УДК 517.977.1 DOI: 10.17587/mau.24.115-121

**А. Ю. Александров,** д-р физ.-мат. наук, проф., a.u.aleksandrov@spbu.ru,
**С. Б. Рузин,** аспирант, serruz001@gmail.com,
Санкт-Петербургский государственный университет

# Нелинейные алгоритмы управления группой мобильных агентов на отрезке

*Рассматривается группа мобильных агентов на прямой. Агенты понимаются как занумерованные точки, способные менять свое положение. Предполагается, что динамика агентов моделируется интеграторами второго порядка, причем каждый агент получает информацию от одного своего левого и одного своего правого соседа (не обязательно ближайших соседей). Требуется обеспечить заданное нелинейно-равномерное размещение агентов на отрезке прямой. Для решения поставленной задачи предлагаются нелинейные децентрализованные протоколы. Определяются условия на параметры управлений, при выполнении которых агенты сходятся к требуемым положениям. Исследуется робастность построенных протоколов управления по отношению к коммуникационному запаздыванию и переключениям сетевой топологии. При этом считается, что информация о значении запаздывания и о законе переключения может отсутствовать. Показывается, что при любом постоянном неотрицательном запаздывании и любом допустимом законе переключения связей гарантируется заданное размещение агентов. Доказательства сформулированных утверждений основаны на применении прямого метода Ляпунова и специальной формы метода декомпозиции. Используются оригинальные конструкции функций Ляпунова и функционалов Ляпунова—Красовского. Приводятся результаты численного моделирования, подтверждающие полученные теоретические выводы.*

***Ключевые слова:*** *мультиагентная система, управление формациями, интеграторы второго порядка, запаздывание, переключения, прямой метод Ляпунова, асимптотическая устойчивость, метод декомпозиции*

## Введение

Разработка децентрализованных алгоритмов управления формациями мобильных агентов является одной из наиболее актуальных проблем современной теории управления. Интерес к задачам такого рода обусловлен их широкими практическими приложениями. Децентрализованные алгоритмы используются для управления роботами, транспортными средствами, беспилотными подводными и летательными аппаратами, поведением животных и социальных групп [1, 2]. За последние годы было разработано множество эффективных подходов к решению указанной проблемы (см., например, работы [1—7] и цитируемую там литературу).

Важным классом задач управления формациями является размещение мобильных агентов на отрезке или заданной кривой [3, 4, 8—10]. В работах [8, 9] с помощью принципа усреднения были предложены линейные протоколы, обеспечивающие равномерное размещение агентов для случаев, когда их динамика моделируется интеграторами первого или второго порядка. Эти протоколы основаны на использовании информации, получаемой каждым агентом от двух своих ближайших (по номеру) соседей. В статье [11] принцип усреднения применялся в задаче равномерного размещения агентов за фиксированное время. В исследовании [12] результаты работ [8, 9] были обобщены на случай, когда каждый агент получает информацию о расстояниях до одного его левого и одного его правого соседей (не обязательно ближайших соседей). Кроме того, в статье [12] анализировалась возможность равномерного размещения агентов в условиях коммуникационного запаздывания и переключений топологии связей. Было доказано, что ни запаздывания, ни переключения не нарушают сходимости агентов к заданному распределению.

Однако следует отметить, что во многих прикладных задачах вместо равномерного распределения агентов требуется обеспечить неравномерное распределение. Например, в оптике, акустике, теории информации, физиологии и некоторых других областях часто вместо линейной используют логарифмическую шкалу [13, 14]. Кроме того, при размещении мобильных сенсоров на кривой обычно вводится целевая функция, определяющая, насколько хорошо данная кривая покрывается сенсорами. При этом сенсоры должны сходиться к распределению, для которого значение целевой функции оптимально [4, 15]. Заметим также, что задача нелинейно-равномерного размещения агентов связана с задачей синхронизации формаций по выходу [1, 16].

Существуют различные подходы к решению проблемы неравномерного размещения агентов. В частности, в работе [17] предполагалось, что целевые положения агентов заданы, и использовалась специальная потенциальная функция. В статье [7] для дискретной мультиагентной системы на прямой предложены протоколы, гарантирующие сходимость агентов к распределению с заданными отношениями расстояний между соседними агентами. Аналогичные задачи решались в работах [4, 15] для мобильных сенсорных сетей.

В статье [18] разработан подход к построению протоколов, обеспечивающих заданное нелинейно-равномерное (равномерное по отношению к некоторой функции) распределение, и исследована робастность этих протоколов относительно коммуникационного запаздывания и переключений сетевой топологии. В отличие от подходов, применявшихся в статьях [7, 15, 17], в работе [18] не предполагалось, что целевые положения агентов или отношения расстояний между ними являются известными. Вместе с тем, следует отметить, что в [18] рассматривался случай, когда динамика агентов моделируется интеграторами первого порядка. Однако с практической точки зрения более важными и интересными являются модели второго порядка [1]. Цель настоящей статьи — обобщить результаты работы [18] на случай, когда в качестве моделей агентов выбираются двойные интеграторы. Заметим также, что для доказательства полученных в статье [18] результатов использовались известные подходы к анализу устойчивости позитивных систем. В данной статье применяется другой подход, который основан на методе декомпозиции в форме, предложенной в монографии [19] и получившей дальнейшее развитие в работах [20—22].

## Постановка задачи

Рассмотрим на прямой группу, состоящую из $n$ мобильных агентов. Агенты понимаются как занумерованные точки, способные менять свое положение. Пусть $x_i(t)$ — координата $i$-го агента в момент времени $t$, $i = 1, ..., n$. Предположим, что динамика агентов моделируется уравнениями

$$\ddot{x}_i(t) + c\dot{x}_i(t) = u_i, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (1)$$

где $c$ — положительная постоянная (коэффициент демпфирования); $u_i$ — закон управления (протокол).

Кроме того, будем считать, что заданы отрезок $[a, b]$ и непрерывная и строго возрастающая при $\varsigma \in (-\infty, +\infty)$ функция $f(\varsigma)$. Концы отрезка $[a, b]$ рассматриваются как статичные агенты: $x_0(t) = a$, $x_{n+1}(t) = b$. Отметим, что $f(\varsigma)$ может представлять собой целевую функцию в задаче о размещении мобильных сенсоров [4, 15]. Требуется построить децентрализованные протоколы, гарантирующие сходимость агентов к положениям $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$, для которых точки $f(\tilde{x}_1), \ldots, f(\tilde{x}_n)$ равномерно распределены на отрезке $[f(a), f(b)]$. Также исследуем влияние коммуникационного запаздывания и переключений сетевой топологии на сходимость агентов к заданным положениям.

## Построение нелинейного протокола

Пусть выполнены следующие предположения.

***Предположение 1.*** Функция $f(\varsigma)$ глобально липшицева, т. е. существует постоянная $L > 0$ такая, что при любых $\varsigma_1, \varsigma_2 \in (-\infty, +\infty)$ справедливо неравенство $|f(\varsigma_1) - f(\varsigma_2)| \leqslant L|\varsigma_1 - \varsigma_2|$.

***Предположение 2.*** В каждый момент времени $t$ каждый $i$-й агент получает информацию от своего левого соседа с номером $m_i$ о величине $f(x_{m_i}(t)) - f(x_i(t))$ и от своего правого соседа с номером $l_i$ о величине $f(x_{l_i}(t)) - f(x_i(t))$, где $0 \leqslant m_i < i$, $i < l_i \leqslant n + 1$, $i = 1, ..., n$. Кроме того, каждый агент знает, сколько агентов расположено между ним и теми агентами, от которых ему поступают сигналы, но ему недоступна информация об общем числе агентов в системе.

При этих предположениях децентрализованный протокол можно выбрать в виде

$$u_i = k(\beta_i(f(x_{m_i}(t)) - f(x_i(t))) + \\ + \gamma_i(f(x_{l_i}(t)) - f(x_i(t)))), \; i = 1, \ldots, n,$$

где $k$ — положительный коэффициент;

$$\beta_i = \frac{l_i - i}{l_i - m_i}; \; \gamma_i = \frac{i - m_i}{l_i - m_i}; \; i = 1, \ldots, n.$$

Тогда соответствующая замкнутая система

$$\begin{gathered} \ddot{x}_i(t) + c\dot{x}_i(t) = k(\beta_i(f(x_{m_i}(t)) - f(x_i(t))) + \\ + \gamma_i(f(x_{l_i}(t)) - f(x_i(t)))), \; i = 1, \ldots, n \end{gathered} \tag{2}$$

будет иметь положение равновесия

$$x = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)^{\mathrm{T}}, \; \dot{x} = (0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

для которого

$$f(\tilde{x}_i) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{n+1} i, \; i = 1, \ldots, n.$$

**Теорема 1.** Для любого $c > 0$ можно указать число $k_0 > 0$ такое, что при всех $k \in (0, k_0)$ положение равновесия (3) системы (2) асимптотически устойчиво в целом.

*Доказательство.* Пусть

$$\omega_i(t) = x_i(t) - \tilde{x}_i, \; i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Тогда

$$\begin{gathered} \ddot{\omega}_i(t) + c\dot{\omega}_i(t) = k(\beta_i h_{m_i}(\omega_{m_i}(t)) + \\ + \gamma_i h_{l_i}(\omega_{l_i}(t)) - h_i(\omega_i(t))), \; i = 1, \ldots, n, \end{gathered}$$

где $h_i(\omega_i) = f(\omega_i + \tilde{x}_i) - f(\tilde{x}_i)$. Заметим, что $h_i(0) = 0$ и $\omega_i h_i(\omega_i) > 0$ при $\omega_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Далее с помощью замены переменных

$$y(t) = \omega(t) + \frac{1}{c}\dot{\omega}(t), \; z(t) = \dot{\omega}(t) \tag{5}$$

преобразуем полученную систему к виду

$$\begin{gathered} \dot{y}(t) = \frac{k}{c} Ph(y(t)) + \\ + \frac{k}{c} P\left(h\left(y(t) - \frac{1}{c}z(t)\right) - h(y(t))\right); \\ \dot{z}(t) = -cz(t) + kPh(y(t)) + \\ + kP\left(h\left(y(t) - \frac{1}{c}z(t)\right) - h(y(t))\right). \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь

$$\begin{gathered} \omega(t) = (\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t))^{\mathrm{T}}; \\ h(\omega) = (h_1(\omega_1), \ldots, h_n(\omega_n))^{\mathrm{T}}; \end{gathered}$$

$P = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ — постоянная матрица, у которой $p_{ii} = -1$, $p_{ij} = \beta_i$ при $j = m_i$, $p_{ij} = \gamma_i$ при $j = l_i$, а остальные элементы $i$-й строки равны нулю, $i = 1, \ldots, n$.

В работе [12] доказано, что для положительного вектора $\theta$, компоненты которого определяются по формулам

$$\theta_i = 1 - \frac{1}{2^i}, \; i = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

выполнено неравенство $P\theta < 0$. Значит (см. [23]), существует диагональная положительно определенная матрица $\Lambda$ такая, что матрица

$$\Lambda P + P^{\mathrm{T}}\Lambda \tag{8}$$

отрицательно определена.

Функцию Ляпунова для системы (6) строим в виде

$$V(y, z) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_0^{y_i} h_i(\varsigma) d\varsigma + \frac{1}{2}\|z\|^2, \tag{9}$$

где $\lambda_i$ — диагональные элементы матрицы $\Lambda$; $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора.

Функция (9) положительно определена. Кроме того, $V(y, z) \to +\infty$ при $\|y\| + \|z\| \to \infty$. Продифференцируем ее в силу системы (6). Имеем

$$\begin{gathered} \dot{V} = \frac{k}{c} h^{\mathrm{T}}(y(t))\Lambda Ph(y(t)) + \\ + \frac{k}{c} h^{\mathrm{T}}(y(t))\Lambda P\left(h\left(y(t) - \frac{1}{c}z(t)\right) - h(y(t))\right) - \\ - c\|z(t)\|^2 + kz^{\mathrm{T}}Ph(y(t)) + \\ + kz^{\mathrm{T}}P\left(h\left(y(t) - \frac{1}{c}z(t)\right) - h(y(t))\right). \end{gathered}$$

Учитывая предположение 1 и отрицательную определенность матрицы (8), приходим к неравенству

$$\begin{gathered} \dot{V} \leqslant -\alpha_1 \frac{k}{c}\|h(y(t))\|^2 + \\ + k\left(\frac{\alpha_2}{c^2} + \alpha_3\right)\|h(y(t))\|\|z(t)\| - \left(c - \alpha_4 \frac{k}{c}\right)\|z(t)\|^2. \end{gathered}$$

Здесь $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$ — положительные постоянные.

Следовательно, при достаточно малых значениях $k$ и для всех $y(t)$, $z(t) \in R^n$ справедлива оценка

$$\dot{V} \leqslant -\frac{1}{2}\left(\alpha_1 \frac{k}{c}\|h(y(t))\|^2 + c\|z(t)\|^2\right),$$

гарантирующая глобальную асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (6). А тогда тем же самым свойством обладает и положение равновесия (3) системы (2).

*Теорема доказана.*

**Размещение агентов при наличии коммуникационного запаздывания и переключений топологии связей**

Рассмотрим теперь случай, когда агенты получают сигналы от своих соседей с некоторым постоянным запаздыванием. Также будем предполагать, что связи между агентами могут включаться и выключаться в произвольные моменты времени. Если агент теряет контакт со своим правым (левым) соседом, то он переключается на какого-то другого правого (левого) соседа.

Таким образом, считаем, что выполнено следующее предположение.

***Предположение 3.*** В каждый момент времени $t$ каждый $i$-й агент получает информацию от своего левого соседа с номером $m_i^{(\sigma)}$ о величине $f(x_{m_i^{(\sigma)}}(t-\tau))-f(x_i(t))$ и от своего правого соседа с номером $l_i^{(\sigma)}$ — о величине $f(x_{l_i^{(\sigma)}}(t))-f(x_i(t))$, где $0\leqslant m_i^{(\sigma)}<i$, $i<l_i^{(\sigma)}\leqslant n+1$, $i=1, ..., n$. Здесь $\tau$ — постоянное неотрицательное запаздывание, а $\sigma=\sigma(t)$ — закон переключения топологии связей. Кроме того, каждый агент знает, сколько агентов расположено между ним и теми агентами, от которых ему поступают сигналы, но ему недоступна информация об общем числе агентов в системе.

***Предположение 4.*** В качестве допустимых законов переключения будем рассматривать кусочно-постоянные правосторонне непрерывные функции $\sigma(t):[0,+\infty)\to\{1,\dots,N\}$, имеющие на каждом ограниченном промежутке только конечное число точек разрыва.

В этом случае децентрализованный протокол можно определить по формуле

$$u_i=k(\beta_i^{(\sigma)}(f(x_{m_i^{(\sigma)}}(t-\tau))-f(x_i(t)))+$$
$$+\gamma_i^{(\sigma)}(f(x_{l_i^{(\sigma)}}(t-\tau))-f(x_i(t)))),i=1,\dots,n,$$

где $k$ — положительный коэффициент;

$$\beta_i^{(\sigma)}=\frac{l_i^{(\sigma)}-i}{l_i^{(\sigma)}-m_i^{(\sigma)}};\ \gamma_i^{(\sigma)}=\frac{i-m_i^{(\sigma)}}{l_i^{(\sigma)}-m_i^{(\sigma)}};\ i=1,\dots,n.$$

Получим замкнутую систему с переключениями и запаздыванием

$$\ddot{x}_i(t)+c\dot{x}_i(t)=k(\beta_i^{(\sigma)}(f(x_{m_i^{(\sigma)}}(t-\tau))-$$
$$-f(x_i(t)))+\gamma_i^{(\sigma)}(f(x_{l_i^{(\sigma)}}(t-\tau))-f(x_i(t)))),\quad(10)$$
$$i=1,\dots,n,$$

имеющую положение равновесия (3). Пусть начальные функции $\varphi(\xi)$ для решений этой системы принадлежат пространству непрерывных функций $C([-\tau,0],R^n)$ с равномерной нормой $\|\varphi\|_\tau=\max_{\xi\in[-\tau,0]}\|\varphi(\xi)\|$.

**Теорема 2.** Для любого $c>0$ можно указать число $k_0>0$ такое, что при всех $k\in(0,k_0)$ для любого неотрицательного запаздывания $\tau$ и любого допустимого закона переключения положение равновесия (3) системы (10) асимптотически устойчиво в целом.

*Доказательство.* Последовательно проводя замены переменных (4) и (5), приводим рассматриваемые уравнения к виду

$$\dot{y}(t)=-\frac{k}{c}h(y(t))-\frac{k}{c}\left(h\left(y(t)-\frac{1}{c}z(t)\right)-h(y(t))\right)+$$
$$+\frac{k}{c}Q^{(\sigma)}h(y(t-\tau))+\frac{k}{c}Q^{(\sigma)}\times$$
$$\times\left(h\left(y(t-\tau)-\frac{1}{c}z(t-\tau)\right)-h(y(t-\tau))\right);$$
$$\dot{z}(t)=-cz(t)-kh(y(t))-\quad(11)$$
$$-k\left(h\left(y(t)-\frac{1}{c}z(t)\right)-h(y(t))\right)+$$
$$+kQ^{(\sigma)}h(y(t-\tau))+kQ^{(\sigma)}\times$$
$$\times\left(h\left(y(t-\tau)-\frac{1}{c}z(t-\tau)\right)-h(y(t-\tau))\right),$$

где $Q^{(\sigma)}=\{q_{ij}^{(\sigma)}\}_{i,j=1}^{n}$, причем $q_{ij}^{(\sigma)}=\beta_i^{(\sigma)}$ при $j=m_i^{(\sigma)}$, $q_{ij}^{(\sigma)}=\gamma_i^{(\sigma)}$ при $j=l_i^{(\sigma)}$, а остальные элементы $i$-й строки равны нулю, $i=1, ..., n$.

Рассмотрим функционал Ляпунова—Красовского

$$\tilde{V}(y_t,z_t)=(\mu+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta_i^{\mu}}\int_0^{y_i(t)}h_i^{\mu}(\varsigma)d\varsigma+$$
$$+\frac{k}{c}\sum_{i=1}^{n}\frac{\eta_i}{\theta_i^{\mu+1}}\int_{t-\tau}^{t}h_i^{\mu+1}(y_i(\xi))d\xi+$$
$$+\frac{1}{\mu+1}\|z(t)\|^{\mu+1}+\varepsilon\int_{t-\tau}^{t}\|z(\xi)\|^{\mu+1}d\xi,$$

где $\varepsilon$, $\eta_1$, ..., $\eta_n$ — положительные коэффициенты; $\mu$ — положительное рациональное число с нечетными числителем и знаменателем, величины $\theta_1$, ..., $\theta_n$ определяются по формуле (7).

Дифференцируя этот функционал в силу системы (11), имеем

$$\dot{\tilde{V}}\le-(\mu+1)\frac{k}{c}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta_i^{\mu}}h_i^{\mu+1}(y_i(t))+$$
$$+(\mu+1)\frac{k}{c}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{\theta_i^{\mu}}q_{ij}^{(\sigma)}h_i^{\mu}(y_i(t))h_j(y_j(t-\tau))+$$

$$+\frac{k}{c}\sum_{i=1}^{n}\frac{\eta_i}{\theta_i^{\mu+1}}\left(h_i^{\mu+1}(y_i(t))-h_i^{\mu+1}(y_i(t-\tau))\right)+$$
$$+\frac{k}{c^2}\|h(y(t))\|^{\mu}\left(\alpha_1\|z(t)\|+\alpha_2\|z(t-\tau)\|\right)+$$
$$+k\alpha_3\|h(y(t))\|\|z(t)\|^{\mu}+k\alpha_4\|h(y(t-\tau))\|\|z(t)\|^{\mu}+$$
$$+\alpha_5\frac{k}{c}\|z(t)\|^{\mu}\|z(t-\tau)\|-$$
$$-\left(c-\alpha_6\frac{k}{c}-\varepsilon\right)\|z(t)\|^{\mu+1}-\varepsilon\|z(t-\tau)\|^{\mu+1}.$$

Здесь $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$, $\alpha_5$, $\alpha_6$ — положительные постоянные.

В работе [18] доказано, что величины $\mu$, $\eta_1$, ..., $\eta_n$ можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство

$$-(\mu+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta_i^{\mu}}h_i^{\mu+1}(y_i(t))+(\mu+1)\times$$
$$\times\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{\theta_i^{\mu}}q_{ij}^{(\sigma)}h_i^{\mu}(y_i(t))h_j(y_j(t-\tau))+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\eta_i}{\theta_i^{\mu+1}}\left(h_i^{\mu+1}(y_i(t))-h_i^{\mu+1}(y_i(t-\tau))\right)\leqslant$$
$$\leqslant-\alpha_7\left(\|h(y(t))\|^{\mu+1}+\|h(y(t-\tau))\|^{\mu+1}\right),$$

где $\alpha_7 = \mathrm{const} > 0$. Получим

$$\dot{\tilde{V}}\le-\alpha_7\frac{k}{c}\left(\|h(y(t))\|^{\mu+1}+\|h(y(t-\tau))\|^{\mu+1}\right)+$$
$$+\frac{k}{c^2}\|h(y(t))\|^{\mu}\left(\alpha_1\|z(t)\|+\alpha_2\|z(t-\tau)\|\right)+$$
$$+k\alpha_3\|h(y(t))\|\|z(t)\|^{\mu}+k\alpha_4\|h(y(t-\tau))\|\|z(t)\|^{\mu}+$$
$$+\alpha_5\frac{k}{c}\|z(t)\|^{\mu}\|z(t-\tau)\|-$$
$$-\left(c-\alpha_6\frac{k}{c}-\varepsilon\right)\|z(t)\|^{\mu+1}-\varepsilon\|z(t-\tau)\|^{\mu+1}.$$

Пусть $\varepsilon < c/3$. Тогда при достаточно малых значениях $k$ справедлива оценка

$$\dot{\tilde{V}}\leqslant-\frac{1}{2}\left(\alpha_7\frac{k}{c}\left(\|h(y(t))\|^{\mu+1}+\|h(y(t-\tau))\|^{\mu+1}\right)+\right.$$
$$\left.+c\|z(t)\|^{\mu+1}+\varepsilon\|z(t-\tau)\|^{\mu+1}\right).$$

Следовательно (см. [24, 25]), нулевое решение системы (11), а значит, и положение равновесия (3) системы (10) глобально асимптотически устойчивы.

Теорема доказана.

## Результаты численного моделирования

Для численного моделирования рассмотрим группу, состоящую из шести агентов, динамика которых определяется уравнениями (10). Пусть $[a, b] = [1, 6]$, $f(\varsigma) = \mathrm{arctg}\varsigma$, $\tau = 5$, $c = 0{,}5$. Считаем, что переключения связей происходят каждые 10 единиц времени от ближайших к агенту соседей к следующим за ними (как левым, так и правым). Когда у всех агентов не остается соседей, на которых можно переключиться, счетчик сбрасывается, и переключения снова начинаются с ближайших соседей. Начальные функции для решений соответствующей системы (10) выбираются постоянными: $x_1(\xi) = 0{,}4$, $x_2(\xi) = 0{,}8$, $x_3(\xi) = -0{,}9$, $x_4(\xi) = 1{,}5$, $x_5(\xi) = -0{,}3$, $x_6(\xi) = 0{,}7$ при $\xi \in [-5, 0]$.

Сначала рассмотрим случай $k = 4$. Представленные на рис. 1 результаты моделирования демонстрируют отсутствие сходимости агентов к требуемому распределению.

Далее, в соответствии с установленными теоретическими выводами, уменьшаем значение коэффициента $k$. Рис. 2 соответствует случаю $k = 1$. Приведенные на этом рисунке графики подтверждают сходимость агентов к заданным положениям.

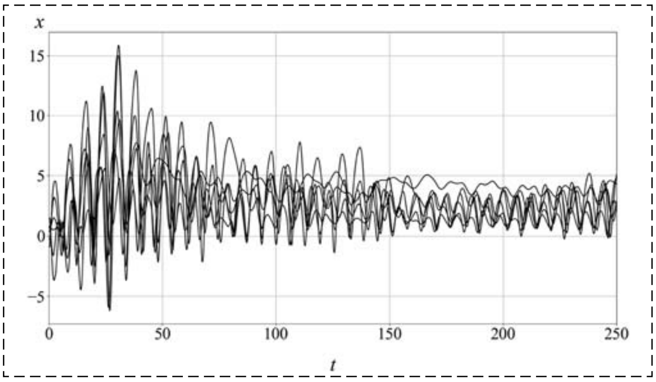


**Рис. 1. Динамика агентов ($k = 4$)**
**Fig. 1. Agent dynamics ($k = 4$)**

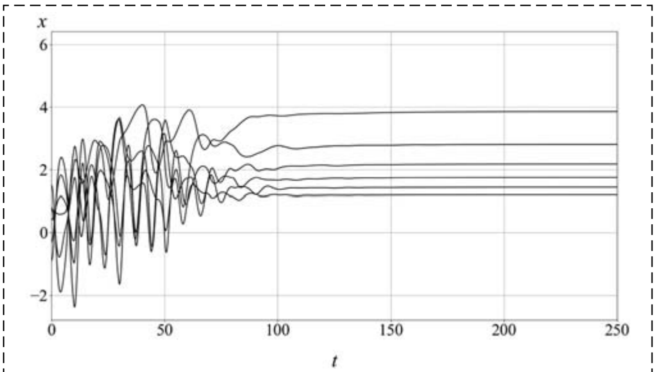


**Рис. 2. Динамика агентов ($k = 1$)**
**Fig. 2. Agent dynamics ($k = 1$)**

## Заключение

Исследована задача нелинейно-равномерного размещения на отрезке группы мобильных агентов, моделируемых интеграторами второго порядка. Предложены способы построения децентрализованных протоколов управления и определены условия, при выполнении которых эти протоколы обеспечивают заданное размещение агентов. Доказано, что ни запаздывание, ни переключения не нарушают сходимости агентов к требуемому распределению. Отметим, что результаты работы могут быть распространены на случай, когда агенты и отрезок заданы в пространстве произвольной размерности, при условии, что протоколы управления покоординатно развязаны, а также на случай, когда информация от различных соседей поступает с разными значениями запаздывания. В качестве направления дальнейших исследований отметим нахождение оценок скорости сходимости агентов к заданному распределению.

### Список литературы


1. **Проблемы** сетевого управления / Под ред. А. Л. Фрадкова. М.—Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015. 392 с.
2. **Ren W., Cao W.** Distributed Coordination of Multi-Agent Networks. London: Springer-Verlag, 2011.
3. **Oh K.-K., Park M.-C., Ahn H.-S.** A survey of multi-agent formation control // Automatica. 2015. Vol. 53. P. 424—440.
4. **Cortes J., Martinez S., Karatas T., Bullo F.** Coverage control for mobile sensing networks // IEEE Trans. Robot. Autom. 2004. Vol. 20, N. 2. P. 243—255.
5. **Зенкевич С. Л., Назарова А. В., Хуа Ч.** Моделирование и анализ движения группы мобильных роботов в среде ROS // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Т. 18, № 5. С. 317—320.
6. **Муслимов Т. З., Мунасыпов Р. А.** Децентрализованное групповое нелинейное управление строем беспилотных летательных аппаратов самолетного типа // Мехатроника, автоматизация, управление. 2020. Т. 21, № 1. С. 43—50.
7. **Щербаков П. С.** Управление формациями. Схема Ван Лоуна и другие алгоритмы // Управление большими системами. 2010. Вып. 30.1. С. 681—696.
8. **Wagner I. A., Bruckstein A. M.** Row Straightening via Local Interactions // Circuits Syst. Signal Process. 1997. Vol. 16, N. 2. P. 287—305.
9. **Проскурников А. В., Парсегов С. Э.** Задача равномерного размещения на отрезке для агентов с моделью второго порядка // Автоматика и телемеханика. 2016. № 7. С. 152—165.
10. **Aleksandrov A.** A problem of formation control on a line segment under protocols with communication delay // Systems Control Letters. 2021. Vol. 155. Art. no. 104990.
11. **Парсегов С. Э., Поляков А. Е., Щербаков П. С.** Достижение равноудаленного распределения агентов на отрезке за заданное время // Докл. РАН. 2013. Т. 448, № 5. С. 524—528.
12. **Aleksandrov A., Fradkov A., Semenov A.** Delayed and switched control of formations on a line segment: Delays and switches do not matter // IEEE Transactions on Automatic Control. 2020. Vol. 65, N. 2. P. 794—800.
13. **Palmer A. C.** Dimensional analysis and intelligent experimentation. Singapore: World Sci., 2008.
14. **Dehaene S., Izard V., Spelke E., Pica P.** Log or linear? Distinct intuitions of the number scale in Western and Amazonian indigene cultures // Science. 2008. Vol. 320, N. 5880. P. 1217—1220.
15. **Martinez S., Bullo F.** Optimal sensor placement and motion coordination for target tracking // Automatica. 2006. Vol. 42. P. 661—668.
16. **Wieland P., Sepulchre R., Allg wer F.** An internal model principle is necessary and sufficient for linear output synchronization // Automatica. 2011. Vol. 47. P. 1068—1074.
17. **Lageman C., Helmke U., Anderson B. D. O.** Formation control on lines, circles and ellipses: Genericity results and Morse theoretic ideas // Proc. IEEE Conf. Decis. Control, Osaka, Japan. 2015. P. 4278—4283.
18. **Aleksandrov A. Y., Andriyanova N. R.** Distributed algorithms for mobile agent deployment on a line segment under switching topology and communication delays // IEEE Control Systems Letters. 2022. Vol. 6. P. 3218—3223.
19. **Зубов В. И.** Аналитическая динамика гироскопических систем. Л.: Судостроение, 1970. 320 с.
20. **Косов А. А.** Исследование устойчивости сингулярных систем методом вектор-функций Ляпунова // Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Вып. 4. С. 123—129.
21. **Aleksandrov A. Yu., Chen Y., Kosov A. A., Zhang L.** Stability of Hybrid Mechanical Systems with Switching Linear Force Fields // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. 2011. Vol. 11, N. 1. P. 53—64.
22. **Александров А. Ю., Косов А. А., Чэнь Я.** Об устойчивости и стабилизации механических систем с переключениями // Автоматика и телемеханика. 2011. № 6. С. 5—17.
23. **Kaszkurewicz E., Bhaya A.** Matrix diagonal stability in systems and computation. Boston, Basel, Berlin: Birkh@user, 2000.
24. **Liberzon D.** Switching in Systems and Control. Boston, MA: Birkhauser, 2003.
25. **Hale J. K., Verduyn Lunel S. M.** Introduction to Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1993.


# Nonlinear Algorithms for Controlling a Group of Mobile Agents on a Segment


**A. Yu. Aleksandrov**, a.u.aleksandrov@spbu.ru, **S. B. Ruzin**, serruz001@gmail.com,
Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, 199034, Russian Federation,

*Corresponding author:* **Aleksandrov A. Yu.,** D. Sc, Professor, Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, 199034, Russian Federation, e-mail: a.u.aleksandrov@spbu.ru



*Accepted on November 16, 2022*



***Abstract***

*A group of mobile agents on a straight line is considered. Agents are understood as numbered points that can change their position. It is assumed that the dynamics of agents is modeled by second-order integrators, with each agent receiving information from one of its left and one of its right neighbors (not necessarily nearest neighbors). It is required to provide* *a given nonlinear-uniform (uniform with respect to a prescribed nonlinear function) deployment of agents on a straight line segment. It is worth mentioning that, in numerous applications such as optic, acoustics, physiology, information theory, thermodynamics, etc., instead of linear scale, nonlinear ones (for instance, logarithmic) are used. In addition, it should be noted that an important class of formation control problems is synchronization of processes with respect to certain functions of phase coordinates. To solve the stated problem, nonlinear decentralized protocols are proposed. The conditions on the control parameters are determined, under which the agents converge to the required positions. The robustness of the constructed control protocols with respect to communication delay and network topology switching (replacing chosen neighbors by the other ones) is investigated. In this case, it is assumed that information about the magnitude of the delay and about the switching law may be absent. It is shown that for any constant non-negative delay and any admissible law for switching connections, a given deployment of agents is guaranteed. The proofs of the stated statements are based on the application of the Lyapunov direct method and a special form of the decomposition method. Original constructions of Lyapunov functions and Lyapunov—Krasovskii functionals are used. The results of numerical simulation are presented, confirming the obtained theoretical conclusions.*

***Keywords:*** *multiagent system, formation control, second order integrators, delay, switching, Lyapunov direct method, asymptotic stability, robustness, decomposition method*

For citation:

**Aleksandrov A. Yu.**, **Ruzin S. B.** Nonlinear Algorithms for Controlling a Group of Mobile Agents on a Segment, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2023, vol. 24, no. 3, pp. 115—121.

DOI: 10.17587/mau.24.115-121

**References**

1. **Fradkov A. L.** ed. Problems of Network Control, Moscow—Izhevsk, Institute of Computer Sciences, 2015, 392 p. (in Russian).
2. **Ren W., Cao W.** Distributed Coordination of Multi-Agent Networks, London, Springer-Verlag, 2011.
3. **Oh K.-K., Park M.-C., Ahn H.-S.** A survey of multi-agent formation control, *Automatica,* 2015, vol. 53, pp. 424—440.
4. **Cortes J., Martinez S., Karatas T., Bullo F.** Coverage control for mobile sensing networks, *IEEE Trans. Robot. Autom.*, 2004, vol. 20, no. 2, pp. 243—255.
5. **Zenkevich S. L., Nazarova A. V., Hua Z.** Simulation and analysis of the movement of a group of mobile robots in ROS, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 5, pp. 317—320 (in Russian).
6. **Muslimov T. Z., Munasypov R. A.** Decentralized nonlinear group control of fixed-wing UAV formation, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 1, pp. 43—50 (in Russian).
7. **Shcherbakov P. S.** Formation control. The Van Loan scheme and other algorithms, *Upravlenie Bol'shimi Sistemami,* 2010, iss. 30.1, pp. 681—696 (in Russian).
8. **Wagner I. A., Bruckstein A. M.** Row straightening via local interactions, *Circuits Syst. Signal Process,* 1997, vol. 16, no. 2, pp. 287—305.
9. **Proskurnikov A. V., Parsegov S. E.** Problem of uniform deployment on a line segment for second-order agents, *Avtomatika i telemehanika,* 2016, no. 7, pp. 152—165 (in Russian).
10. **Aleksandrov A.** A problem of formation control on a line segment under protocols with communication delay, *Systems Control Letters,* 2021, vol. 155, Art. no. 104990.
11. Parsegov **S. E., Polyakov A. E., Shcherbakov P. S.** Nonlinear fixed-time control protocol for uniform allocation of agents on a segment, *Doklady RAN,* 2013, vol. 448, no. 5, pp. 524—528 (in Russian).
12. **Aleksandrov A., Fradkov A., Semenov A.** Delayed and switched control of formations on a line segment: Delays and switches do not matter, *IEEE Transactions on Automatic Control,* 2020, vol. 65, no. 2, pp. 794—800.
13. **Palmer A. C.** Dimensional Analysis and Intelligent Experimentation, Singapore, World Sci., 2008.
14. **Dehaene S., Izard V., Spelke E., Pica P.** Log or linear? Distinct intuitions of the number scale in Western and Amazonian indigene cultures, *Science,* 2008, vol. 320, no. 5880, pp. 1217—1220.
15. **Martinez S., Bullo F.** Optimal sensor placement and motion coordination for target tracking, *Automatica*. 2006, vol. 42, pp. 661—668.
16. **Wieland P., Sepulchre R., Allg wer F.** An internal model principle is necessary and sufficient for linear output synchronization, *Automatica,* 2011, vol. 47, pp. 1068—1074.
17. **Lageman C., Helmke U., Anderson B. D. O.** Formation control on lines, circles and ellipses: Genericity results and Morse theoretic ideas, *Proc. IEEE Conf. Decis. Control, Osaka, Japan,* 2015, pp. 4278—4283.
18. **Aleksandrov A. Y., Andriyanova N. R.** Distributed algorithms for mobile agent deployment on a line segment under switching topology and communication delays, *IEEE Control Systems Letters,* 2022, vol. 6, pp. 3218—3223.
19. **Zubov V. I.** Analytical Dynamics of Gyroscopic Systems, Leningrad, Sudostroenie, 1970, 320 p. (in Russian).
20. **Kosov A. A.** Stability investigation of singular systems by the Lyapunov vector-functions method, *Vestnik S.-Peterb. un-ta. Serija 10,* iss. 4, pp. 123—129 (in Russian).
21. **Aleksandrov A. Yu., Chen Y., Kosov A. A., Zhang L.** Stability of hybrid mechanical systems with switching linear force fields, *Nonlinear Dynamics and Systems Theory,* 2011, vol. 11, no. 1, pp. 53—64.
22. **Aleksandrov A. Yu., Kosov A. A., Chen Y.** Stability and stabilization of mechanical systems with switching, *Avtomatika i telemehanika,* 2011, no. 6, pp. 5—17 (in Russian).
23. **Kaszkurewicz E., Bhaya A.** Matrix Diagonal Stability in Systems and Computation, Boston, Basel, Berlin, Birkh@user, 2000.
24. **Liberzon D.** Switching in Systems and Control, Boston, MA, Birkhauser, 2003.
25. **Hale J. K., Verduyn Lunel S. M.** Introduction to Functional Differential Equations, New York, Springer-Verlag, 1993.