УДК 517.93 DOI: 10.17587/mau.24.3-13

В. П. Иванов, канд. техн. наук, доц.,ст. науч. сотр., vpivanov.spb.su@gmail.com,
Санкт-Петербургский федеральный исследовательский центр Российской академии наук

Новый подход к синтезу оптимального терминального управления нелинейными динамическими системами

Рассматривается проблема построения общих решений задач терминального управления нелинейными системами. Используются ранее доказанные положения о том, что оптимальная траектория является огибающей параметрического семейства поверхностей (параметрического семейства сингулярных кривых), и что оптимальное управление может быть найдено на этом семействе. Здесь обыгрывается тот факт, что в каждой точке оптимальной траектории вектор-функция множителей Лагранжа касателен к ней, но также касателен к сингулярной кривой. Приводится конструктивный метод построения сингулярных кривых на основе условного разделения переменных в уравнении Гамильтона—Якоби. "Свободные" параметры сингулярных кривых находятся из условия минимизации терминального функционала, что позволяет избежать явного решения краевой задачи для класса нелинейных динамических систем, упростить вычислительные алгоритмы. Сингулярные кривые описываются редуцированной (сокращенной) математической моделью. Таким образом, для синтеза закона оптимального управления мы должны использовать полную (исходную) математическую модель динамической системы, но для его вычисления в тот или иной момент времени достаточно и редуцированной (сокращенной). Указанное соображение определяет принцип информационного дуализма. Приведен иллюстрирующий пример. Показано, что такой подход можно применять и для решения некоторых классов дифференциальных игр.

Ключевые слова: *нелинейные динамические системы, оптимальное управление, огибающие, параметрическое семейство, сингулярные кривые, редуцированные модели, информационные дуализм*

Введение

Синтез оптимального управления динамическими системами различного назначения является задачей, без решения которой невозможно создание высокоэффективных устройств, систем, технологий. В первую очередь это относится к управлению изделиями авиационной, ракетной, космической техники, а в более широком смысле — к транспортным системам различного назначения, к управлению ядерными, химическими реакторами, энергетическими и экономическими системами и к управлению во многих других сферах практической деятельности человечества. Усложненность и разнообразие рассматриваемых задач определяет актуальность методов оптимизации.

В теории и практике оптимального управления нелинейными системами достаточно широко используются системы терминального управления, в которых целью управления является достижение заданной точки пространства состояний в заданный (терминальный) момент времени. Или в другой формулировке: целью является минимизация терминального функционала, определенного в заданной точке пространства состояний в данный момент времени. Отметим, что к задаче минимизации терминального функционала может быть сведена (при введении соответствующих переменных) большая часть задач оптимального управления с иными критериями качества.

Методам решения задач оптимального управления, в том числе численным, посвящено достаточно много научной литературы (см. работы [1—7]).

Настоящая работа базируется на обзоре результатов исследований автора [8—11] с добавлением новых фрагментов, новых интерпретаций. Общая идея подхода состоит в том, что непрерывная фазовая траектория может быть представлена как огибающая семейства сингулярных кривых, восставленных в каждой ее точке, в общем случае не являющихся фазовыми траекториями. Это создает предпосылки к поиску управления на семействе сингулярных кривых.

Постановка задачи оптимального терминального управления нелинейной динамической системой

Рассмотрим класс нелинейных управляемых динамических систем вида

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= f_j(x) + B_j(x)u_j,\ j = 1, \ldots, m, \\ \frac{dx_i}{dt} &= f_i(x), \qquad\qquad i = m+1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{1}$$

где $f = (f_1, ..., f_n)$ и $B = (B_1, ..., B_m)$ — заданные нелинейные вектор-функции; $B_j \neq 0$, $j = 1, ..., m$; $u = (u_1, ..., u_m)$ — m-мерный вектор управления; $m < n$.

В рамках данной статьи будем рассматривать случай, когда каждая j-я компонента управления ограничена отрезками $[U_{j\min}^{dop}, U_{j\max}^{dop}]$.

Задан терминальный функционал:

$$J = F[\|x_i(T) - x_{zad\ i}\|,\ i = m+1, \ldots, n], \tag{2}$$

определенный на решениях системы уравнений (1). F — некоторая заданная функция; $T \in \Im(t)$; $x_{zad} = (x_{zad1}, ..., x_{zad\ n})$ — заданные значения вектора состояния.

В момент $t = T$ могут быть введены дополнительные условия вида

$$h_i = h_i[x(T)],\ i = 1, ..., n,$$

которые могут быть включены в функционал (2) через дополнительные множители Лагранжа.

Так как система уравнений (1) — автономная, то множество $\Im(t)$ допустимо сузить до отрезка $[t_0, T]$, где t_0 — начальное значение аргумента t, $t_0 \in \Im(t)$. Момент времени T не фиксирован. Значения $x(t_0) = x_0$ известны.

Сформулируем задачу оптимального управления следующим образом [6, 7]: среди всех допустимых на отрезке $[t_0, T]$ управлений $u \in U$, переводящих точку (t_0, x_0) в точку $(T, x(T))$, найти такие, для которых функционал (2), определенный на решениях системы уравнений (1), принимает наименьшее значение при выполнении условий (3).

Введем вектор-функцию множителей Лагранжа $p = (p_1, ..., p_n)$ и составим гамильтониан задачи оптимизации H:

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i f_i + \sum_{j=1}^{m} p_j B_j u_j. \tag{3}$$

С использованием функции H в пространстве переменных $D^n(x, p)$, $x \in D^n(x, p)$, $p \in D^n(x, p)$, уравнения для x и p запишутся в следующей канонической форме [6, 7]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}. \end{aligned} \tag{4}$$

Отметим, что H и p на оптимальном решении непрерывны и к этому же приводит аналог условия Эрдмана—Вейерштрасса классического вариационного исчисления. Непрерывность сохраняется и в том случае, когда правые части уравнений (1) терпят разрыв.

Как доказано в работах [6, 7], для оптимизации управления $u(t)$ и фазовой траектории $x(t)$ в рамках принципа максимума необходимо существование такого ненулевого вектора p, что выполняются следующие условия:

1. Функция H переменного $u \in U$ при каждом $t \in [t_0, T]$, т. е. при фиксированных x, p, достигает при $u = u_{\text{opt}}(t)$ минимума:

$$H(x_{\text{opt}}, u_{\text{opt}}, p) = \min_{u \in U} H(x, u, p). \tag{5}$$

Таким образом, оптимальное управление на границе множества допустимого управления определяется как

$$u_{\text{opt}} = \arg\min_{u \in U} H(x, u, p). \tag{6}$$

2. Выполняются условия трансверсальности:

$$\left[H\delta t - \sum_{i=1}^{n} p_i \delta x_i\right]_{t_0}^{\text{т}} + \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)\delta x_i\right]_{t_0}^{\text{т}} = 0, \tag{7}$$

где δt, δx_i — произвольные вариации соответствующих переменных.

Обобщенные условия трансверсальности в силу независимости вариаций приводят к соотношениям:

$$\begin{aligned} [H]_{t_0}^{\text{т}} &= 0, \\ p_i\big|_{t_0}^{\text{т}} &= \frac{\partial F}{\partial x_i},\ i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{8}$$

Непосредственным следствием системы уравнений (4) и условия (5) является выполнение соотношения

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

С учетом (8) для автономных систем при не заданном явно аргументе имеем:

$$H = \text{const} = 0. \tag{9}$$

Из соотношения (5) ввиду особой структуры уравнений динамической системы (1) и, соответственно, гамильтониана (3), оптимальное управление определяется как

$$\begin{aligned} u_{\text{opt}} &= \arg\min_{u \in U} H(x, u, p) = \\ &= \arg\min_{u \in U} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i f_i + \sum_{j=1}^{m} p_j B_j u_j \right) = \\ &= \arg\min_{u \in U} \left(\sum_{j=1}^{m} p_j B_j u_j \right), \end{aligned} \tag{10}$$

откуда после преобразований имеем:

$$u_{\text{opt } j} = \begin{cases} U_{j\min}^{\text{dop}}, \text{ если } p_j B_j > 0, \\ u_{j \text{ osob}}, \text{ если } p_j = 0, \\ U_{j\max}^{\text{dop}}, \text{ если } p_j B_j < 0, \end{cases} \tag{11}$$
$$j = 1, \ldots, m,$$

где $u_{j \text{ osob}}$ — особое оптимальное управление.

Отметим, что если в начальный момент времени значения x известны (или могут быть оценены), то вектор p определен (с точностью до констант) согласно условиям трансверсальности лишь на правом конце фазовой траектории. Возникает специфическая краевая задача, после решения которой ("в принципе") тем или иным способом можно найти $p(t)$, а следовательно, и u_{opt} [6, 7].

В общем случае для нелинейных динамических систем аналитического решения краевая задача не имеет. Поэтому приходится использовать различные численные методы, такие как метод последовательных приближений, метод Ньютона, метод поворота опорной гиперплоскости, различные градиентные методы и т. д. [12, 13].

Однако вычислительные трудности, стоящие на этом пути, методические ошибки численных методов и ошибки округлений, проблемы машинного нуля, проблемы устойчивости и сходимости и др. делают процесс нахождения достоверных значений весьма трудным, а нередко (например, при выполнения требования реального масштаба времени, длительного участка особого управления и др.) и невозможным.

Поэтому представляется желательным использовать нетрадиционные методы синтеза оптимального управления, одним из которых, в частности, является метод огибающих.

Оптимальное управление и параметрическое семейство поверхностей (сингулярных кривых)

В работах [8—11] доказано, что оптимальную траекторию можно представить как огибающую параметрического семейства поверхностей с выделенными на них сингулярными кривыми, которые в общем случае не являются фазовыми траекториями. В силу теоремы Якоби возможна и другая трактовка: поверхность Гамильтона—Якоби, определяющая оптимальную фазовую траекторию, является огибающей частных параметрических поверхностей, формирующих сингулярные кривые.

И там же доказывается, что оптимальное управление может быть найдено на семействе сингулярных кривых.

Отметим, что на семейство поверхностей (сингулярных кривых) не налагается никаких ограничений, кроме условий огибания их оптимальной траекторией. Например, в плоском случае возможно использование квадратичных парабол. Но это требует трансформации закона управления. Можно пойти другим путем: не меняя структуры закона управления, построить рациональные сингулярные кривые, удовлетворяющие условиям огибания.

В рамках данной работы предлагается следующий подход.

Представим уравнение (9) в следующем виде:

$$H[x, u_{\text{opt}}(x, p), p] = H(x, p) = 0. \tag{12}$$

Введем непрерывную функцию $W(x)$, такую что $W[x(T)] = J = F[x(T)]$, $p = \dfrac{\partial W}{\partial x}$, и приведем уравнение (12) к уравнению Гамильтона—Якоби:

$$H(x, p)h\left(x, \frac{\partial W}{\partial x} \right) = 0. \tag{13}$$

Отметим, что уравнение (13) можно получить из уравнения Бэллмана с учетом автономности системы уравнений (1), условий трансверсальности (7), подставляя закон оптимального управления (11).

Представим функцию W в виде суммы функций, каждая из которых зависит только от одной из переменных x_ν, $\nu = 1, ..., n$, и аддитивной константы W_0, т. е.

$$W = \sum_{\nu=1}^{n} \overline{W}_\nu(x_\nu, \alpha) + W_0, \tag{14}$$

где $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

Определим канонические переменные p_ν, $\nu = 1, ..., n$:

$$p_\nu = \frac{\partial W}{\partial x_\nu} = \frac{\partial \overline{W}_\nu(x_\nu, \alpha)}{\partial x_\nu},\ \nu = 1, \ldots, n. \tag{15}$$

Согласно выражениям (15) переменные p_ν, $\nu = 1, ..., n$, оказываются функциями только одной x_ν и α, в то время как уравнения (1), (4) и условие $p = \dfrac{\partial W}{\partial x}$ говорят о том, что p_ν, $\nu = 1, ..., n$, в общем случае должны быть функциями всех $x_1, ..., x_n$ и остальных p_i, $i = 1, ..., n$, $i \ne \nu$.

Это противоречие может быть устранено, если приравнять значениям $\alpha_1, ..., \alpha_n$ некоторые определенные комбинации переменных $x_1, ..., x_n$, "замороженных" в данный момент времени, т. е.

$$\alpha_\nu = \alpha_\nu(x_1, \ldots, x_n),\ \nu = 1, \ldots, n. \tag{16}$$

Из выражений (11), (13), (15) следует, что $p_1, ..., p_n$ и управление u_{opt} можно определить на параметрическом семействе поверхностей, которое огибает оптимальная траектория, если в качестве параметров соответствующим образом взять "замороженные" фазовые координаты при условии, что $\det\left(\dfrac{\partial \alpha_i}{\partial x_\nu}\right) \ne 0,\ i, \nu = 1, \ldots, n.$

Фиксируя в качестве параметров "замороженные" в текущий момент времени значения фазовых координат, мы тем самым на семействе поверхностей выделим семейство сингулярных кривых. Назовем их мгновенными решениями $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$, поскольку они определяются функцией W, являющейся решением уравнения (13).

Вместе с тем, если W — полный интеграл уравнения (13), то по теореме Якоби имеем:

$$\beta = \frac{\partial W}{\partial \alpha},\ p = \frac{\partial W}{\partial x}. \tag{17}$$

Потребуем, чтобы α и β удовлетворяли преобразованию гамильтониана $H(x, p)$ в гамильтониан $H(\alpha)$, а также каноническим уравнениям, которые ввиду (13) запишутся как

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \beta} = 0,\ \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0. \tag{18}$$

Последние соотношения говорят о том, что для построения мгновенных решений можно проводить условное разделение переменных в уравнении Гамильтона—Якоби (см. [8]). Отметим, что мгновенные решения также должны удовлетворять условию минимизации функционала (2) относительно используемых параметров.

Нахождение оптимального терминального управления на семействе сингулярных кривых (мгновенных решений)

Представим уравнения (5) для p_1, ..., p_m в следующей форме:

$$\frac{dp_\nu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_\nu} = -p_\nu\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial B_\nu}{\partial x_\nu}u_\nu\right) - \\ - \sum_{\substack{j=1\\ j\ne\nu}}^{m} p_j\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_\nu} + \frac{\partial B_j}{\partial x_\nu}u_j\right) - \sum_{i=m+1}^{n} p_i\frac{\partial f_i}{\partial x_\nu}, \\ \nu = 1, \ldots, m. \tag{19}$$

Преобразуем это уравнение к виду

$$\frac{dp_\nu}{dt} + \Phi_\nu p_\nu = G_\nu,\ \ \nu = 1, \ldots, m, \tag{20}$$

где

$$\Phi_\nu = -\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial B_\nu}{\partial x_\nu}u_\nu\right),$$

$$G_\nu = -\sum_{\substack{j=1\\ j\ne\nu}}^{m} p_j\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_\nu} + \frac{\partial B_j}{\partial x_\nu}u_j\right) - \sum_{i=m+1}^{n} p_i\frac{\partial f_i}{\partial x_\nu}.$$

Проинтегрировав уравнение (24), получим

$$p_\nu = \exp(-\textstyle\int \Phi_\nu dt)(\int G_\nu \exp(\int \Phi_\nu dt)dt - C_\nu), \\ \nu = 1, \ldots, m. \tag{21}$$

Постоянные C_ν находятся из условий трансверсальности (7).

Отметим, что знак функций p_ν, $\nu = 1, ..., m$, как следует из (20), (21), определяется знаком функций G_ν [8, 9].

Рассмотрим участок особого управления.

В работе [14] доказано, что ввиду линейного вхождения управления в систему уравнений (1) особое оптимальное управление каждой j-й компоненты может быть найдено из системы уравнений

$$\frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{\partial H}{\partial u_j}\right) = 0, \\ k = 0, 1, \ldots, 2p_s \tag{22}$$

(p_s — порядок сингулярности) при выполнении следующих необходимых условий оптимальности:

$$(-1)^{p_s} \frac{\partial}{\partial u_j}\left[\frac{d^{2p_s}}{dt^{2p_s}}\left(\frac{\partial H}{\partial u_j}\right)\right] \geqslant 0, \quad (23)$$
$$p_s = 0, 1, 2, \ldots$$

если $\det\left\{\frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j}\right\} \equiv 0, i, j = 1, \ldots, m.$

Первоначально рассмотрим случай, когда порядок сингулярности равен единице. Тогда, согласно (22), особое управление можно найти из системы уравнений

$$p_j = 0; \frac{dp_j}{dt} = 0; \frac{d^2 p_j}{dt^2} = 0, j = 1, \ldots, m. \quad (24)$$

Из первых двух уравнений системы (24) следует, что на участке особого управления, ввиду (20), (21), $G_j = 0$. Разрешим это уравнение относительно переменной x_j. Если корень существует, то

$$x_j = \eta_j(x_\nu, p_\nu; \nu = 1, \ldots, n; \nu \neq j). \quad (25)$$

Третье уравнение системы (28) после преобразований запишем как

$$\frac{dG_j}{dt} = \frac{\partial G_j}{\partial x_j}(f_j + B_j u_{j\,osob}) + \frac{\partial G_j}{\partial \eta_j}\frac{d\eta_j}{dt}.$$

Из последнего соотношения можно найти особое управление:

$$u_{j\text{ osob}} = \frac{1}{B_j}\left(-f_j + \frac{d\eta_j}{dt}\right) \quad (26)$$

при выполнении необходимых условий оптимальности в следующей форме:

$$B_j \left.\frac{\partial G_j}{\partial x_j}\right|_{x_j = \eta_j} \leqslant 0, j = 1, \ldots, m. \quad (27)$$

Отметим, что корень уравнения $G_j = 0$ необязательно может быть единственным. Тогда каждый корень проверяется на выполнение необходимых (27) и достаточных (2) условий оптимальности.

В случае произвольного порядка сингулярности особое оптимальное управление, ввиду (1), находится из решения следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} p_j = 0; \frac{dp_j}{dt} = 0; \frac{d^2 p_j}{dt^2} = 0; \\ \ldots \frac{d^{2p_s} p_j}{dt^{2p_s}} = 0, j = 1, \ldots, m \end{gathered} \quad (28)$$

при выполнении необходимых условий (23). Как доказано в работе [14], особое управление "проявится" в последней производной.

Но можно находить особое управление из других соображений.

Отметим, что первые три уравнения системы (28) представляют собой уравнения первого порядка сингулярности. Продифференцировав условие сингулярности первого порядка ($2p_z - 1$) раз, можно найти особое управление в виде [8, 9]

$$u_{j\text{ osob}} = f\left(x, \eta_j, \frac{d\eta_j}{dt}, \ldots, \frac{d^{2p_z - 1}\eta_j}{dt^{2p_z - 1}}\right). \quad (29)$$

Вблизи точки первого порядка сингулярности (см. (20, 21)) $\operatorname{sign} p_j = \operatorname{sign} G_j$.

Так как особое управление порядка сингулярности p_z находится при четной производной сопряженной переменной (см. (29)), то ее знак также будет соответствовать знаку функции G_j.

Для нахождения управления на границе допустимого множества управлений из соотношений (1), (2), (5), (12) можно получить выражение

$$u_{\text{opt } j} = \begin{cases} U_{j\min}^{\text{dop}}, \text{ если } -G_j B_j > 0, \\ u_{j\text{ osob}}, \text{ если } x_j = \eta_j, \\ U_{j\max}^{\text{dop}}, \text{ если } -G_j B_j < 0, \end{cases} \quad (30)$$
$$j = 1, \ldots, m.$$

Увяжем управление с мгновенными решениями.

Использовав соотношения (12)—(14), составим уравнение Гамильтона—Якоби (12) в виде [8, 9]

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \overline{W}_j}{\partial x_j}(f_j + B_j u_j) + \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\partial \overline{W}_i}{\partial x_i} f_i = 0. \quad (31)$$

Условно разделим переменные:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \overline{W}_n}{\partial x_n} f_n = \alpha_n; \frac{\partial \overline{W}_i}{\partial x_i} f_i - \alpha_{i+1} = \alpha_i, \\ i = m+1, \ldots, n; \\ \frac{\partial \overline{W}_j}{\partial x_j}(f_j + B_j u_j) - \alpha_{j+1} = \alpha_j, \\ j = 1, \ldots, m, \alpha_{n+1} = 0. \end{gathered} \quad (32)$$

Проинтегрируем уравнения, не забывая, что в каждом из них только одна соответствующая переменная, а затем сложим и найдем функцию W:

$$W = \sum_{j=1}^{m} \int \frac{\alpha_j + \alpha_{j+1}}{f_j + B_j u_j} dx_j +$$
$$+ \sum_{i=m+1}^{n-1} \int \frac{\alpha_{i+1} + \alpha_i}{f_i} dx_i + \int \frac{\alpha_n}{f_n} dx_n + W_0.$$

Найдем выражения для составления мгновенных решений $\left(\beta = \frac{\partial W}{\partial \alpha}\right)$ (1), (18):

$$\int \frac{dx_m}{f_m + B_m u_m} = \int \frac{dx_{m+1}}{f_{m+1}};$$
$$\int \frac{dx_j}{f_j + B_j u_j} = \int \frac{dx_{j+1}}{f_{j+1} + B_{j+1} u_{j+1}};\ j = 1, \ldots, m-1; \quad (33)$$
$$\int \frac{dx_i}{f_i} = \int \frac{dx_{i+1}}{f_{i+1}};\ i = m+1, \ldots, n-1.$$

Из этих соотношений с учетом особенности системы уравнений (1) (так как $\frac{dx_j}{f_j + B_j u_j} = dt$) получим сингулярные модели для мгновенных решений. Минимальная модель определяется числом переменных, входящих в функционал, т. е. получим

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i, \alpha),\ i = m+1, \ldots, n. \quad (34)$$

Часть "замороженных" α определяют параметры η, от которых зависит управление. Оставшуюся их часть обозначим как $\{\tilde{\alpha}\}$, т. е. $\{\tilde{\alpha}\} = \{\alpha\}/\{\eta\}$. В итоге получим следующую сингулярную модель, описывающую мгновенные решения:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i, \eta_i, \tilde{\alpha}),\ i = m+1, \ldots, n. \quad (35)$$

Проинтегрировав систему уравнений (35), подставим полученные значения x_j на момент $t = T$ в функционал (2) и, минимизируя последний, найдем параметры η как

$$\eta_j = \arg\min_{\eta}(F[\|x_i(T) - x_{\text{zad}\ i}\|,$$
$$i \geqslant m+1;\ i = k, \ldots, n]), \quad (36)$$

а согласно (26), (30) — и оптимальное управление.

Если правые части модели (35) не содержат x_i, то аналитическое интегрирование модели гарантировано.

Таким образом, синтез оптимального закона управления мы проводим на исходной математической модели системы (1), но вычисляем его (находим) на редуцированной сингулярной модели (35). Такая информационная двойственность задачи нами названа принципом информационного дуализма [11, 15].

Отметим, что в случае, когда система уравнений (35) не интегрируется или нет желания ее интегрировать, можно воспользоваться известным подходом. Задачу нахождения оптимального управления можно рассматривать как задачу вариационного исчисления, как задачу минимизации терминального функционала (2) по параметрам η при наличии ограничений (39), т. е. как задачу Майера в Гамильтоновом или Лагранжевом формализме, но не на исходном n-мерном пространстве, а на редуцированном размерностью $n - k$ ($k \geqslant m + 1$), что значительно проще [16].

Выделим некоторые особенности данного подхода.

1. Фактически η, а следовательно и управление, мы находим на редуцированном пространстве переменных, а именно, вместо пространства переменных x_1, ..., x_n используем пространство переменных x_{m+1}, ..., x_n, т. е. пространство определения функционала (2).

2. Параметры η в момент времени t в пространстве определения функционала (2) формируют оптимальное управление по принципу обратной связи.

3. Параметры η в момент времени t в пространстве определения функционала (2) формируют адаптивное оптимальное управление. Адаптация осуществляется по вычисляемым в каждый момент времени параметрам на мгновенных решениях и соответствующим производным.

Отметим, что редуцированная модель (35) не содержит ограничений на управление и не включает в себя дифференциальные уравнения, описывающие изменения x_1, ..., x_m. Такую ситуацию можно трактовать и как ситуацию отсутствия информации по x_1, ..., x_m, а также отсутствия информации по ограничениям на управление.

В работе [17] Ю. Б. Гермейер назвал построение редуцированной модели (35) в случае игровых задач "информационным доопределением игры". Таким образом можно считать принцип информационного дуализма расширением принципа информационного доопределения игры на класс задач терминального оптимального управления.

Поскольку редуцированная модель проще исходной, ее целесообразно применять для вычисления оптимального управления исходной системы (11), что упрощает алгоритмы и приборную реализацию системы управления.

Иллюстрирующий пример

Дана динамическая система

$$\frac{dx_1}{dt} = A(x);$$
$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{B}{x_1}(u - \cos x_2);$$
$$\frac{dx_3}{dt} = x_1 \sin x_2;$$
$$\frac{dx_3}{dt} = x_1 \cos x_2,$$

где t — независимая переменная (время); $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ — вектор фазовых координат; $A(x)$ — заданная функция; B — константа; u — управление, $u \in [-U, +U]$, U — предельно допустимое значение управления.

Требуется найти управление, минимизирующее функционал

$$J = \sqrt{[x_3(T) - x_{3\,\text{zad}}]^2 + [x_4(T) - x_{4\,\text{zad}}]^2},$$

где $x_{3\text{zad}}$, $x_{4\text{zad}}$ — заданные значения соответствующих координат.

Введем вектор-функцию множителей Лагранжа $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ и составим гамильтониан задачи оптимизации:

$$H = p_1 A + p_2 \frac{B}{x_1}(u - \cos x_2) + $$
$$+ p_3 x_1 \sin x_2 + p_4 x_1 \cos x_2.$$

Запишем дифференциальные уравнения для сопряженных переменных:

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -p_1 \frac{\partial A}{\partial x_1} + p_2 \frac{B}{x_1^2}(u - \cos x_2) -$$
$$-p_3 \sin x_2 - p_4 \cos x_2;$$
$$\frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1 \frac{\partial A}{\partial x_2} - p_2 \frac{B}{x_1}\sin x_2 -$$
$$- p_3 x_1 \cos x_2 + p_4 x_1 \sin x_2;$$
$$\frac{dp_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = 0;$$
$$\frac{dp_4}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_4} = 0.$$

Уравнения трансверсальности при $t = T$ примут вид

$$p_1 = 0;\ p_2 = 0;$$
$$p_3 = \frac{\partial J}{\partial x_3} = \frac{x_3(T) - x_{3\,\text{zad}}}{\sqrt{[x_3(T) - x_{3\,\text{zad}}]^2 + [x_4(T) - x_{4\,\text{zad}}]^2}};$$
$$p_4 = \frac{\partial J}{\partial x_4} = \frac{x_4(T) - x_{4\,\text{zad}}}{\sqrt{[x_3(T) - x_{3\,\text{zad}}]^2 + [x_4(T) - x_{4\,\text{zad}}]^2}}.$$

Из уравнений для сопряженных переменных следует, что $p_3 = \text{const}$, $p_4 = \text{const}$.

Введем параметр η такой, что $\operatorname{tg}\eta = \frac{p_3}{p_4}$.

Для порядка сингулярности, равного единице, оптимальное управление находится из решения следующей системы уравнений:

$$p_2 = 0;\ \frac{dp_2}{dt} = 0;\ \frac{d^2 p_2}{dt^2} = 0.$$

Перепишем ее с учетом полученных результатов:

$$p_2 = 0;\ \ x_1 \sin(x_2 - \eta) = 0;\ \frac{d}{dt}[x_1 \sin(x_2 - \eta)] = 0.$$

Из второго уравнения следует, что $x_2 = \eta$, а из третьего, что $\frac{dx_2}{dt} = \frac{d\eta}{dt}$.

Отметим, что $\eta = \text{const}$. Тогда, соответственно, выражение для нахождения особого оптимального управления примет вид

$$u_{\text{osob}} = \cos\eta,$$

а полный закон управления мы запишем как

$$u = \begin{cases} -U \operatorname{sign} \sin(x_2 - \eta), & \text{если } x_2 \neq \eta; \\ \cos\eta, & \text{если } x_2 = \eta. \end{cases}$$

Для вычисления управления запишем редуцированную модель:

$$\frac{dx_3}{dt} = x_1 \sin\eta;$$
$$\frac{dx_4}{dt} = x_1 \cos\eta.$$

Так как на правом конце траектории $x_2 = \eta = \text{const}$, то из редуцированной системы дифференциальных уравнений при "замороженной" переменной x_1 получим

$$x_3(T) = x_3(t) + x_1 \sin\eta(T - t);$$
$$x_4(T) = x_4(t) + x_1 \cos\eta(T - t).$$

Подставив их в функционал, получим

$$J=\sqrt{\begin{aligned}&[x_3(t)+x_1\sin\eta(T-t)-x_{3\,\text{zad}}]^2+\\&+[x_4(t)+x_1\cos\eta(T-t)-x_{4\,\text{zad}}]^2.\end{aligned}}$$

Минимизируем функционал по η: $\frac{\partial J}{\partial\eta}=0.$

Из последнего выражения определим η:

$$\text{tg}\eta=\frac{x_{3\,\text{zad}}-x_3(t)}{x_{4\,\text{zad}}-x_4(t)}.$$

Тогда управление, вычисленное на редуцированной модели, примет вид

$$u=\begin{cases}-U\text{sign}\sin(x_2-\eta), & \text{если } x_2\neq\eta;\\ \cos\eta, & \text{если } x_2=\eta.\end{cases}$$

Расчеты показали идентичность результатов, полученных из решения краевой задачи методом последовательных приближений и с использованием методом огибающих на редуцированной модели, но при этом вычислительные затраты оказались на порядок меньше.

Приложение нового подхода к задачам терминального игрового управления

Игровые задачи представляют собой развитие задач оптимального терминального управления. Поэтому к ним вполне может быть применен рассмотренный выше подход. Первоначально рассмотрим нелинейную дифференциальную игру "преследование—уклонение" двух однотипных объектов [15].

Задана цена игры — евклидова мера расстояния между центрами масс игроков на конечный момент времени T (заранее не определен):

$$J=\min_{u_p\in U_p}\max_{u_e\in U_e}\sqrt{\begin{aligned}&[x_p(T)-x_e(T)]^2+\\&+[z_p(T)-z_e(T)]^2,\end{aligned}}\tag{37}$$

где x_k, z_k — координаты центра масс игроков в левосторонней системе отсчета; u_k — управление игрока; U_k — множество допустимых значений управления; индекс k принимает значения $k=p$ для преследователя и $k=e$ для уклоняющегося,

Цена игры определена на решениях следующей системы дифференциальных уравнений игроков, описывающих движения в горизонтальной плоскости:

$$\begin{aligned}&\frac{dV_k}{dt}=A_k(t);\\&\frac{d\varphi_k}{dt}=\frac{g}{V_k}u_k;\\&\frac{dx_k}{dt}=V_k\cos\varphi_k;\\&\frac{dz_k}{dt}=V_k\sin\varphi_k,\end{aligned}\tag{38}$$

где t — независимая переменная (время); V_k — скорость; φ_k — угол поворота траектории; g — ускорение свободного падения; A — некоторая заданная функция. Множество допустимых значений управления U_k ограничено отрезком $[-N_k, +N_k]$.

При $t=t_0$ (t_0 — начальное значение времени) считаются известными $V_k=V_{k0}$, $\varphi_k=\varphi_{k0}$, $x_k=x_{k0}$, $z_k=z_{k0}$.

Для каждого игрока введем вектор-функцию множителей Лагранжа $\lambda_k=(\lambda_{Vk}, \lambda_{\varphi k}, \lambda_{xk}, \lambda_{zk})$ и составим гамильтониан игровой задачи [2—5]:

$$H=\sum_{k=p,e}\left(\lambda_{Vk}A_k+\lambda_{\varphi k}\frac{g}{V_k}u_k+\right.\\\left.+\lambda_{xk}V_k\cos\varphi_k+\lambda_{zk}V_k\sin\varphi_k\right).\tag{39}$$

Запишем дифференциальные уравнения для сопряженных переменных:

$$\begin{aligned}&\frac{d\lambda_{Vk}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial V_k}=\lambda_{\varphi k}\frac{g}{V_k^2}u_k-\\&-\lambda_{xk}\cos\varphi_k-\lambda_{zk}\sin\varphi_k;\\&\frac{d\lambda_{\phi k}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial\varphi_k}=\\&=\lambda_{xk}V_k\sin\varphi_k-\lambda_{zk}V_k\cos\varphi_k;\\&\frac{d\lambda_{xk}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_k}=0;\\&\frac{d\lambda_{zk}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial z_k}=0.\end{aligned}\tag{40}$$

Уравнения трансверсальности при $t=T$ примут вид: $\lambda_{Vk}=0$, $\lambda_{\varphi k}=0$,

$$\lambda_{xk}=(-1)^j\frac{x_p(T)-x_e(T)}{\sqrt{[x_p(T)-x_e(T)]^2+[z_p(T)-z_e(T)]^2}};$$

$$\lambda_{zk}=(-1)^j\frac{z_p(T)-z_e(T)}{\sqrt{[x_p(T)-x_e(T)]^2+[z_p(T)-z_e(T)]^2}};$$

$$k=p,e,\quad j=\begin{cases}1, \text{ если } k=p,\\2, \text{ если } k=e.\end{cases}$$

Введем параметр η такой, что $\operatorname{tg}\eta = \frac{\lambda_{zp}}{\lambda_{xp}} = \frac{\lambda_{ze}}{\lambda_{xe}}$. Тогда (с учетом третьего и четвертого уравнений для сопряженных переменных) для $k = p, e$ получим: $\lambda_{xk} = \cos\eta = \text{const}$, $\lambda_{zk} = \sin\eta = \text{const}$.

Согласно работам [1—11] определим оптимальное управление игроков как аргумент, минимизирующий гамильтониан (39) для преследователя или максимизирующий для преследуемого.

Тогда

$$u_{k\ \text{opt}} = \begin{cases} -N_k \operatorname{sign}\lambda_{\varphi k}, \text{ если } \lambda_{\varphi k} \neq 0; \\ u_{k\ \text{soc}}, \text{ если } \lambda_{\varphi k} = 0, \end{cases} \tag{41}$$

где $u_{k\ \text{soc}}$ — особое оптимальное управление игрока.

Как показано в работе [14], для порядка сингулярности, равного единице, особое оптимальное управление находится из решения следующей системы уравнений:

$$\lambda_{\varphi k} = 0; \ \frac{d\lambda_{\varphi k}}{dt} = 0; \ \frac{d^2\lambda_{\varphi k}}{dt^2} = 0.$$

Перепишем ее с учетом полученных результатов:

$$\begin{gathered} \lambda_{\varphi k} = 0; \ V_k \sin(\varphi_k - \eta) = 0; \\ \frac{d}{dt}[V_k \sin(\varphi_k - \eta)] = 0. \end{gathered} \tag{42}$$

Из второго уравнения (42) следует, что на участке особого управления $\varphi_k = \eta$, а из третьего уравнения (42) — что $\frac{d\varphi_k}{dt} = \frac{d\eta}{dt}$. Или

$$\frac{g}{V_k} u_{k\ \text{soc}} = \frac{d\eta}{dt}.$$

Отметим, что $\eta = \text{const}$. Соответственно, выражение для нахождения особого оптимального управления примет вид

$$u_{k\ \text{soc}} = 0. \tag{43}$$

В некоторых случаях полезно сохранить производную по параметру η, например для того, чтобы компенсировать неточность его вычислений или адаптировать к неточности модели. Тогда выражение для особого управления получим в форме

$$u_{k\ \text{soc}} = \frac{V_k}{g} \frac{d\eta}{dt}.$$

Придадим выражению для оптимального управления (41) иную форму. Рассмотрим второе уравнение сопряженной системы:

$$\frac{d\lambda_{\varphi k}}{dt} = V_k \sin(\varphi_k - \eta).$$

Проинтегрируем его:

$$\lambda_{\varphi k} = \int V_k \sin(\varphi_k - \eta) dt + C.$$

Постоянная интегрирования С (краевая задача) выбирается из условия реализации соотношения $\lambda_{\varphi k} = 0$ при $\sin(\varphi_k - \eta) = 0$.

Отсюда

$$\operatorname{sign}\lambda_{\varphi k} = -\operatorname{sign}\sin(\varphi_k - \eta).$$

Используя полученные соотношения, преобразуем выражение для оптимального управления. Получим:

$$u_{k\ \text{opt}} = \begin{cases} -N_k \operatorname{sign}\sin(\varphi_k - \eta), \\ \text{если } \sin(\varphi_k - \eta) \neq 0; \\ u_{k\ \text{soc}}, \\ \text{если } \sin(\varphi_k - \eta) = 0. \end{cases} \tag{44}$$

Напомним, что согласно условиям трансверсальности на правом конце траектории $\eta = \text{const}$.

Из уравнения Гамильтона—Якоби для данной задачи следует ряд редуцированных моделей, из которых минимальная строится в пространстве переменных, входящих в функционал, т. е. получим [15]

$$\begin{gathered} \frac{dx_k}{dt} = V_k \cos\varphi_k; \\ \frac{dz_k}{dt} = V_k \sin\varphi_k \ (k = p, e). \end{gathered} \tag{45}$$

В этой модели V_k и φ_k — условные константы. Интегрируя уравнения (45), найдем $x_k(T, \varphi_k)$ и $z_k(T, \varphi_k)$. Подставим эти значения в функционал (37) и найдем η как аргумент, оптимизирующий функционал (37):

$$\eta = \arg\min_{\varphi_p}\max_{\varphi_e} \sqrt{[x_p(T) - x_e(T)]^2 + [z_p(T) - z_e(T)]^2}$$

или

$$\operatorname{tg}\eta = \frac{z_e(T) - z_p(T)}{x_e(T) - x_p(T)}. \tag{46}$$

Отметим, что редуцированная модель (45) не содержит ограничений на управление и не включает в себя дифференциальные уравнения, описывающие изменения V_k и φ_k. Такую ситуацию можно трактовать и как ситуацию отсутствия информации по V_k, φ_k и N_k. В работе [17] Ю. Б. Гермейер назвал построение редуцированной модели (45) "информационным доопределением игры".

Отметим, что в рамках данного подхода редуцированная модель информационного доопределения является одной из множества редуцированных моделей, сформированных из исходной модели игровой задачи.

Можно показать, что метод огибающих применим и для других классов дифференциальных игр: коалиционных, кооперативных, иерархических. Использование редуцированных моделей облегчает реализацию игр, а в ряде случаев позволяет получить интерпретацию, отличную от традиционной.

Заключение

В статье рассмотрены нетрадиционные методы синтеза оптимального терминального управления. Для преодоления проблем, связанных с решением краевой задачи, предлагается новый подход, основанный на использовании метода огибающих.

Известно, что участвующий в формировании оптимального управления вектор множителей Лагранжа касателен к фазовой траектории. Следовательно, он касателен и к каждой сингулярной кривой. Поэтому при некоторых условиях возможен синтез оптимального терминального управления на сингулярных кривых.

Выражения для сингулярных кривых (мгновенных решений) определяют редуцированную математическую модель. Если синтез структуры оптимального управления осуществляется на полной (исходной) математической модели, то для вычисления управления в тот или иной момент времени достаточно использовать редуцированную (упрощенную) модель. Налицо то, что названо принципом информационного дуализма, который можно трактовать как расширение принципа информационного доопределения Ю. Б. Гермейера на задачи оптимального терминального управления. Следовательно, при отсутствии информации о некоторых проекциях фазового вектора ее недостаток компенсируется переходом на редуцированную модель.

Полученные в статье результаты могут быть использованы при решении ряда прикладных задач, в частности, при разработке систем автоматического управления подвижными объектами.

Список литературы

1. **Александров А. Г.** Оптимальные и адаптивные системы. М.: Высшая школа, 1989. 263 с.
2. **Салмин В. В., Лазарев Ю. Н., Старинова О. Л.** Методы оптимального управления и численные методы в задачах синтеза технических систем. Самара: Изд-во СГАУ, 2007.
3. **Измйлов А. Ф., Солодов М. В.** Численные методы оптимизации. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 304 с.
4. **Батенко А. П.** Системы терминального управления. М.: Радио и связь, 1984. 160 с.
5. **Красовский Н. Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
6. **Болтянский В. Г.** Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.
7. **Сейдж Э. П., Уайт Ч. С.** Оптимальное управление системами. М.: Радио и связь, 1982. 389 с.
8. **Иванов В. П.** Оптимизация вырожденного управления динамическими системами методом огибающих // Труды СПИИРАН. 2006. Т. 2, Вып. 3. С. 358—365.
9. **Иванов В. П.** Оптимизация управления динамическими системами на границе допустимого множества управлений методом огибающих // Труды СПИИРАН. Вып. 4. 2007. С. 270—276.
10. **Anodina-Andrievskaja E. M., Ivanov V. P.** New Methods of Synthesis and Calculation of Optimal Terminal Control // 2021 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF). 2021. DOI: 10.1109/WECONF51603.2021. 9470551.
11. **Иванов В. П.** Информационный дуализм задачи оптимального терминального управления динамическим объектом // Информатизация и связь. 2021. № 2. С. 85—90.
12. **Васильев Ф. П.** Методы оптимизации. М.: Факториал пресс, 2002. 824 с.
13. **Федоренко Р. П.** Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 448 с.
14. **Габбасов Р., Кириллова Ф. М.** Особое оптимальное управление. М.: Наука, 1973. 253 с.
15. **Иванов В. П.** Информационный дуализм в нелинейной дифференциальной игре "преследование-уклонение" // Информатизация и связь. 2021. № 5. С. 111—116.
16. **Анодина-Андриевская Е. М., Иванов В. П.** Вариационная задача синтеза оптимального управления // Волновая электроника и инфокоммуникаци-онные системы. Материалы XXV международной научной конференции (WECONF-2022). Санкт-Петербург, 2022. С. 19—28.
17. **Гермейер Ю. Б.** Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976. 327 с.

New Approach to the Synthesis of Optimal Terminal Control of Nonlinear Dynamic Systems

V. P. Ivanov, Ph.D, Associate Professor, Senior Researcher, vpivanov.spb.su@gmail.com,
St. Petersburg Federal Research Center of Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russian Federation

Corresponding author: **Ivanov V. P.**, Ph.D, Associate Professor, Senior Researcher,
St. Petersburg Federal Research Center of Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russian Federation,
e-mail: vpivanov.spb.su@gmail.com

Accepted on September 27, 2022

Abstract

The problem of constructing common solutions to terminal control problems of nonlinear systems is considered here. Previously proven positions are used that the optimal trajectory is an envelope of a parametric family of surfaces (a parametric family of singular curves), and that optimal control can be found on this family. The fact that at each point of the optimal trajectory the vector-function of Lagrange factors is tangent to it, but also tangent to the singular curve, is played out here. A constructive method of constructing singular curves based on conditional separation of variables in the Hamilton-Jacobi equation is given. The "free" parameters of singular curves are based on the condition of minimizing the terminal functionality, which avoids an explicit solution to the boundary problem for a class of nonlinear dynamic systems, and simplifies computational algorithms. Singular curves are described by a reduced (abbreviated) mathematical model. Thus, to synthesize the law of optimal control, we must use the complete (original) mathematical model of the dynamic system, but to calculate it at one time or another, it is enough reduced model. This consideration defines the principle of informational dualism. An illustrative example is given. It has been shown that this approach can be used to solve some classes of differential games.

Keywords: *nonlinear dynamic systems, optimal control, envelopes, parametric family, singular curves, reduced models, informational dualism*

For citation:

Ivanov V. P. New Approach to the Synthesis of Optimal Terminal Control of Nonlinear Dynamic Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsija, Upravlenie*, 2023, vol. 24, no. 1, pp. 3—13.

DOI: 10.17587/mau.24.3-13

References

1. **Alexandrov A. G.** Optimal and adaptive systems, Moscow, Higher School, 1989, 263 p. (in Russian)
2. **Salmin V. V., Lazarev Yu. N., Starinova O. L.** Optimal control methods and numerical methods in the problems of synthesis of technical systems [Electronic resource], Samara, SSAU Publishing House, 2007 (in Russian).
3. **Izmylov A. F., Solodov M. V.** Numerical optimization methods, Moscow, FIZMATLIT, 2005, 304 p. (in Russian).
4. **Batenko A. P.** Terminal control systems, Moscow Radio and Communications, 1984, 160 p. (in Russian).
5. **Krasovsky N. N.** Theory of motion control, Moscow, Nauka, 1968, 476 p. (in Russian).
6. **Boltyansky V. G.** Mathematical methods of optimal control, Moscow, Nauka, 1969, 408 p. (in Russian).
7. **Sage E. P., White C. S.** Optimal control of systems, Moscow, Radio and Communications, 1982, 389 p. (in Russian).
8. **Ivanov V. P.** Optimization of degenerate control of dynamic systems by the envelope method, *Proceedings of SPIIRAN*, 2006, vol. 3, no. 2, pp. 358—365 (in Russian).
9. **Ivanov V. P.** Optimization of control of dynamic systems on the boundary of an acceptable set of controls by the envelope method, *Proceedings of SPIIRAN*, 2007, vol. 4, pp. 270—276 (in Russian).
10. **Anodina-Andrievskaja E. M., Ivanov V. P.** New Methods of Synthesis and Calculation of Optimal Terminal Control, *2021 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF),* 2021, doi: 10.1109/ WECONF51603.2021. 9470551
11. **Ivanov V. P.** Informational dualism of the problem of optimal terminal control of a dynamic object, Moscow, *Informatization and communication*, 2021, no. 2, pp. 85—90 (in Russian).
12. **Vasiliev F. P.** Optimization methods, Moscow, Factorial press, 2002, 824 p. (in Russian).
13. **Fedorenko R. P.** Approximate solution of optimal control problems, Moscow, Nauka, 1978, 448 p. (in Russian).
14. **Gabbasov R., Kirillova F. M.** Special optimal control, Moscow, Nauka, 1973, 253 p. (in Russian).
15. **Ivanov V. P.** Informational dualism in the nonlinear differential game "pursuit-evasion", Moscow, Informatization and communication, 2021, no. 5, pp. 111—116 (in Russian).
16. **Anodina-Andrievskaja E. M., Ivanov V. P.** Variational Problem of Optimal Control Synthesis, *2022 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF),* 2022, pp. 19—28 (in Russian).
17. **Hermeyer Yu. B.** Games with non-contradictory interests, Moscow, Nauka, 1976, 327 p. (in Russian).