УДК 681.513 DOI: 10.17587/mau.24.122-130

В. И. Ловчаков, д-р техн. наук, проф., lovvi50@mail.ru,
Тульский государственный университет

Выбор весовых коэффициентов квадратичного функционала качества в задаче АКОР Летова—Калмана

Для линейных стационарных одномерных объектов управления рассматривается обратная задача аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР), которая состоит в определении весовых коэффициентов квадратичного функционала оптимальности процесса управления, обеспечивающих замкнутой системе регулирования заданные значения первичных показателей качества (времени переходных процессов, перерегулирования и статической ошибки). Она анализируется применительно к задаче АКОР в постановке Летова—Калмана.

Предлагается способ ее решения, основанный на преобразовании задачи АКОР к канонической форме, в которой объект управления описывается в канонической форме фазовой переменной, а функционал качества определяется как интеграл от суммы квадратов канонических фазовых координат объекта, равных соответствующим производным фазовой переменной, с определенными весовыми коэффициентами, а также квадрата сигнала управления. Показывается, что решение обратной канонической задачи АКОР Летова—Калмана определяется значениями только трех ненулевых весовых коэффициентов критерия, причем один из них имеет единичное значение. Значения двух других коэффициентов предлагается находить в процессе моделирования синтезированной оптимальной системы управления из условий обеспечения для нее значений первичных показателей качества не более заданных.

Полученные результаты, представленные в форме теорем 1 и 2, распространены на синтез астатических систем управления, в которых для получения астатизма к выходу объекта подключается дополнительный интегратор. Поскольку такой "расширенный" объект управления описывается с использованием вектора состояния, имеющего первые две фазовые координаты канонического вида, то синтез оптимальной системы осуществляется без преобразования описания объекта к канонической форме фазовой переменной и обратно. Конструирование астатической системы управления иллюстрируется примером.

Ключевые слова: *линейный одномерный объект, квадратичный критерий качества, аналитическое конструирование оптимального регулятора (АКОР), статическая ошибка, перерегулирование, быстродействие*

Введение

К линейно-квадратичным задачам управления, или задачам аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) [1—4], относятся задачи структурно-параметрического синтеза линейных систем управления на основе минимизации интегрального квадратичного функционала (критерия) качества. Задачи данного типа впервые были сформулированы и решены в работах А. М. Летова [6] и Р. Э. Калмана [5] в шестидесятые годы прошлого столетия. В настоящее время метод АКОР Калмана—Летова получил признание специалистов автоматического управления и стал классическим методом синтеза систем управления [3, 4]. Это явилось следствием широкого применения в теории АКОР интегральных квадратичных критериев качества процессов управления, подынтегральная функция которых представляется как сумма произведений фазовых координат объекта с весовыми коэффициентами $q_{ij} > 0$, $i, j = 1, 2, ..., n$ (они образуют матрицу Q), а также квадрата сигнала управления с коэффициентом r. Если эти весовые коэффициенты заданы, то дальнейший расчет матрицы коэффициентов обратных связей оптимального регулятора математически строго формализован и в основном сводится к решению матричного уравнения Риккати [1, 2].

Анализ "безраздельного господства" теории АКОР — методологии линейно-квадратичной оптимизации — проведен в работе [3], в которой оно связывается с такими очевидными достоинствами данной методологии, как

1) логическая завершенность и принципиальная математическая простота;

2) законченность и аналитический характер получаемых решений;

3) применимость к широкому классу линейных стационарных и нестационарных динамических объектов как с конечным, так и с бесконечным временем функционирования.

В этой работе одновременно критикуется данное чрезмерное "безраздельное господство" методологии линейно-квадратичной оптимизации в теории управления. Критика в основном сводится к следующим положениям:

1) квадратичные функционалы качества не имеют ясного физического смысла, и их широкое распространение во многом предопределяется простотой вычисления и удобством использования в аналитических исследованиях;

2) в теории АКОР не решена проблема выбора значений весовых коэффициентов квадратичного функционала и их связи с общепринятыми в инженерной практике первичными показателями качества синтезируемых систем (временем переходного процесса, перерегулированием, статической ошибкой регулирования и др.).

Впервые задача связи между весовыми коэффициентами Q, r квадратичного критерия и динамическими свойствами оптимизируемых процессов управления, именуемая *задачей обращения* или *обратной задачей АКОР*, была поставлена в работах Р. Калмана [8], Р. Беллмана и Р. Калабы [9]. Сложность решения этой задачи предопределяется недостаточной информативностью квадратичных функционалов качества, поскольку их значения определяются не только коэффициентами Q, r, но также и параметрами объекта управления. До настоящего времени предпринимаются многочисленные попытки решения обратной задачи АКОР. Здесь выделим, прежде всего, работы отечественных ученых А. М. Летова, А. А. Красовского, А. Г. Александрова, Я. Курцвейля, Ю. Б. Попова, Ю. П. Плотникова, В. Н. Романенко, Ч. П. Даса, Р. Т. Янушевского, В. А. Подчукаева, В. В. Григорьева, В. Д. Фурасова, Л. И. Кожинской, Н. В. Кухаренко, Г. А. Крыжановского и др. Однако необходимо подчеркнуть, что зависимость между весовыми коэффициентами критерия и инженерными показателями качества системы является сложной, и ее определение остается основной проблемой современной теории АКОР. Для ее решения предложены отдельные подходы и рекомендации [2, 10—14], которые имеют часто эвристический, эмпирический характер. К ним, например, относится метод равных вкладов максимальных отклонений [3], который основан на предположении, что известны предельно допустимые значения входных и выходных переменных объекта (или их отклонений). Соответственно весовые коэффициенты критерия находятся из гипотетического условия равенства слагаемых критерия при этих максимальных значениях переменных объекта. Такое задание коэффициентов функционала можно рассматривать только как предварительное. Согласно общей идее метода АКОР после определения оптимальных управлений следует проверка качества процессов в синтезированной системе путем ее моделирования с использованием цифровой вычислительной техники. Если процессы в этой системе в каком-либо отношении не удовлетворяют проектировщика, то проводится целенаправленная корректировка весовых коэффициентов критерия качества и повторное определение скорректированных оптимальных управлений. При необходимости этапы итерационного процесса АКОР повторяются несколько раз. Таким образом, процедура нахождения весовых коэффициентов критерия качества, как правило, сводится к многократному (итерационному) перерасчету параметров и моделированию синтезируемой системы управления при выбранных некоторым способом значениях искомых коэффициентов.

Каждая такая итерация перерасчета и моделирования оптимальной системы сопряжена с большим объемом вычислений по определению $n(n + 1)/2$ элементов симметричной матрицы Q и весового коэффициента r. Для уменьшения числа итераций могут применяться методы математического программирования [14]. В данной работе, вслед за работами [15, 16], в целях дополнительного уменьшения объема вычислений применительно к одномерным стационарным объектам решается задача установления наименьшего числа ненулевых элементов матрицы Q, достаточных для обеспечения в проектируемой системе управления заданных значений первичных показателей качества, а именно времени переходного процесса, перерегулирования и статической ошибки системы. Статья является непосредственным продолжением работы [15], в отличие от которой дополнительно анализируется третий первичный показатель качества — статическая ошибка системы.

Постановка задач управления и исследования

Исследуемый класс линейных стационарных объектов управления описывается матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{Z}(t) = AZ(t) + Bu(t), \tag{1}$$

где $Z(t)$ — вектор координат состояния объекта; $u(t)$ — его управляющее воздействие; A, B — постоянные матрицы параметров объекта размерностей $n \times n$, $n \times 1$ соответственно, для которых выполняется условие управляемости объекта. Предполагается, что координаты $z_i(t)$

вектора состояния объекта имеют физический смысл отклонений от заданного режима его работы.

Рассмотрим классическую стационарную задачу АКОР Калмана—Летова с интегральным квадратичным критерием оптимальности процесса управления

$$I = \int_0^\infty (Z^{\mathrm{T}}(t)QZ(t) + ru^2(t))dt, \qquad (2)$$

где Q — симметричная положительно определенная матрица, составленная из весовых коэффициентов q_{ij}; r — положительный весовой коэффициент функционала качества. Задача АКОР формулируется следующим образом [7, 17]: необходимо найти закон обратной связи $u(t) = F_0[Z(t)]$, образующий совместно с исходным объектом (1) асимптотически устойчивую замкнутую систему, доставляющую минимум функционалу качества (2) при переводе объекта управления из начального положения $X(0) = X_0$ в конечное нулевое.

Как известно [17—19], решением задачи (1), (2) является линейный алгоритм управления

$$u(t) = -r^{-1}B^{\mathrm{T}}PZ(t) = -KZ(t),\ K = r^{-1}B^{\mathrm{T}}P, \qquad (3)$$

в котором матрица P находится как положительно определенное решение матричного уравнения Риккати

$$PA + A^{\mathrm{T}}P - r^{-1}PBB^{\mathrm{T}}P + Q = 0. \qquad (4)$$

Соответственно, *задача исследования* ставится следующим образом: для объекта (1) с конкретными числовыми матрицами параметров требуется с использованием решения (3), (4) определить такие значения матрицы весовых коэффициентов Q (полагается коэффициент $r = 1$, поскольку он может принимать любое положительное значение без изменения результата синтеза регулятора), при которых синтезируемая система с управлением (3) имела бы для выделенного режима работы значения времени переходных процессов (времени регулирования) t_{p}, статической ошибки e и перерегулирования σ не более заданных $t_{\mathrm{p}z}$, e_z, σ_z, причем при синтезе системы целесообразно использовать минимальное число ненулевых элементов матрицы коэффициентов Q.

Подчеркнем, что в формулировке задачи исследования в соответствии с классической теорией автоматического управления под временем регулирования t_{p} понимается наименьшее время отработки системой ступенчатого воздействия $x_z \cdot 1(t)$ (x_z — сигнал задания регулятора), по истечении которого отклонение выходной переменной объекта от установившегося значения не превышает принятого значения Δ "трубки" [17, 21]. При этом для обеспечения единственности решения сформулированной задачи исследования, как и в работах [15, 16], принимается $\Delta = \sigma_z = 4{,}321$ %, где заданное значение перерегулирования системы предполагается равным перерегулированию колебательного звена с коэффициентом демпфирования $\sqrt{2}/2$ — фильтру Баттерворта второго порядка [17, 20].

Выбор весовых коэффициентов квадратичного функционала качества

В этом разделе излагаются и уточняются результаты, полученные автором в работах [15, 16].

Основной результат работы [15] с учетом дополнительного анализа статической точности системы управления можно сформулировать в виде **теоремы 1**: если в задаче АКОР (1), (2) объект описывается в каноническом фазовом пространстве с вектором состояния $X = (x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)})^{\mathrm{T}}$, а матрица Q критерия имеет один ненулевой элемент $q_{11} = q_1$, то ее решение при выборе достаточно большого значения $q_1 \gg 0$ определяет замкнутую систему управления со значениями времени регулирования и статической ошибки не более заданных $t_{\mathrm{p}z}$ и e_z. При предельных значениях весового коэффициента $q_1 \to \infty$ описание оптимальной замкнутой системы приближается к передаточной функции (ПФ) фильтра Баттерворта n-го порядка, из которой следует оценка весового коэффициента

$$q_1 \geqslant \frac{r}{\alpha^{2n}b^2},\ \alpha = \frac{t_{\mathrm{p}z}}{\tau_{\mathrm{p}}}, \qquad (5)$$

где t_{p} — время регулирования фильтра Баттерворта, описываемого ПФ, нормированной по Вышнеградскому [17, 22]; b — элемент вектора $B = (0, 0, \ldots, 0, b)^{\mathrm{T}}$ описания объекта в каноническом фазовом пространстве.

Доказательство теоремы в ее главной части (без учета статической точности системы) имеется в работе [15]. Справедливость теоремы при учете статической ошибки вытекает из следующего **замечания 1.** Согласно работе [15] весовой коэффициент q_1 критерия определяет общий коэффициент усиления K_r синтезируемой системы, которая сохраняет устойчивость при его любых больших значениях. Из классической ТАУ известно [1, 17], что при увеличении коэффициента K_r устойчивой системы уменьшается значение статической ошибки системы. Поэтому при соответствующем увеличении коэффициента q_1 и, соответственно, K_r можно получить заданное значение статической ошибки e_z или менее этого значения для одновременного достижения требуемого времени регулирования системы, что и доказывает справедливость теоремы 1.

Необходимо подчеркнуть, что синтезированные в соответствии с теоремой 1 системы управления имеют повышенное быстродействие. Это для объектов с каноническим вектором состояния $X = (x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)})^{\text{т}}$ можно обосновать с использованием результата работы [16]. В этой работе показано, что для указанных объектов введение в квадратичный функционал качества составляющих $q_i x_i^2(t)$, $i = 2, 3, ..., n - 1$, только увеличивает время переходных процессов синтезируемой оптимальной системы, так как это в процессе минимизации функционала (13) [16] приводит к ограничению значений скорости, ускорения и других более высоких производных выходной переменной объекта.

Также отметим, что системы управления высокого порядка, синтезированные с использованием теоремы 1, движение которых при больших значениях q_1 приближается к движению фильтров Баттерворта, могут иметь существенные значения перерегулирования. Действительно, согласно работе [17], фильтры Баттерворта порядка $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ имеют значения перерегулирования $\sigma_2 = 4{,}321$, $\sigma_3 = 8{,}147$, $\sigma_4 = 10{,}828$, $\sigma_5 = 12{,}777$, $\sigma_6 = 14{,}251$, $\sigma_7 = 15{,}412$, $\sigma_8 = 16{,}349$ % и при дальнейшем увеличении n перерегулирование также увеличивается, но с уменьшающейся скоростью [17, 20]. Следовательно, все фильтры Баттерворта, за исключением фильтра второго порядка, имеют большее перерегулирование, чем заданное $\sigma_z = 4{,}321$ %.

Синтез систем с желаемым значением перерегулирования предлагается осуществлять с использованием **теоремы 2:** если в задаче АКОР (1), (2) объект описывается в каноническом фазовом пространстве с вектором состояния $X = (x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)})^{\text{т}}$, а матрица Q критерия имеет два ненулевых элемента $q_{11} = q_1$, $q_{22} = q_2$, то ее решение при выборе достаточно больших значений $q_1 \gg 0$ и $q_2 \gg 0$ определяет замкнутую систему управления со значениями времени регулирования, статической ошибки и перерегулирования не более заданных t_{pz}, e_z, σ_z. При предельных значениях весовых коэффициентов $q_1 \to \infty$ и $q_2 = c(q_1)^{\frac{n-1}{n}} \to \infty$ (c = const) описание оптимальной замкнутой системы приближается к ПФ модифицированного фильтра Баттерворта n-го порядка, из которой следует оценка коэффициентов

$$q_1 \geqslant \frac{r}{b^2}\left(\frac{1}{\alpha^{2n}} - a_1^2\right), \quad \alpha = \frac{t_{\text{pz}}}{\tau_{\text{p}}},$$
$$q_2 \geqslant a\left(q_1\right)^{\frac{n-1}{n}} \Big/ \sqrt[n]{b^2}, \tag{6}$$

где параметры a, τ_{p} определяются с использованием табл. 1 приложения в соответствии с порядком применяемого модифицированного фильтра Баттерворта.

Справедливость теоремы 2, аналогично теореме 1, вытекает также из результатов работы [15] с учетом вышеприведенного замечания 1.

Необходимо подчеркнуть, что теоремы 1 и 2 определяют решения обратной задачи АКОР при описании объекта в управляемой канонической форме (представлении) [23], которая также называется канонической формой фазовой переменной [18, 24]. Она характеризуется фазовой переменной $x(t)$ и вектором состояния объекта $X = (x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)})^{\text{т}}$. В этом фазовом пространстве модель объекта определяется матрицей, являющейся матрицей Фробениуса, в последней строке которой располагаются коэффициенты характеристического уравнения объекта. Если модель объекта (1) представлена с использованием неканонического вектора состояния, то предлагается предварительно осуществить линейное преобразование фазовых координат объекта $X(t) = DZ(t)$ с невырожденной матрицей D, при которой описание объекта принимает управляемую каноническую форму (D определяется известными способами [1, 12]). Используя указанное решение и преобразование координат $Z(t) = D^{-1}X(t)$, несложно найти решение

$$Q = (D^{-1})^{\text{т}} \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q_2 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} D^{-1} \tag{7}$$

обратной задачи АКОР для объекта (1) с неканоническим вектором состояния.

Синтез оптимальных астатических систем

Необходимо отметить, что полученные результаты, представленные в теоремах 1—2, могут быть непосредственно (без преобразования описания объекта к канонической форме фазовой переменной и обратно) применены к синтезу астатических систем управления, в которых для получения астатизма к выходу объекта подключается дополнительный интегратор. Состояние такого "расширенного" объекта возможно описать вектором

$$X = (x_1, x_2, \bar{X})^{\mathrm{T}} = (x, \dot{x}, \bar{X})^{\mathrm{T}}, \tag{8}$$

где $x_1(t) = x(t)$ — выходной сигнал интегратора; $x_2(t) = \dot{x}(t)$ — выход объекта; $\bar{X}$ — вектор состояния исходного объекта. Использование модели объекта с вектором состояния (8), имеющего первые две канонические фазовые координаты, и квадратичного критерия с диагональной матрицей Q размерности $(n + 1)(n + 1)$, для которой ненулевыми являются первые два элемента, обеспечивает проведение синтеза оптимального регулятора напрямую в соответствии с теоремами 1—2.

Синтез оптимальной астатической системы рассмотрим на конкретном примере.

Пример. Пусть передаточная функция объекта управления имеет вид

$$W(p) = 1/(0{,}1p^3 + 0{,}8p^2 + 1{,}7p + 1). \tag{9}$$

Для данного объекта в работе [15] в каноническом фазовом пространстве решалась задача АКОР с квадратичным функционалом качества, имеющим ненулевые весовые коэффициенты $q_1 = 1$, $q_2 = 0{,}0293$, $r = 3{,}5 \cdot 10^{-7}$, в целях синтеза астатической системы управления, характеризующейся максимальным быстродействием и перерегулированием $\sigma_z = \Delta = 4{,}321$ %. В ней был получен оптимальный регулятор с параметрами $K = (1690{,}31 \;\; 762{,}786 \;\; 143{,}267 \;\; 10{,}7225)$, обеспечивающий отработку единичного задания с нулевой статической ошибкой, перерегулированием $\sigma_z = 4{,}163$ % и временем переходных процессов $t_{\mathrm{p}} = 0{,}745$ с, причем управляющий сигнал не превышал ограничения $|u(t)| \leqslant u_{\max} = 10$.

Теперь для объекта (9) решим задачу АКОР с использованием неканонического вектора состояния и моделированием системы убедимся, что выбором параметров q_1, q_2, r квадратичного функционала можно для нее получить первичные показатели качества не хуже, чем вышеуказанные.

При выборе вектора состояния объекта воспользуемся тем обстоятельством, что его характеристический полином имеет вещественные корни $p_1 = -1$, $p_2 = -2$, $p_3 = -5$. В этом случае данный объект можно представить как последовательное соединение трех апериодических звеньев, состояние которого соответственно характеризуется фазовыми координатами, равными выходным сигналам указанных звеньев. Такой объект описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + x_3(t); \\ \dot{x}_3(t) &= -2x_3(t) + x_4(t); \\ \dot{x}_4(t) &= -5x_4(t) + 10u(t). \end{aligned} \tag{10}$$

Подключив к выходу объекта (10) дополнительный интегратор с выходной координатой $x_1(t)$, приходим к описанию "расширенного" объекта

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \tag{11}$$

с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Для объекта (11) задача АКОР решалась в системе MATLAB с использованием стандартной программы (функции) lqr(A, B, Q, r) с последующим моделированием синтезированной системы управления. Результаты моделирования оптимальной системы управления, при котором определялись ее первичные показатели качества в зависимости от значений коэффициентов q_1, q_2 $(r = 1)$ квадратичного критерия, представлены в табл. 1 и табл. 2.

Табл. 1 отражает зависимость показателей качества системы от значений коэффициента q_1 критерия при $q_2 = 0$. Система управления по выходной фазовой координате $x_2(t)$, аналогично системе, рассмотренной в работе [15], имеет апериодические переходные процессы при отработке единичного ступенчатого сигнала, причем при увеличении коэффициента q_1 увеличивается максимальное значение управляющего сигнала u_{max} на интервале управления и увеличивается значение перерегулирования σ, что приводит к изменению времени переходных процессов $t_{пп}$, которое рассчитывалось с использованием "трубки" $\Delta = \sigma_z = 4{,}321$.

Далее при моделировании фиксировалось значение $q_1 = 64$ и изменялось значение коэффициента q_2 (табл. 2).

Табл. 2 демонстрирует, что увеличение коэффициента q_2 вызывает уменьшение значений перерегулирования σ системы (величина u_{max} изменяется совсем незначительно, на доли процента), что приводит к уменьшению значений времени переходных процессов системы, пока $\sigma \leqslant \Delta = 4{,}321$ %.

Последующий циклический процесс изменения коэффициентов q_1, q_2 квадратичного критерия позволил установить значения $q_1 = 29000$, $q_2 = 560$, при которых синтезируемая система управления имеет показатели качества $\sigma = 4{,}16$ %, $t_{пп} = 0{,}745$, $u_{max} = 10{,}02$ такие же, как и в системе управления, рассмотренной в работе [15]. Этот результат подтверждает поставленную цель рассмотрения примера синтеза системы.

Таблица 1
Table 1

Показатели качества системы управления при $q_1 = 0$

Quality indicators of the control system at $q_1 = 0$

q_1	σ, %	$t_{пп}$, с	u_{max}
0,5	0,17	5,76	1,006
1	0,87	4,53	1,039
2	1,88	3,69	1,101
4	2,96	3,08	1,197
8	3,99	2,62	1,327
16	4,92	3,41	1,495
32	5,73	3,096	1,712
64	6,42	2,79	1,983

Таблица 2
Table 2

Показатели качества системы управления при $q_1 = 64$

Quality indicators of the control system at $q_1 = 64$

q_2	σ, %	$t_{пп}$, с	u_{max}
0,5	6,11	2,768	1,975
1	5,81	2,748	1,967
2	5,23	2,684	1,951
4	4,15	1,824	1,919
8	2,31	1,912	1,863

Заключение

В работе предложен способ решения обратной задачи АКОР в постановке Летова—Калмана. Он предусматривает преобразование задачи АКОР к канонической форме, в которой объект управления описывается матричным дифференциальным уравнением с вектором состояния $X = (x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)})^{\mathrm{T}}$, а функционал качества определяется как интеграл от суммы квадратов канонических фазовых координат объекта с весовыми коэффициентами $q_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, а также квадрата сигнала управления с соответствующим коэффициентом $r > 0$. Доказаны теоремы 1 и 2, утверждающие, что решение обратной канонической задачи АКОР Летова—Калмана определяется значениями только трех ненулевых весовых коэффициентов критерия, причем один из них имеет единичное значение $r = 1$. Значения двух других коэффициентов q_1, q_2 предлагается находить в процессе моделирования синтезированной оптимальной системы управления из условий обеспечения для нее заданных значений первичных показателей качества (статической ошибки, времени переходных процессов и перерегулирования).

Данные результаты распространены на конструирование астатических систем управления, состояние которых описывается вектором состояния, имеющим только первые две фазовые координаты канонического вида. Примечательно, что синтез данных систем осуществляется без преобразования описания объекта к канонической форме фазовой переменной и обратно.

Приложение. Модифицированные полиномы и фильтры Баттерворса

Согласно работе [16] модифицированные фильтры Баттерворта имеют передаточную функцию

$$W_0(q) = 1 / G(q) = 1/(q^n + g_{N-1}q^{n-1} + \\ + g_{N-2}q^{n-2} + \cdots + g_1 q + 1), \quad (\text{П-1})$$

Таблица 3
Table 3

Параметры и показатели систем с ПФ $W_0(q)$

Parameters and indicators of systems with the NTFS $W_0(q)$

n	a	Коэффициенты $G(q)$	Корни $G(q)$	T_i	ζ_i	τ_p
2	0	$g_1 = \sqrt{2}$	$p_{1,2} = -\sqrt{2}/2 \pm \sqrt{2}/2i$	1	$\zeta_1 = \sqrt{2}/2 = 0,707107$	2,9744
3	0,4760	$g_1 = 2,150236$ $g_2 = 2,073758$	$p_1 = -0,918078$ $p_{2,3} = -0,57784 \pm 0,869099i$	$T_1 = 1,089232$ $T_2 = 0,958164$	$\zeta_1 = 1$ $\zeta_2 = 0,553665$	3,8124
4	0,79572	$g_1 = 2,850881$ $g_2 = 3,665902$ $g_3 = 2,707730$	$p_{1,2} = -0,461477 \pm 0,966015i$ $P_{3,4} = -0,892388 \pm 0,275923i$	$T_1 = 0,9340713$ $T_2 = 1,070582$	$\zeta_1 = 0,431054$ $\zeta_2 = 0,955374$	4,5736
5	1,06233	$g_1 = 3,541902$ $g_2 = 5,741368$ $g_3 = 5,598041$ $g_4 = 3,346055$	$p_1 = -0,858401$ $p_{2,3} = -0,372580 \pm 1,010266i$ $P_{4,5} = -0,871247 \pm 0,495656i$	$T_1 = 1,164957$ $T_2 = 0,928695$ $T_3 = 0,997635$	$\zeta_1 = 1$ $\zeta_2 = 0,346013$ $\zeta_3 = 0,869187$	5,3220
6	1,29958	$g_1 = 4,227217$ $g_2 = 8,284891$ $g_3 = 9,99870$ $g_4 = 7,946964$ $g_5 = 3,986719$	$p_{1,2} = -0,887857 \pm 0,114812i$ $P_{3,4} = -0,796768 \pm 0,665763i$ $P_{5,6} = -0,308735 \pm 1,030546i$	$T_1 = 1,117007$ $T_2 = 0,963107$ $T_3 = 0,929542$	$\zeta_1 = 0,991742$ $\zeta_2 = 0,767373$ $\zeta_3 = 0,286982$	6,0633

определяемую модифицированным полиномом Баттерворта *G(q),* удовлетворяющим соотношению

$$G(q)G(-q) = (-1)^n q^{2n} - aq^2 + 1. \qquad (\text{П-2})$$

Результаты факторизации полинома (П-2) при значениях $n = 2, ..., 6$ представлены в табл. 3 с указанием значений параметра *a,* при которых динамическая система (П-1) имеет заданное перерегулирование, равное σ_z = 4,321 %. Отметим, что факторизацией этого полинома при a = 0 находятся стандартные полиномы Баттерворса, при этом фильтр Баттерворта второго порядка имеет значение перерегулирования 4,321 %, которое принято за заданное (желаемое) перерегулирование рассматриваемых динамических систем.

В табл. 3 параметры T_i, ζ_i соответствуют постоянным времени и коэффициентам демпфирования элементарных, последовательно соединенных звеньев апериодического и колебательного характера, которые можно выделить в системе с передаточной функцией $W_0(q)$.

Подчеркнем, что передаточная функция $W_0(q)$, полученная указанным способом, описывает динамическую систему, которая имеет минимальное относительное время переходных процессов τ_p при заданном значении перерегулирования σ_z = 4,321 %, причем время τ_p определяется с использованием "трубки" $\Delta = \sigma_z$ = 4,321 %.

Список литературы

1. **Красовский А. А.** и др. Справочник по теории автоматического управления. М.: Наука, 1987. 712 с.
2. **Красовский А. А.** Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973. 558 с.
3. **Филимонов Н. Б.** Проблема качества процессов управления: смена оптимизационной парадигмы // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 12. С. 2—10.
4. **Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б.** Динамическая коррекция процессов регулирования методом линейно-квадратичной оптимизации // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 5. С. 9—14.
5. **Kalman R. E.** Contributions to the Theory of Optimal Control // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. 1960. Vol. 5, N. 1. P. 102—119.
6. **Летов А. М.** Аналитическое конструирование регуляторов. I, II, III // Автоматика и телемеханика. 1960. № 4. С. 406—411; № 5. С. 561—568; № 6. С. 661—665.
7. **Летов А. М.** Математическая теория процессов управления. М.: Наука, 1981. 256 с.
8. **Калман Р. Э.** Когда линейная система управления является оптимальной? // Труды Америк. об-ва инж. механиков. Т. 86, Сер. D. 1964. № 1. С. 69—84.
9. **Беллман Р., Калаба Р.** Обратная задача программирования в автоматическом управлении // Механика: Сб. перев. иностр. статей. 1964. Т. 88, № 6. С. 3.
10. **Абдулаев Н. Д., Петров Ю. П.** Теория и методы проектирования оптимальных регуляторов. Л.: Энергоатомиздат, 1985. 240 с.
11. **Александров А. Г.** Синтез регуляторов многомерных систем. М.: Машиностроение, 1986. 272 с.
12. **Александров А. Г.** Оптимальные и адаптивные системы. М.: Высшая школа, 1989. 264 с.

13. **Кухаренко В. Н.** Выбор коэффициентов квадратичных функционалов при аналитическом конструировании регуляторов // Изв. вузов. Электромеханика. 1978. № 4. С. 411—417.

14. **Дегтярев Г. Л., Ризаев И. С.** Синтез локально-оптимальных алгоритмов управления. М.: Машиностроение, 1991. 304 с.

15. **Ловчаков В. И., Шибякин О. А.** Модифицированные фильтры Баттерворса в решении обратной задачи аналитического конструирования оптимальных регуляторов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2021. Т. 22, № 2. С. 71—82. DOI: 10.17587/mau.22.71-82.

16. **Ловчаков В. И.** Синтез линейных систем управления с максимальным быстродействием и заданным перерегулированием // Мехатроника, автоматизация, управление. 2020. Т. 21, № 9. С. 499—510.

17. **Пупков К. А.** Методы классической и современной теории автоматического управления: в 3 т. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. Т. 2: Синтез регуляторов и теория оптимизации систем автоматического управления. 736 с.

18. **Квакернак Х., Сиван Р.** Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977. 650 с.

19. **Kawasaki N., Kobayashi H., Shimemura E.** Relation between pole assignment and LQ-regulator // Int. J. Contr. 1998. Vol. 47, N. 4. P. 947—951.

20. **Lutovac Miroslav D.** Filter Design for Signal Processing using MATLAB and Mathematica. New Jersey, USA.: Prentice Hall, 2001.

21. **Гайдук А. Р.** Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). М.: Физматлит, 2012. 360 с.

22. **Ким Д. П.** Алгебраические методы синтеза САУ. М.: Физматлит, 2014, 164 с.

23. **Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л.** Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. СПб.: Наука, 2000. 475 с.

24. **Солодовников В. В., Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б.** Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов методом фазового пространства. I. Объекты с одномерным управляющим входом // Известия вузов. Приборостроение. 1982. № 6. С. 21—27.

Selection of Weight Coefficients of Quadratic Quality Functional in Solving ADOC Problem in the Letov—Kalman Formulation

V. I. Lovchakov, lovvi50@mail.ru,
Tula State University, Tula, 300600, Russian Federation

Corresponding author: **Lovchakov Vladimir I**., Dr. Sc., Full Professor, Tula State University, department of electrical engineering and electrical equipment, Tula, 300600, Russian Federation, e-mail: lovvi50@mail.ru

Accepted on November 29, 2022

Abstract

For linear stationary one-dimensional control objects, the inverse problem of analytical design of optimal controller (ADOC) is considered, which consists in determining the weight coefficients of the quadratic functional of the optimality of the control process, providing a closed control system with the set values of primary quality indicators (static error, transient time and overshoot). It is analyzed in relation to both the ADOC problem in the Letov-Kalman formulation. A method of its solution is proposed based on the transformation of the ADOR problem to a canonical form in which the control object is described by a matrix differential equation in the Frobenius form, and the quality functional is defined as an integral of the sum of the products of the canonical phase coordinates of the object with the corresponding weight coefficients, as well as the square of the control signal. It is shown that the solution of the inverse canonical ADOC Letov-Kalman problem is determined by the values of only three non-zero weighting coefficients of the criterion, and one of them has a single value. The values of the other two coefficients are proposed to be found in the process of modeling the synthesized optimal control system from the conditions of ensuring for it the values of primary quality indicators no more than the specified ones. The results obtained, presented in the form of Theorems 1 and 2, are extended to the synthesis of astatic control systems, in which an additional integrator is connected to the plant output to obtain astaticism. Since such an "extended" control object is described using a state vector that has the first two phase coordinates of the canonical form, the synthesis of the optimal system is carried out without converting the object description to the canonical form of the phase variable and vice versa. The construction of an astatic control system is illustrated by an example.

Keywords: *linear one-dimensional object, quadratic quality criterion, analytical design of the optimal controller (ADOC), static error, overshoot, speed.*

For citation:

Lovchakov V. I. Selection of Weight Coefficients of Quadratic Quality Functional in Solving ADOC Problem in the Letov—Kalman Formulation, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2023, vol. 24, no. 3, pp. 122—130.

DOI: 10.17587/mau.24.122-130

References

1. **Krasovskii A. A.** i dr. Handbook on the theory of automatic control, Moscow, Nauka Publ., 1987, 712 p (in Russian).

2. **Krasovskii A. A.** Automatic flight control systems and their analytical design, Moscow, Nauka Publ., 1973, 558 p (in Russian).

3. **Filimonov N. B.** The problem of the quality of management processes: a change in the optimization paradigm, *Mekhatronika, Avtomatizatsiia, Upravlenie,* 2010, no.12, pp. 2—10 (in Russian).

4. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** Dynamic Correction of Regulation Processes by Method of Linear-Square Optimization, *Mekhatronika, avtomatizatsiia, upravlenie,* 2011, no.5, pp. 9—14 (in Russian).

5. **Kalman R. E.** Contributions to the Theory of Optimal Control, *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana,* 1960, vol. 5, no. 1, pp. 102—119.

6. **Letov A. M.** Analytical design of regulators. I, II, III, *Avtomatika i telemekhanika,* 1960. no. 4, pp. 406—411; no. 5, pp. 561—568; no. 6, pp. 661—665 (in Russian).

7. **Letov A. M.** Mathematical theory of control processes, Moscow, Nauka Publ., 1981, 256 p (in Russian).

8. **Kalman R. E.** When is a linear control system optimal?, *Tpudy Amepik. ob-va inzh.-mekhanikov*, 1964, vol. 86, ser. D, no. 1, pp. 69—84 (in Russian).

9. **Bellman R., Kalaba R.** Inverse programming task in automatic control, *Mekhanika: Sb. pepev. inostp. statej.* 1964, vol. 88, no. 6, pp. 3.

10. **Abdulaev N. D.** Theory and methods of designing optimal controllers, Leningrad, Energoatomizdat Publ., 1985, 240 p. (in Russian).

11. **Aleksandrov A. G.** Synthesis of regulators of multidimensional systems, Moscow, Mashinostroenie Publ., 1986, 272 p. (in Russian).

12. **Aleksandrov A. G.** Optimal and adaptive systems, Moscow, Vysshaia shkola Publ., 1989, 264 p. (in Russian).

13. **Kuharenko V. N.** Choice of coefficients of quadratic functionals in the analytical design of controllers, *Izv. vuzov. Elektromekhanika*, 1978, no. 4, pp. 411—417 (in Russian).

14. **Degtyarev G. L.** Synthesis of locally optimal control algorithms, Moscow, Mashinostroenie Publ., 1991, 304 p. (in Russian).

15. **Lovchakov V. I., Shibjakin O. A.** Modified Butterworth filters in solving the inverse problem of analytical design of optimal controllers, *Mehatronika, Avtomatizacija, Upravlenie,* 2021, vol. 22, no. 2, pp. 71—82, DOI: 10.17587/mau.22.71-82 (in Russian).

16. **Lovchakov V. I.** Synthesis of Linear Control Systems with Maximum Speed and Given Overshoot, *Mekhatronika, Avtomatizatsiia, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 9, pp. 499—510 (in Russian).

17. **Pupkov K. A.** Methods of classical and modern control theory: in 3 vol., Moscow, MGTU im. N. E. Baumana Publ., 2000, 736 p. (in Russian).

18. **Kvakernak H., Sivan R.** Linear Optimal Control Systems, Moscow, Mir Publ., 1977, 650 p.(in Russian).

19. **Kawasaki N., Kobayashi H., Shimemura E.** Relation between pole assignment and LQ-regulator, *Int. J. Contr.*, 1998, vol. 47, no. 4, pp. 947—951.

20. **Lutovac Miroslav D.** Filter Design for Signal Processing using MATLAB and Mathematica, New Jersey, USA, Prentice Hall, 2001.

21. **Gajduk A. R.** Theory and methods of analytical synthesis of automatic control systems, Moscow, Fizmatlit Publ., 2012, 360 p. (in Russian).

22. **Kim D. P.** Algebraic methods of ACS synthesis. Moscow, Fizmatlit Publ., 2014, 164 p (in Russian).

23. **Andrievskij B. R., Fradkov A. L.** Selected chapters of the theory of automatic control with examples in the MATLAB language, SPb., Nauka, 2000, 475 p. (in Russian).

24. **Solodovnikov V. V., Filimonov A. B., Filimonov N. B.** Analytical design of optimal controllers by the phase space method. I. Objects with one-dimensional control input, *Izvestija vuzov. Priborostroenie*, 1982, no. 6, pp. 21—27 (in Russian).