot{\theta}_1$, $x_3 = \theta_2$, $x_4 = \dot{\theta}_2$ (объект четвертого порядка, $n = 4$), управление $u = \tau$. Матрицы объекта управления (42) имеют следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{J_1} & -\frac{f}{J_1} & \frac{k}{J_1} & \frac{f}{J_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J_2} & \frac{f}{J_2} & -\frac{k}{J_2} & -\frac{f}{J_2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k & -f & k & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 10k & 10f & -10k & -10f \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Измеряется только угол поворота инструментального блока θ_2 , т. е. матрица выхода $\mathbf{C} = (0 \ 0 \ 1 \ 0)$. Структура синтезируемого регулятора второго порядка ($q = 2$):

$$W_p(s) = \frac{K_5(s^2 + K_1s + K_2)}{s^2 + K_3s + K_4}, \quad (43)$$

где $K_i, i = 1, \dots, 5$ — искомые параметры. Таким образом, общий порядок системы управления $n_\Sigma = n + q = 6$, а это значит, что для биальтернированного произведения матриц порядок будет равен $n_{ba} - n_\Sigma(n_\Sigma - 1)/2 = 15$. В силу большого числа параметров и порядка системы при синтезе регулятора использовалась только одна трансформируемая D-область — область с заданной степенью устойчивости комплексных и вещественных мод

$$\phi_D(\mathbf{A}, \alpha, s) = \phi_{stab}^c(\mathbf{A}, \alpha, s) \cap \phi_{stab}^r(\mathbf{A}, \alpha, s). \quad (44)$$

Таблица 1
Table 1

Параметры динамического регулятора для двух D-областей
Dynamic controller parameters for two D-regions

Вариант регулятора	Параметры регулятора					D-область
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
1	-0,51	-0,062	7,02	5,09	-2,12	$\phi_{stab}^c(A, \alpha, s) \cap \cap \phi_{stab}^f(A, \alpha, s)$
2	-0,49	-0,051	10,21	7,93	-3,26	$\phi_{stab}^c(A, \alpha, s)$

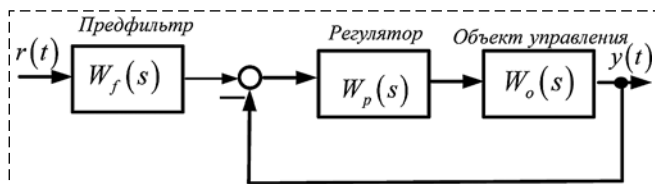


Рис. 8. Структурная схема системы управления
Fig. 8. Block diagram of the control system

В трансформируемой D-области (44) всего будет $15 + 6 = 21$ ограничение вида (37), (38). В качестве целевой функции использовалась функция J_2 . Выбранные веса: $w_i = 2, i = 1, \dots, 4$; $w_i = 1, i = 5, \dots, 21$, $w_{ki} = 1, i = 1, \dots, 5$. Оптимизация велась поэтапно $\alpha: 0,3 \rightarrow -0,1$. В обоих случаях, как и в примере 2, начальные условия выбирались по умолчанию, а далее начальные условия i -го этапа определялись оптимальными параметрами $(i - 1)$ -го этапа. На каждом этапе максимальное число итераций составило 1500. Были получены параметры регулятора, обеспечивающие робастное качество для всей области неопределенности параметров объекта

управления. В табл. 1 представлены результаты оптимизации параметров регулятора для полной D-области (44) (регулятор 1) и D-области, представленной только функцией кластеризации для комплексных мод (16 ограничений) (37), регулятор 2).

Полученные передаточные функции регуляторов:

$$W_{p1}(s) = \frac{-2,116s^2 + 1,084s + 0,1306}{s^2 + 7,017s + 5,091},$$

$$W_{p2}(s) = \frac{-3,265s^2 + 1,598s + 0,1652}{s^2 + 10,21s + 7,93}.$$

Данные регуляторы являются неминимально фазовыми (неминимально фазовые регуляторы второго-четвертого порядка получены также и линейными матричными неравенствами [20]). Для робастного качества на входе задающего сигнала установлен префильтр (апериодическое звено $W_f(s) = \frac{1}{T_f s + 1}$ с постоянной времени $T_f = 10$ с), что обеспечивает практически одинаковые переходные характеристики замкнутой системы управления (рис. 8) во всем диапазоне изменения параметров объекта управления.

На рис. 9, 10 изображены временные и частотные характеристики замкнутой системы для регулятора 2 (для регулятора 1 они близки к этим). На каждом рисунке отображены графики выходов θ_1, θ_2 для параметров объекта управления, представленных в табл. 2.

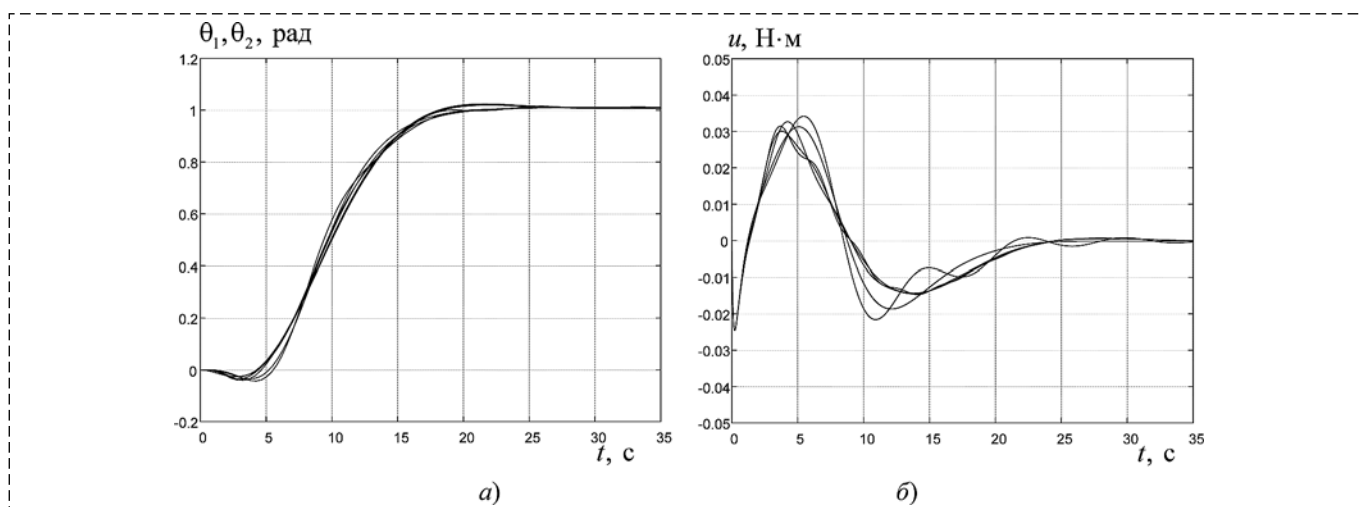


Рис. 9. Параметры из табл. 2:

a — переходные характеристики; b — управление для передаточных функций $W_{r \rightarrow \theta_1}(s), W_{r \rightarrow \theta_2}(s)$

Fig. 9. The parameters of Table 2:

a — step responses; b — control for transfer functions $W_{r \rightarrow \theta_1}(s), W_{r \rightarrow \theta_2}(s)$

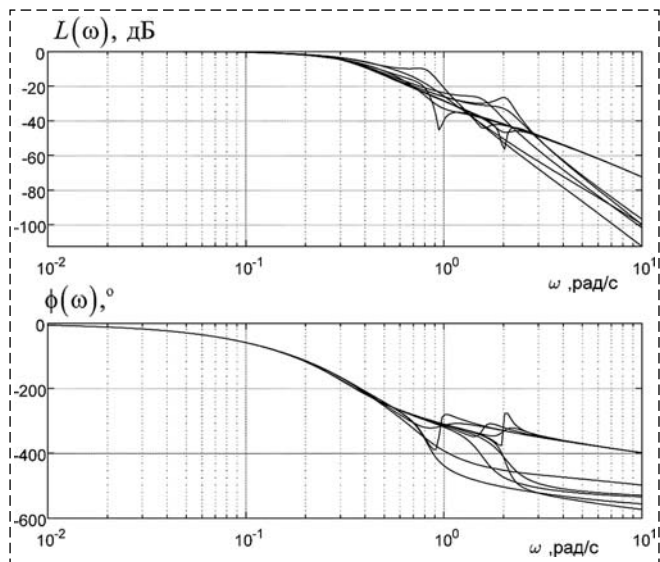


Рис. 10. Логарифмические частотные характеристики передаточных функций $W_{r \rightarrow 0_1}(s)$, $W_{r \rightarrow 0_2}(s)$ с параметрами табл. 2
 Fig. 10. Bode diagrams of transfer functions $W_{r \rightarrow 0_1}(s)$, $W_{r \rightarrow 0_2}(s)$ with the parameters of Table 2

Таблица 2
 Table 2

Выбранные точки политопа неопределенности для проверки робастного качества
 Selected points of the uncertainty polytope for testing robust performance

Параметр	Точка в политопе неопределенности				
	k_{\min}	k_{\max}	f_{\min}	f_{\max}	$(k_{\min} + k_{\max})/2$
k	k_{\min}	k_{\max}	f_{\min}	f_{\max}	$(k_{\min} + k_{\max})/2$
f	f_{\min}	f_{\max}	f_{\min}	f_{\max}	$(f_{\min} + f_{\max})/2$

Заключение

В данной статье рассмотрен алгоритм параметрического синтеза модального регулятора по выходу с использованием биальтернированного произведения матриц и функций модальной кластеризации по трансформируемым D-областям на комплексной плоскости. Биальтернированное произведение матриц дает возможность сформировать матричные функции и функции модальной кластеризации для комплексных мод соответствующей D-области, а обычное произведение матриц позволяет сформировать матричные функции и функции модальной кластеризации вещественных мод. Эти функции гарантируют нахождение мод некоторой матрицы в соответствующей D-области при выполнении соответствующих условий (теорема 2). Предложенный на основе теоремы 2 алгоритм параметрической оптимизации, причем с ограниченным набором

функций модальной кластеризации, позволил синтезировать модальный динамический регулятор по выходу минимального порядка с робастным качеством для высоко колебательного объекта управления.

Список литературы

1. **Wonham M.** On pole assignment in multi-input, controllable linear system // IEEE Trans. Automatic Control. 1967. Vol. 12, N. 12. P. 660–665.
2. **Андреев Ю. Н.** Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976. 424 с.
3. **Willems J. C., Hesselink W. H.** Generic properties of the pole placement problem // Proceedings of the 7th IFAC Congress, Helsinki Finland. 1978. P. 1725–1729.
4. **Yang K., Orsi R.** Static output feedback pole placement via a trust region approach // IEEE Trans. Automatic Control. 2007. Vol. 52, N. 11. P. 2146–2150.
5. **Furuta K., Kim B.** Pole placement to a specified disc // IEEE Trans. Automatic Control. 1987. Vol. 32, N. 5. P. 423–427.
6. **Brash F. M., Pearson J. B.** Pole placement using dynamic compensator // IEEE Trans. Automatic Control. 1970. Vol. AC-15, N. 1. P. 34–43.
7. **Rosenthal J., Wang X. A.** Output feedback pole placement with dynamic compensators/ Report BS-R9516, ISSN 0924-0659. 1995. Amsterdam. 29 p.
8. **Haddad W. M., Bernstein D. S.** Controller design with regional pole constraints // IEEE Trans. Automatic Control. 1992. Vol. 37, N. 1. P. 54–69.
9. **Gutman S., Jury E. J.** A general theory for matrix root-clustering in subregions of the complex plane // IEEE Trans. Automatic Control. 1981. Vol. 26, N. 4. P. 853–863.
10. **Gutman S., Schwartz G.** A root-clustering theorem // IEEE Trans. Automatic Control. 1981. Vol. 26, N. 4. P. 940.
11. **Dengqing C.** Stability robustness measures of linear state-space models with structured perturbations // Systems Science and Math. Sciences. 1998. Vol. 11, N. 1. P.32–38.
12. **Saydy L., Tits A. L., Abed E. H.** Guardian maps and generalized stability of parametrized families of matrices and polynomials // Mathematics of control, signals and systems. 1990. Vol. 3. P. 345–371.
13. **Saussie D., Akhrif Q., Berard C., Saydy L.** Longitudinal flight control synthesis with guardian maps// AIAA Guidance, Navigation and Control Conference. 10-13 August 2009, Chicago Illinois. P. 1–27.
14. **Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.** Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Наука. 1970. 528 с.
15. **Stephanos C.** Sur une extension du calcul des substitutions lineaires // J. Math.Pures Appl. 1900. Vol.6. P. 73–128.
16. **Джури Э.** Инноры и устойчивость динамических систем / Пер. с англ. М.: Наука, 1979. 304 с.
17. **Farin G., Hansford D.** Practical linear algebra: a geometry toolbox. AK Peters Wellesley Massachusetts, 2005. 384 p.
18. **Gutman S.** Root clustering of a real matrix in an algebraic region // Int. J. Control. 1979. Vol. 29. P. 871–880.
19. **Anderson D. O., Bose N. K., Jury E. I.** Output feedback stabilization and related problems — solution via decision methods // IEEE Trans. Automatic Control. 1975. Vol. 20, N. 1. P. 53–66.
20. **Краснощеченко В. И.** Синтез робастного динамического H_∞ -регулятора низкого порядка с использованием линейных матричных неравенств и проекционных лемм // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. Т. 19, № 4. С.219–230.

Synthesis of Dynamic Output Feedback Controller Using Functions of Matrix Root-Clustering in D-Regions

V. I. Krasnoschechenko, v.krasnoschechenko@yandex.ru,

Bauman Moscow State Technical University, Kaluga, 248000, Kaluga Branch, Russian Federation,

Corresponding author: **Krasnoschechenko Vladimir I.**, PhD, Associate Professor,
Bauman Moscow State Technical University, Kaluga, 248000, Kaluga Branch, Russian Federation,
e-mail: v.krasnoschechenko@yandex.ru

Accepted on December 15, 2022

Abstract

This article considers an algorithm for the synthesis of dynamic output controller, where the eigenvalues of a closed control system should be located in a given region (*D*-region) of the complex plane. The main direction of the research is to synthesize dynamic controllers of minimal order when there is no complete controllability at the output. For this purpose, a brief excursion into the external Grassmann algebra is made with the purpose of determining the external product of vectors, on the basis of which the operation of the bialternate product of matrices is explained. The use of the bialternate product of matrices made it possible to introduce the functions of matrix root-clustering of complex eigenvalues located in separate transformable *D*-regions. For the usual product of matrices, the functions of matrix root-clustering of real eigenvalues located in separate transformable *D*-domains are introduced. The functions of matrix root-clustering are transforming, respectively, complex or real points of a given bounded or unbounded *D*-region of the complex plane into a left half-plane. The article considers the main *D*-domains most widely used in practice (disk, cone, stability margin), presents their matrix root-clustering and functions of matrix root-clustering of real and complex modes. An algorithm for parametric optimization of dynamic output feedback controller over *D*-domains has been developed. Practical examples of synthesis are considered. For a fourth-order object (a two-mass weakly damped system with two integrators and parametric uncertainty), a second-order dynamic controller providing robust quality has been synthesized.

Keywords: Bialternate product, dynamic output feedback controller, functions of matrix root-clustering, *D*-regions, parametric optimization

For citation:

Krasnoschechenko V. I. Synthesis of Dynamic Output Feedback Controller Using Functions of Matrix Root-Clustering in *D*-Regions, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2023, vol. 24, no. 5, pp. 227–239.

DOI: 10.17587/mau.24.227-239

References

1. **Wonham M.** On pole assignment in multi-input, controllable linear system, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1967, vol. 12, no. 12, pp. 660–665.
2. **Andreev Yu. N.** Control of finite-dimensional linear plants, Moscow, Nauka, 1976, 424 p. (in Russian).
3. **Willems J. C., Hesselink W. H.** Generic properties of the pole placement problem, *Proceedings of the 7th IFAC Congress*, Helsinki Finland, 1978, pp. 1725–1729.
4. **Yang K., Orsi R.** Static output feedback pole placement via a trust region approach, *IEEE Trans. Automatic Control*, 2007, vol. 52, no. 11, pp. 2146–2150.
5. **Furuta K., Kim B.** Pole placement to a specified disc, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1987, vol. 32, no. 5, pp. 423–427.
6. **Brash F. M., Pearson J. B.** Pole placement using dynamic compensator, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1970, vol. AC-15, no. 1, pp. 34–43.
7. **Rosenthal J., Wang X. A.** Output feedback pole placement with dynamic compensators, Report BS-R9516, ISSN 0924-0659, 1995, Amsterdam, 29 p.
8. **Haddad W. M., Bernstein D. S.** Controller design with regional pole constraints, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1992, vol. 37, no. 1, pp. 54–69.
9. **Gutman S., Jury E. J.** A general theory for matrix root-clustering in subregions of the complex plane, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1981, vol. 26, no. 4, pp. 853–863.
10. **Gutman S., Schwartz G.** A root-clustering theorem, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1981, vol. 26, no. 4, pp. 940.
11. **Dengqing C.** Stability robustness measures of linear state-space models with structured perturbations, *Systems Science and Math. Sciences*, 1998, vol. 11, no. 1, pp. 32–38.
12. **Saydy L., Tits A. L., Abed E. H.** Guardian maps and generalized stability of parametrized families of matrices and polynomials, *Mathematics of control, signals and systems*, 1990, vol. 3, pp. 345–371.
13. **Saussie D., Akhrif Q., Berard C., Saydy L.** Longitudinal flight control synthesis with guardian maps, *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, 10–13 August 2009, Chicago Illinois, pp. 1–27.
14. **Efimov N. V., Rosendorn E. R.** Linear algebra and multi-dimensional geometry, Moscow, Nauka, 1970, 528 p. (in Russian).
15. **Stephanos C.** Sur une extension du calcul des substitutions lineaires, *J. Math. Pures Appl.*, 1900, vol. 6, pp. 73–128.
16. **Jury E. I.** Inners and stability of dynamic systems, Moscow, Nauka, 1979, 304 p. (in Russian).
17. **Farin G., Hansford D.** Practical linear algebra: a geometry toolbox, AK Peters Wellesley Massachusetts, 2005, 384 p.
18. **Gutman S.** Root clustering of a real matrix in an algebraic region, *Int. J. Control*, 1979, vol. 29, pp. 871–880.
19. **Anderson D. O., Bose N. K., Jury E. I.** Output feedback stabilization and related problems — solution via decision methods, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1975, vol. 20, no. 1, pp. 53–66.
20. **Krasnoschechenko V. I.** Synthesis H_∞ -robust regulator of the low order by using of linear matrix inequalities and projective lemmas, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no 4, pp. 219–230 (In Russian).