

В. И. Воротников, д-р физ.-мат. наук, профессор, vorotnikov-vi@rambler.ru,
Сочинский институт Российского университета дружбы народов

О построении управляющих моментов в задаче одноосной переориентации твердого тела при неконтролируемых помехах

Решается задача одноосной переориентации асимметричного твердого тела посредством управляющих моментов внешних сил. На управляющие моменты накладываются заданные геометрические ограничения. Учитываются внешние неконтролируемые помехи, статистическое описание которых отсутствует. Предполагается, что управляющие моменты внешних сил "подаются" на связанные с телом главные центральные оси инерции.

Процесс управления моделируется нелинейной конфликтно-управляемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений, включающей динамические уравнения Эйлера и кинематические уравнения в переменных Пуассона. Управляющие моменты формируются по принципу обратной связи как нелинейные функции (разрывные) фазовых переменных рассматриваемой конфликтно-управляемой системы. Выбор таких функций определяется следующими обстоятельствами: 1) решение исходной нелинейной задачи переориентации можно свести к решению линейных игровых антагонистических задач (с нефиксированным временем окончания); 2) при отсутствии помех управляющие моменты являются субоптимальными по быстрдействию; 3) переориентация достигается одним пространственным разворотом без дополнительных ограничений на характер результирующего движения (типа плоского поворота и др.) Решения замкнутой системы управления понимаются в смысле А. Ф. Филиппова.

Указана оценка допустимых уровней внешних неконтролируемых помех в зависимости от заданных ограничений на управляющие моменты, вывод которой опирается на указанную трактовку решений. Данная оценка является достаточным условием, при котором обеспечивается гарантированное решение рассматриваемой задачи переориентации за конечное время посредством предложенной конструкции управляющих моментов. Дается итерационный алгоритм нахождения параметров управляющих моментов, которые определяют гарантированное время переориентации.

Ключевые слова: одноосная переориентация асимметричного твердого тела, неконтролируемые помехи, нелинейные законы управления

Введение

Задачи управления переориентацией (пространственным разворотом) асимметричного твердого тела представляют теоретический и прикладной интерес в таких областях, как динамика космических аппаратов [1–4], а также робототехника и биомеханика. Эти задачи рассматриваются и решаются в разных постановках, включая традиционные задачи стабилизации заданного положения в пространстве или разворот за конечное (заданное заранее или минимально возможное) время. Управление осуществляется либо посредством моментов внешних сил (создаваемых специальными двигателями), либо посредством моментов внутренних сил (создаваемых, например, двигателями-маховиками). Процесс управления ориентацией часто моделируется нелинейной управляемой системой, включающей динамические уравнения Эйлера и кинематические

уравнения в переменных Родрига–Гамильтона или Пуассона. При этом предполагается, что управляющие моменты внешних сил "подаются" на связанные с телом главные центральные оси инерции. Такая схема широко используется при разработке систем управления ориентацией в космической технике и робототехнике.

Одним из методов решения указанных задач является метод линеаризации обратной связью, позволяющий провести линеаризацию исходной нелинейной управляемой системы по части или по всем ее фазовым переменным. Систематическое развитие данного метода началось в 80-е годы прошлого столетия с позиций алгебр Ли [5–8], а также при изучении задач частичной устойчивости (стабилизации) динамических систем [9, 10]. Применительно к нелинейным задачам управления при неконтролируемых помехах метод получил развитие в работе [11] (см. также [10]), где линеаризирующая обратная связь используется для построе-

ния "возмущенной" линейной вспомогательной системы, которая трактуется как конфликтно-управляемая. По общей направленности такой подход примыкает к методу декомпозиции нелинейных управляемых систем [12, 13].

В рамках этого подхода рассмотрена [14, 15] нелинейная задача трехосной переориентации асимметричного твердого тела при игровой модели помех; получены оценки [16] допустимых уровней помех в зависимости от заданных "геометрических" ограничений на управляющие моменты внешних сил. В данной статье, в отличие от работ [14–16], рассматривается задача одноосной переориентации. Процесс управления моделируется нелинейной управляемой системой, включающей динамические уравнения Эйлера и кинематические уравнения Пуассона. В этом случае в отличие от работ [14–16] меняется структура вспомогательной линейной конфликтно-управляемой системы, что приводит к изменению оценки допустимых уровней помех.

Постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему уравнений Эйлера

$$\begin{aligned} A_1 \dot{x}_1 + (A_3 - A_2)x_2x_3 &= u_1 + v_1; \\ A_2 \dot{x}_2 + (A_1 - A_3)x_1x_3 &= u_2 + v_2; \\ A_3 \dot{x}_3 + (A_2 - A_1)x_1x_2 &= u_3 + v_3, \end{aligned} \quad (1)$$

описывающих вращательное (угловое) движение твердого тела относительно центра масс. В системе (1): x_i — проекции вектора угловой скорости тела на главные центральные оси инерции тела; u_i — проекции управляющего момента на те же оси; моменты v_i характеризуют действующие на тело внешние силы и неконтролируемые возмущения, которые отождествляются либо с неопределенными факторами ("природой"), либо с разумно действующим противником. Здесь и далее $i = 1, 2, 3$; суммирование по индексу i ведется от 1 до 3. Обозначим $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ — векторы, компонентами которых являются соответственно переменные x_i , u_i , v_i .

Наряду с уравнениями (1) рассмотрим определяющие ориентацию твердого тела кинематические уравнения Пуассона:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1 &= \gamma_2\gamma_3 - \gamma_3\gamma_2; & \dot{\gamma}_2 &= \gamma_3\gamma_1 - \gamma_1\gamma_3; \\ \dot{\gamma}_3 &= \gamma_1\gamma_2 - \gamma_2\gamma_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Переменные γ_i , образующие вектор $\boldsymbol{\gamma}$, связаны равенством

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \quad (3)$$

Управляющие моменты $u_i = u_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma})$ формируются по принципу обратной связи; их реализации $u_i[t]$ являются измеримыми функциями, которые удовлетворяют заданным "геометрическим" ограничениям

$$|u_i| \leq \alpha_i = \text{const} > 0. \quad (4)$$

Помехи v_i могут реализовываться в виде любых измеримых функций $v_i = v_i[t]$ в рамках ограничений

$$|v_i| \leq \beta_i = \text{const} > 0; \quad (5)$$

какие-либо вероятностные характеристики помех неизвестны.

Неравенства (4) и (5) определяют покомпонентную форму учета ограничений на управления u_i и помехи v_i . Связь между значениями α_i и β_i уровней управлений u_i и помех v_i априори неизвестна и устанавливается в процессе решения рассматриваемой далее задачи.

Задача одноосной переориентации: требуется найти управляющие моменты u_i , при любых допустимых реализациях неконтролируемых помех v_i переводящие тело за *конечное* время из начального состояния $\boldsymbol{\gamma}(t_0) = \boldsymbol{\gamma}_0$ в заданное $\boldsymbol{\gamma}(t_1) = \boldsymbol{\gamma}_1$. Оба состояния являются состояниями покоя $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0}$. Момент времени $t_1 > t_0$ не фиксируется.

Замечания. 1⁰. Не нарушая общности, далее считаем $\boldsymbol{\gamma}_1 = (0, 1, 0)$. Случай произвольного начального и конечного положений тела будет рассмотрен при описании алгоритма решения поставленной задачи управления.

2⁰. С формальной математической точки зрения решения системы (1)–(3) понимаются в смысле А. Ф. Филиппова [17] как абсолютно непрерывные функции $\mathbf{x}[t]$, $\boldsymbol{\gamma}[t]$, удовлетворяющие при почти всех значениях $t \in [t_0, t_1]$ соответствующей системе дифференциальных включений.

3⁰. Ограничения на управляющие моменты u_i в форме (4) соответствуют трем парам "фиксированных" двигателей, соответствующим образом закрепленных относительно тела.

Предлагаемый подход к решению

Продифференцируем по времени обе части первого и третьего уравнений системы (2), заменяя $\dot{x}_i$ их выражениями из системы (1). После преобразований получаем равенства

$$\begin{aligned}\ddot{\gamma}_1 &= \dot{\gamma}_2 x_3 - \dot{\gamma}_3 x_2 + \gamma_2 \dot{x}_3 - \gamma_3 \dot{x}_2 = \\ &= \frac{1}{A_3} u_3 \gamma_2 - \frac{1}{A_2} u_2 \gamma_3 + f_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{v}); \\ \ddot{\gamma}_3 &= \dot{\gamma}_1 x_2 - \dot{\gamma}_2 x_1 + \gamma_3 \dot{x}_2 - \gamma_2 \dot{x}_1 = \\ &= \frac{1}{A_2} u_2 \gamma_1 - \frac{1}{A_1} u_1 \gamma_2 + f_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{v}),\end{aligned}\quad (6)$$

в которых

$$\begin{aligned}f_1 &= \gamma_3 x_1 x_3 - \gamma_1 (x_3^2 + x_2^2) + \gamma_2 x_1 x_2 + \\ &+ \frac{A_1 - A_2}{A_3} \gamma_2 x_1 x_2 - \frac{A_3 - A_1}{A_2} \gamma_3 x_1 x_3 + \\ &+ \frac{1}{A_3} \gamma_2 v_3 - \frac{1}{A_2} \gamma_3 v_2; \\ f_2 &= \gamma_2 x_2 x_3 - \gamma_3 (x_1^2 + x_2^2) + \gamma_1 x_3 x_1 + \\ &+ \frac{A_3 - A_1}{A_2} \gamma_1 x_3 x_1 - \frac{A_2 - A_3}{A_1} \gamma_2 x_3 x_2 + \\ &+ \frac{1}{A_2} \gamma_1 v_2 - \frac{1}{A_1} \gamma_2 v_1.\end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}u_1^* &= \frac{1}{A_3} u_3 \gamma_2 - \frac{1}{A_2} u_2 \gamma_3; \quad u_2^* = \frac{1}{A_2} u_2; \\ u_3^* &= \frac{1}{A_2} u_2 \gamma_1 - \frac{1}{A_1} u_1 \gamma_2; \\ v_1^* &= f_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{v}); \quad v_2^* = \frac{1}{A_2} [v_2 + (A_3 - A_1) x_1 x_3]; \\ v_3^* &= f_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{v})\end{aligned}$$

и будем трактовать уравнения (6) и второе уравнение системы (1) как вспомогательную линейную конфликтно-управляемую систему

$$\ddot{\gamma}_1 = u_1^* + v_1^*; \quad \ddot{\gamma}_3 = u_3^* + v_3^*; \quad \dot{x}_2 = u_2^* + v_2^*, \quad (7)$$

в которой u_i^* , v_i^* — соответственно вспомогательные управления и помехи.

При этом "исходные" управляющие моменты u_i имеют вид

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{A_1}{\gamma_2} (-u_1^* + \gamma_1 u_2^*); \quad u_2 = A_2 u_2^*; \\ u_3 &= \frac{A_3}{\gamma_2} (u_1^* + \gamma_3 u_2^*).\end{aligned}\quad (8)$$

При трактовке равенств (6) как конфликтно-управляемой системы (7) в данном случае имеет место зависимость вспомогательных помех v_i^* не только от $\mathbf{v}$, но и от $\boldsymbol{\gamma}$, $\mathbf{x}$. Это "плата" за достижение указанной структуры управляющих моментов u_i . Однако указанная особенность структуры v_i^* не является препятствием для решения поставленной задачи переориентации на основе анализа системы (7).

Решая первое и третье уравнения системы (2) как алгебраические относительно x_j ($j = 1, 3$), получаем равенства

$$x_1 = \frac{1}{\gamma_2} (-\dot{\gamma}_3 + \gamma_1 x_2), \quad x_3 = \frac{1}{\gamma_2} (\dot{\gamma}_1 + \gamma_3 x_2). \quad (9)$$

Поэтому решение задачи приведения системы (7) в положение $\gamma_j = \dot{\gamma}_j = 0$ ($j = 1, 3$) с поддержанием координаты x_2 в положении $x_2 = 0$ означает решение исходной нелинейной задачи одноосной переориентации твердого тела посредством управляющих моментов (8).

Задачу управления для конфликтно-управляемой системы вида (7) трактуем как дифференциальную игру. В ней один из игроков ("союзник") распоряжается u_i^* и стремится уменьшить время τ приведения системы в требуемое положение. В распоряжении другого игрока ("противника"), стремящегося увеличить время τ или вообще избежать приведения системы в требуемое положение, — вспомогательные возмущения v_i^* .

Для разрешимости данной задачи требуется, чтобы уровни u_i^* были выше уровней v_i^* . Ограничения примем в виде

$$|u_i^*| \leq \alpha_i^*, \quad |v_i^*| \leq \beta_i^* = \rho_i \alpha_i^*, \quad 0 < \rho_i < 1.$$

При фиксированных значениях α_i^* , β_i^* решение может быть найдено на основе решения задач оптимального быстрогодействия (с теми же краевыми условиями) для системы [18]

$$\ddot{\gamma}_j = (1 - \rho_j) u_j^* \quad (j = 1, 3); \quad (10)$$

$$\dot{x}_2 = (1 - \rho_2) u_2^*. \quad (11)$$

Решение задачи оптимального быстрогодействия для линейных систем типа (10), (11) имеет вид [19]

$$u_j^*(\gamma_j, \dot{\gamma}_j) = \begin{cases} \alpha_j^* \operatorname{sgn} \psi_j(\gamma_j, \dot{\gamma}_j), & \psi_j \neq 0; \\ \alpha_j^* \operatorname{sgn} \gamma_j = -\alpha_j^* \operatorname{sgn} \dot{\gamma}_j, & \psi_j = 0; \end{cases} \quad (12)$$

$$\psi_j = -\dot{\gamma}_j - \frac{2\alpha_j^*(1-\rho_j)}{\gamma_j|\gamma_j|};$$

$$u_2^*(x_2) = \begin{cases} -\alpha_2^* \operatorname{sgn} x_2, & x_2 \neq 0; \\ 0, & x_2 = 0. \end{cases} \quad (13)$$

При $v_j^* \neq -\rho_j u_j^*$ в случае системы дифференциальных уравнений (10), (12) движение на фазовых плоскостях будет сначала происходить (до достижения кривых переключений $\psi_j = 0$) между дуг парабол, являющихся траекториями систем дифференциальных уравнений $\ddot{\gamma}_j = (1 \pm \rho_j)u_j^*$ ($j = 1, 3$) при u_j^* вида (12). В окрестности кривых переключений фазовые траектории с обеих сторон подходят к этим кривым. Поэтому после попадания на кривые переключений движение будет происходить вдоль этих кривых в скользящем режиме до достижения требуемых конечных значений $\gamma_j = \dot{\gamma}_j = 0$.

В случае дифференциального уравнения (11), (13) в окрестности положения $x_2 = 0$ фазовые траектории направлены навстречу друг другу и, следовательно, не могут покинуть положение $x_2 = 0$. При этом решению $x_2 = 0$ соответствуют бесконечно частые переключения управления u_2^* , которые ассоциируются со скользящим режимом.

Величина

$$\tau = \max(\tau_j), \quad \tau_j = 2 \sqrt{\frac{|\gamma_{j0}|}{\alpha_j^*(1-\rho_j)}} \quad (14)$$

определяет минимальное гарантированное время управления в рассматриваемой игровой задаче для системы (7).

Замечания. 1⁰. Структура (8) управляющих моментов u_i формально приводит к "особенности" (разрывы 2-го рода), возникающей при $\gamma_2 = 0$. Однако в процессе управления имеет место включение $|\gamma_2| \in [|\gamma_{20}|, 1]$, и указанной особенности не возникает.

2⁰. Пусть $\gamma_1 \neq (0, 1, 0)$. Чтобы избежать "особенности", в этом случае достаточно перейти к управляющим моментам, получающимся из (8) перестановкой индексов (или к комбинации таких управляющих моментов).

Итерационный алгоритм решения

На основе предложенного подхода можно сформулировать итерационный алгоритм решения задачи одноосной переориентации твердого тела посредством управляющих моментов u_i вида (8), (12), (13):

1. Определение уровней α_i^* вспомогательных управлений u_i^* , для которых не нарушаются заданные ограничения (4) на управляющие моменты u_i .

2. "Назначение" пробных уровней β_i^* вспомогательных помех v_i^* (так, что $\alpha_i^* > \beta_i^*$), определяющих значения ρ_i и гарантированное время переориентации τ .

3. Проверка фактического выполнения неравенств $|v_i^*| \leq \beta_i^*$ на множестве состояний системы (7), (12), (13).

Если оценки $|v_i^*| \leq \beta_i^*$ не выполняются или, наоборот, есть "резерв" в их выполнении, необходимо продолжить поиск подходящих чисел α_i^* . В противном случае переориентация осуществляется за время τ , определяемое соотношением (14).

Замечания. 1⁰. Возможен также "обратный" вариант указанного алгоритма, предполагающий: 1) "назначение" пробных значений не только уровней β_i^* вспомогательных помех v_i^* , но и гарантированного времени переориентации τ (что предопределяет значения уровней α_i^* вспомогательных управлений u_i^*); 2) проверку фактического выполнения неравенств $|v_i^*| \leq \beta_i^*$ на множестве состояний системы (7), (12), (13).

2⁰. В случае $\gamma_1 \neq (0, 1, 0)$ указанный итерационный алгоритм можно использовать применительно к управляющим моментам, получающимся из (8) перестановкой индексов.

Оценка допустимых уровней помех

Укажем прямую оценку допустимых уровней помех v_i , определяющих возможности решения исходной нелинейной задачи одноосной переориентации твердого тела посредством управляющих моментов (8) на основе предложенного алгоритма.

Введем обозначение

$$\Gamma_j = \frac{|\gamma_{20}|}{A_j \sqrt{1 + \gamma_{j0}^2}} \alpha_j.$$

Теорема. Если область помех v_i определяется неравенствами

$$\sqrt{\left(\frac{\beta_j}{A_j}\right)^2 + 2\left(\frac{\beta_2}{A_2}\right)^2} < \Gamma_j \quad (j = 1, 3); \quad \beta_2 < \alpha_2, \quad (15)$$

то задача одноосной переориентации может быть решена посредством управляющих моментов (8), (12), (13), удовлетворяющих ограничениям (4).

Доказательство. При фиксированных α_i^*, β_i^* на множестве состояний системы (7), (12), (13) имеют место неравенства [16]

$$\gamma_1^2 \leq \gamma_{10}^2; \gamma_2^2 \geq \gamma_{20}^2; \gamma_3^2 \leq \gamma_{30}^2; \quad (16)$$

$$\max \dot{\gamma}_j^2 = \frac{1}{\alpha_j^*} |\gamma_{j0}| (\alpha_j^{*2} - \beta_j^{*2}) \quad (j = 1, 3). \quad (17)$$

Дальнейшее доказательство разобьем на три этапа, выделенных при описании итерационного алгоритма решения рассматриваемой задачи одноосной переориентации твердого тела.

Этап 1. Определим значения α_i^* равенствами

$$\alpha_1^* = \sqrt{\left(\frac{\beta_3}{A_3}\right)^2 + \left(\frac{\beta_2}{A_2}\right)^2} + \varepsilon_1; \alpha_2^* = \frac{\beta_2}{A_2} + \varepsilon_2; \quad (18)$$

$$\alpha_3^* = \sqrt{\left(\frac{\beta_1}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{\beta_2}{A_2}\right)^2},$$

в которых $\varepsilon_i > 0$ — достаточно малые постоянные. При выполнении условий (15) достаточно малые значения $\varepsilon_i > 0$ можно выбрать так, чтобы выполнялись неравенства

$$\sqrt{\alpha_1^{*2} + \alpha_2^{*2}} \leq \Gamma_3; \sqrt{\alpha_3^{*2} + \alpha_2^{*2}} \leq \Gamma_1; \quad (19)$$

$$A_2 \alpha_2^* \leq \alpha_2.$$

Учитывая соотношения (16), (17), при выполнении условий (15) для управляющих моментов u_i вида (8) при указанных достаточно малых значениях $\varepsilon_i > 0$ получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} |u_1| &\leq \frac{A_1}{|\gamma_{20}|} (\alpha_3^* + |\gamma_{10}| \alpha_2^*) \leq \\ &\leq \frac{A_1}{|\gamma_{20}|} \sqrt{(1 + \gamma_{10}^2)(\alpha_3^{*2} + \alpha_2^{*2})} \leq \\ &\leq \frac{A_1}{|\gamma_{20}|} \sqrt{1 + \gamma_{10}^2} \Gamma_1 = \alpha_1; \\ |u_2| &\leq \alpha_2; \\ |u_3| &\leq \frac{A_3}{|\gamma_{20}|} (\alpha_1^* + |\gamma_{30}| \alpha_2^*) \leq \\ &\leq \frac{A_3}{|\gamma_{20}|} \sqrt{(1 + \gamma_{30}^2)(\alpha_1^{*2} + \alpha_2^{*2})} \leq \\ &\leq \frac{A_3}{|\gamma_{20}|} \sqrt{1 + \gamma_{30}^2} \Gamma_3 \leq \alpha_3. \end{aligned}$$

Это значит, что при сделанном выборе α_i^* исходные ограничения (4) на управляющие моменты (8) выполнены.

Этап 2. Выберем значения $\varepsilon_i^* > 0$ из условий $0 < \varepsilon_i^* < \varepsilon_i$ и "назначим" уровни β_i^* вспомогательных помех v_i^* так, что

$$\beta_j^* = \alpha_j^* - \varepsilon_j^* \quad (j = 1, 3), \quad \beta_2^* = \alpha_2^* - \varepsilon_2^*. \quad (20)$$

В этом случае выполнены неравенства $\alpha_i^* > \beta_i^*$.

Этап 3. При выбранных значениях α_i^*, β_i^* в процессе переориентации тела значения $\dot{\gamma}_j$ будут оставаться достаточно малыми на основании соотношений (17). Поскольку в процессе переориентации тела координата x_2 поддерживается в положении $x_2 = 0$, то из соотношений (9) следует, что в процессе переориентации тела значения переменных x_1, x_3 также будут оставаться достаточно малыми.

В результате в процессе переориентации тела будут иметь место соотношения

$$|v_1^*| \leq \sqrt{\left(\frac{\beta_3}{A_3}\right)^2 + \left(\frac{\beta_2}{A_2}\right)^2} + \delta_1;$$

$$|v_3^*| \leq \sqrt{\left(\frac{\beta_1}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{\beta_2}{A_2}\right)^2} + \delta_3;$$

$$|v_2^*| \leq \frac{\beta_2}{A_2} + \delta_2,$$

где $\delta_i > 0$ — достаточно малые постоянные, зависящие от значений $\varepsilon_i - \varepsilon_i^*$ и "размера" предельного цикла в окрестности положения $x_2 = 0$.

Поэтому, полагая $\varepsilon_i - \varepsilon_i^* \rightarrow 0$, имеем

$$|v_j^*| \leq \beta_j^* < \alpha_j^* \quad (j = 1, 3), \quad |v_2^*| \leq \beta_2^* < \alpha_2^*$$

и, следовательно, в процессе переориентации тела будут выполнены неравенства $\alpha_i^* > \beta_i^*$ и $|v_i^*| \leq \beta_i^*$. Теорема доказана.

Замечания. 1⁰. Оценка (15) имеет характер достаточных условий и непосредственно связана с предложенной конструкцией (8) управляющих моментов. Эта оценка гарантирует решение задачи переориентации твердого тела посредством управляющих моментов (8), (12), (13) при достаточно большом (хотя и конечном) значении τ .

2⁰. Обоснование условий (15) существенно опирается на трактовку решений по А. Ф. Филиппову уравнения (10), (12) и системы (11), (13). В частности, предполагается существование решения $x_2 = 0$ уравнения (10), (12); при наличии малой задержки в переключениях вспомогательного управления u_2^* имеет место режим переключений u_2^* , которому соответствует [20] предельный цикл малого "размера" в окрестности положения $x_2 = 0$.

Пример

Для твердого тела с $A_1 = 4 \cdot 10^4$, $A_2 = 8 \cdot 10^4$, $A_3 = 5 \cdot 10^4$ (кг·м²) рассмотрим задачу одноосной переориентации из начального положения $\gamma_{10} = 0,4$, $\gamma_{30} = 0,5$ (рад) в заданное положение равновесия $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$, $\gamma_2 = 1$. Усложняя задачу, допустим, что $x_{10} = 0,05$, $x_{20} = 0,10$, $x_{30} = 0,07$ (рад/с).

Пусть задано гарантированное время переориентации $\tau = 70$ (с) и уровни $\beta_1 = 36,6$, $\beta_2 = 32$, $\beta_3 = 34,6$ (Н·м) помех v_i . Оценим, какие ресурсы потребуются в этом случае для переориентации тела посредством управляющих моментов u_i вида (8), (12), (13). Для упрощения расчетов полагаем $\tau_i = \tau$, что означает "выравнивание" гарантированного времени переориентации по каждой из переменных γ_1 , γ_3 , x_2 .

Учитывая равенства (18), (20), значения

$$\sqrt{\left(\frac{\beta_3}{A_3}\right)^2 + \left(\frac{\beta_2}{A_2}\right)^2} = 0,8 \cdot 10^{-3};$$

$$\sqrt{\left(\frac{\beta_1}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{\beta_2}{A_2}\right)^2} = 10^{-3} \text{ (рад/с}^2\text{)};$$

$$\beta_2 = 0,4 \cdot 10^{-3} A_2$$

можно использовать для "назначения" пробных уровней β_i^* вспомогательных помех v_i^* : $\beta_1^* = 10^{-3}$, $\beta_2^* = 0,6 \cdot 10^{-3}$, $\beta_3^* = 1,2 \cdot 10^{-3}$ (рад/с²).

Тогда, имея в виду равенства

$$\tau_j = \frac{\dot{\gamma}_{j0} + 2\sqrt{\gamma_{j0}(\alpha_j^* - \beta_j^*) + 0,5\dot{\gamma}_{j0}^2}}{\alpha_j^* - \beta_j^*} = \tau \quad (j = 1, 3);$$

$$\tau_2 = \frac{x_{20}}{\alpha_2^* - \beta_2^*} = \tau,$$

находим уровни α_i^* вспомогательных управлений u_i^* :

$$\alpha_1^* = 1,44 \cdot 10^{-3}; \quad \alpha_2^* = 2,03 \cdot 10^{-3};$$

$$\alpha_3^* = 1,66 \cdot 10^{-3} \text{ (рад/с}^2\text{)}.$$

Для оценки v_i^* на множестве состояний линейной системы (7), (12), (13) при заданных начальных данных вместо (16), (17) используем соотношения

$$\max \gamma_j = \frac{\dot{\gamma}_{j0}^2}{2(\alpha_j^* - \beta_j^*)} + \gamma_{j0};$$

$$\max \dot{\gamma}_j =$$

$$= \max\{|\dot{\gamma}_{j0}|, \sqrt{[\gamma_{j0}(\alpha_j^* + \beta_j^*) + 0,5\dot{\gamma}_{j0}^2](1 - \rho_j)}\}.$$

Проверяя фактическое выполнение неравенств $|v_i^*| \leq \beta_i^*$ на множестве состояний линейной системы (7), (12), (13), заключаем, что неравенство $|v_1^*| \leq 10^{-3}$ не подтверждается (в рамках используемых оценок).

Назначим новые уровни β_i^* вспомогательных помех:

$$\beta_1^* = 1,2 \cdot 10^{-3}; \quad \beta_2^* = 0,8 \cdot 10^{-3};$$

$$\beta_3^* = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ (рад/с}^2\text{)}.$$

В данном случае на основании равенств (21) имеем:

$$\alpha_1^* = 1,64 \cdot 10^{-3}; \quad \alpha_2^* = 2,23 \cdot 10^{-3};$$

$$\alpha_3^* = 1,81 \cdot 10^{-3} \text{ (рад/с}^2\text{)}.$$

Расчет показывает, что в этом случае назначенные уровни β_i^* подтверждаются.

Оценим, какие ресурсы потребуются для переориентации посредством управляющих моментов u_i вида (8), (12), (13). Ограничимся двумя случаями.

1. Случай $v_i^* = -\rho_i u_i^*$ "наихудших" v_i^* . В этом случае v_i^* максимально задерживают приведение вспомогательной линейной системы (7), (12), (13) в требуемое положение $\gamma_j = \dot{\gamma}_j = 0$, $x_2 = 0$. Расчет показывает, что в данном случае уровни управляющих моментов (8) следующие:

$$\alpha_1 = 101,95; \quad \alpha_2 = 178,29; \quad \alpha_3 = 181,70 \text{ (Н·м)}.$$

Управляющие моменты u_1 , u_3 являются кусочно-непрерывными функциями с разрывами при $t = 36,8$ и $t = 39,3$ (с); управляющий момент u_2 является непрерывной функцией.

2. Случай $v_i^* \equiv 0$ отсутствия помех. Расчет показывает, что

$$\alpha_1 = 127,8; \quad \alpha_2 = 178,3; \quad \alpha_3 = 179,9 \text{ (Н·м)}.$$

Заключение

Предложен конструктивный метод построения управляющих моментов в задаче одноосной переориентации асимметричного твердого тела при неконтролируемых помехах. Метод основан на выборе позиционных управляющих моментов, позволяющих свести решение рассматриваемой нелинейной задачи к простейшим игровым антагонистическим задачам.

В рамках трактовки по А. Ф. Филиппову решений замкнутой системы управления указана оценка допустимых уровней внешних неконтролируемых помех в зависимости от заданных ограничений на управляющие моменты. Дается итерационный алгоритм нахождения параметров управляющих моментов, которые определяют гарантированное время переориентации.

Предложенная конструкция управляющих моментов может быть эффективно использована в случаях, когда начальные возмущения угловой скорости тела являются достаточно малыми, в то время как начальное угловое отклонение связанной с телом фиксированной оси от заданного направления в пространстве может быть достаточно большим.

Отметим, что имеются другие, не использующие линеаризацию обратной связью, подходы к анализу нелинейных задач переориентации асимметричного твердого тела при внешних помехах и зашумленных измерениях, основанные на методах конфликтного управления с целевым функционалом, адаптивного управления, функций Ляпунова, а также на методах стохастического анализа (см., например, работы [21–30]). В связи с рассматриваемым в статье подходом укажем на задачи переориентации твердого тела при внешних неконтролируемых помехах посредством двигателей-маховиков [31–33].

Список литературы

1. Раушенбах Б. В., Токарь Е. Н. Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974. 598 с.
2. Junkins J. L., Turner J. D. Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers. Amsterdam: Elsevier, 1986. 515 p.
3. Зубов В. И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 495 с.
4. Wertz J. R. (ed.). Spacecraft Attitude Determination and Control. Springer Science & Business Media, 2012. 858 p.
5. Isidori A. Nonlinear Control Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1985. 297 p.
6. Nijmeijer H., Van der Schaft A. J. Nonlinear Control Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1990. 467 p.
7. Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб: Наука, 2000. 549 с.
8. Краснощеченко В. И., Крищенко А. П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд-во МГТУ, 2005. 521 с.
9. Воротников В. И. Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991. 288 с.
10. Vorotnikov V. I. Partial Stability and Control. Boston: Birkhauser, 1998. 448 p.
11. Воротников В. И. О нелинейном синтезе ограниченных управлений при помехах // Докл. РАН. 1994. Т. 337. № 1. С. 44–47.
12. Черноусько Ф. Л., Ананьевский И. М., Решмин С. А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 328 с.

13. Решмин С. А. Метод декомпозиции в задаче управления лагранжевой системой с дефицитом управляющих параметров // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74, Вып. 1. С.151–169.
14. Воротников В. И. О синтезе ограниченных управлений в игровой задаче переориентации асимметричного твердого тела // ДАН. 1995. Т. 343, № 5. С. 630–634.
15. Воротников В. И. О построении игровых ограниченных управлений для нелинейных динамических систем // Прикладная математика и механика. 1997. Т. 61, Вып. 1. С. 63–74.
16. Воротников В. И., Румянцев В. В. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора: теория, методы и приложения. М.: Научный мир, 2001. 320 с.
17. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 216 с.
18. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
19. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
20. Емельянов С. В., Корвин С. К. Новые типы обратной связи. Управление при неопределенности. М.: Физматлит, 1997. 352 с.
21. Park Y. Robust and Optimal Attitude Stabilization of Spacecraft with External Disturbances // Aerospace Science and Technology. 2005. Vol. 9, N. 3. P. 253–259.
22. Ding S. H., Li S. H. Stabilization of the Attitude of a Rigid Spacecraft with External Disturbances using Finite-Time Control Techniques // Aerospace Science and Technology. 2009. Vol.13, N. 4–5. P. 256–265.
23. Xia Y. Q., Zhu Z., Fu M. Y., Wang S. Attitude Tracking of Rigid Spacecraft with Bounded Disturbances // IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2011. Vol. 58, N. 2. P. 647–659.
24. Lu K., Xia Y., Zhu Z., Basin M. V. Sliding Mode Attitude Tracking of Rigid Spacecraft with Disturbances // Journal of the Franklin Institute. 2012. Vol. 349, N. 2. P. 413–440.
25. Gui H., Jin L., Xu S. Simple Finite-Time Attitude Stabilization Laws for Rigid Spacecraft with Bounded Inputs // Aerospace Science and Technology. 2015. Vol. 42. P. 176–186.
26. Hu Q., Niu G. Attitude Output Feedback Control for Rigid Spacecraft with Finite-Time Convergence // ISA Transactions. 2017. Vol. 70. P. 173–186.
27. Zhou Z. G., Zhang Y. A., Shi X. N., Zhou D. Robust Attitude Tracking for Rigid Spacecraft with Prescribed Transient Performance // International Journal of Control. 2017. Vol. 90, N. 11. P. 2471–2479.
28. Song Z., Duan C., Su H., Hu J. Full-Order Sliding Mode Control for Finite-Time Attitude Tracking of Rigid Spacecraft // IET Control Theory & Applications. 2018. Vol. 12, N. 8. P. 1086–1094.
29. Cao S., Guo L., Ding Z. Event-Triggered Anti-Disturbance Attitude Control for Rigid Spacecrafts with Multiple Disturbances // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2021. Vol. 31, N. 2. P. 344–357.
30. Петрищев В. Ф. Энергосберегающий алгоритм управления переориентацией космического аппарата по зашумленным измерениям // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Т. 18, № 7. С. 474–483.
31. Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г. К нелинейной задаче одноосной переориентации трехроторного гиростата при игровой модели помех // Автоматика и телемеханика. 2012. № 9. С. 35–48.
32. Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г. К задаче переориентации трехроторного гиростата при неконтролируемых внешних помехах // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17, № 6. С. 414–419.
33. Воротников В. И., Вохмянина А. В. К нелинейной задаче "прохождения" трехроторным гиростатом заданного углового положения в пространстве при неконтролируемых внешних помехах // Космические исследования. 2018. Т. 56, Вып. 5. С. 396–402.

On Control Moments Construction for Uniaxial Reorientation Problem of Rigid Body under Disturbances

V. I. Vorotnikov, vorotnikov-vi@rambler.ru,

Sochi institute of the RUDN, Sochi, 354340, Russian Federation

Corresponding author: Vorotnikov Vladimir I., Dr. Sci. (Phys. & Math.), Professor, Sochi institute of the RUDN, Sochi, 354340, Russian Federation, e-mail: vorotnikov-vi@rambler.ru

Accepted on August 5, 2022

Abstract

The problem of uniaxial reorientation of an asymmetric rigid body is solved by means of external control moments. The given geometric restrictions are imposed on the control moments. External uncontrolled interference is taken into account, the statistical descriptions of which is not available. It is assumed that the control moments of external forces are "applied" to the main central axes of inertia connected with the body. The control process is modeled by a nonlinear conflict-controlled system of ordinary differential equations, including dynamic Euler equations and kinematic equations in Poisson variables. The control moments are formed according to the feedback principle as nonlinear functions (discontinuous) of the phase variables of the considered conflict-controlled system. The choice of such functions is determined by the following circumstances: 1) the solution of the original nonlinear reorientation problem can be reduced to the solution of linear antagonistic game problems (with an unfixed end time); 2) in the absence of interference, the control moments are time-suboptimal; 3) reorientation is achieved by one spatial turn without additional restrictions on the nature of the resulting movement (such as a flat turn, etc.). Solutions of the closed control system are understood in the Filippov sense. An estimate of admissible levels of external uncontrolled interference depending on the given restrictions on the control moments is indicated, the conclusion of which is based on the indicated interpretation of the solutions. This estimate is a sufficient condition under which a guaranteed solution of the reorientation problem is provided in finite time by means of proposed constructions of control moments. An iterative algorithm is given for finding the control moment parameters that determine the guaranteed reorientation time.

Keywords: uniaxial reorientation of asymmetric rigid body, external disturbances, game-theoretical approach, nonlinear control moments

For citation:

Vorotnikov V. I. On Control Moments Construction for Uniaxial Reorientation Problem of Rigid Body under Disturbances, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 12, pp. 661–669.

DOI: 10.17587/mau.23.661-669

References

1. Raushenbakh B. V., Tokar' E. N. Reorientation Control, Moscow, Nauka, 1974, 598 p. (in Russian).
2. Junkins J. L., Turner J. D. Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers, Amsterdam, Elsevier, 1986, 515 p.
3. Zubov V. I. Theorie de la Commande, Moscow, Mir, 1978, 365 p. (in Russian).
4. Wertz J. R. (ed.). Spacecraft Attitude Determination and Control, Springer Science & Business Media, 2012, 858 p.
5. Isidori A. Nonlinear Control Systems, Berlin, Springer-Verlag, 1985, 297 p.
6. Nijmeijer H., Van der Schaft A. J. Nonlinear Control Systems, Berlin, Springer-Verlag, 1990, 467 p.
7. Fradkov A. L., Miroshnik I. V., Nikiforov V. O. Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems, Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1999, 528 p. (in Russian).
8. Krasnoshchchenko V. I., Krishchenko A. P. Nonlinear Systems: Geometric Methods of Analysis and Synthesis, Moscow, Publishing house of MG TU, 2005, 521 p. (in Russian).
9. Vorotnikov V. I. Stability Dynamical Systems with Respect to a Part of the Variables, Moscow, Nauka, 1991, 288 p. (in Russian).
10. Vorotnikov V. I. Partial Stability and Control, Boston: Birkhauser, 1998, 448 p.
11. Vorotnikov V. I. On Nonlinear Synthesis of Bounded Control in the Presence of Disturbances, *Physics-Doklady*, 1994, vol. 39, no. 7, pp. 519–522 (in Russian).
12. Chernousko F. L., Ananievski I. M., Reshmin S. A. Control of Nonlinear Dynamical Systems: Methods and Applications, Berlin, Springer-Verlag, 2008, 398 p. (in Russian).
13. Reshmin S. A. The Decomposition Method for a Control Problem for an Underactuated Lagrangian System, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, vol. 74, no. 1, pp. 108–121 (in Russian).
14. Vorotnikov V. I. On Bounded Control Synthesis in a Game Theory Problem of Reorientation of an Asymmetric Solid, *Physics-Doklady*, 1995, vol. 40, no. 8, pp. 421–425 (in Russian).
15. Vorotnikov V. I. The Construction of Bounded Game-Theoretic Control for Nonlinear Dynamical Systems, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1997, vol. 61, no. 1, pp. 63–74 (in Russian).
16. Vorotnikov V. I., Rumyantsev V. V. Stability and Control with Respect to a Part of the Phase Coordinates of Dynamic Systems: Theory, Methods and Applications, Moscow, Nauchnyy mir, 2001, 320 p. (in Russian).
17. Filippov A. F. Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides, Springer Science & Business Media, 2013, 304 p. (in Russian).
18. Krasovskii N. N. Rendezvous Game Problems, US Joint Publications Research Service, 1971, 356 p. (in Russian).
19. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishenko E. F. The Mathematical Theory of Optimal Processes. New York, Interscience, 1962, 360 p. (in Russian).
20. Emelyanov S. V., Korovin S. K. Control of Complex and Uncertain Systems: New Types of Feedback, Springer Science & Business Media, 2012, 322 p. (in Russian).
21. Park Y. Robust and Optimal Attitude Stabilization of Spacecraft with External Disturbances, *Aerospace Science and Technology*, 2005, vol. 9, no. 3, pp. 253–259.
22. Ding S. H., Li S. H. Stabilization of the Attitude of a Rigid Spacecraft with External Disturbances using Finite-Time

Control Techniques, *Aerospace Science and Technology*, 2009, vol.13, no. 4–5, pp. 256–265.

23. Xia Y. Q., Zhu Z., Fu M. Y., Wang S. Attitude Tracking of Rigid Spacecraft with Bounded Disturbances, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2011, vol. 58, no. 2, pp. 647–659.

24. Lu K., Xia Y., Zhu Z., Basin M. V. Sliding Mode Attitude Tracking of Rigid Spacecraft with Disturbances, *Journal of the Franklin Institute*, 2012, vol. 349, no. 2, pp. 413–440.

25. Gui H., Jin L., Xu S. Simple Finite-Time Attitude Stabilization Laws for Rigid Spacecraft with Bounded Inputs, *Aerospace Science and Technology*, 2015, vol. 42, pp. 176–186.

26. Hu Q., Niu G. Attitude Output Feedback Control for Rigid Spacecraft with Finite-Time Convergence, *ISA Transactions*, 2017, vol. 70, pp. 173–186.

27. Zhou Z. G., Zhang Y. A., Shi X. N., Zhou D. Robust Attitude Tracking for Rigid Spacecraft with Prescribed Transient Performance, *International Journal of Control*, 2017, vol. 90, no. 11, pp. 2471–2479.

28. Song Z., Duan C., Su H., Hu J. Full-Order Sliding Mode Control for Finite-Time Attitude Tracking of Rigid Spacecraft, *IET Control Theory & Applications*, 2018, vol. 12, no. 8, pp. 1086–1094.

29. Cao S., Guo L., Ding Z. Event-Triggered Anti-Disturbance Attitude Control for Rigid Spacecrafts with Multiple Disturbances, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2021, vol. 31, no. 2, pp. 344–357.

30. Petrishchev V. F. Power-Efficient Algorithm for the Spacecraft Reorientation Control by Noisy Measurements, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 7, pp. 474–483 (in Russian).

31. Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G. On the Nonlinear Uniaxial Reorientation Problem for a Three-Rotor Gyrostat in the Game Noise Model, *Automation and Remote Control*, 2012, vol. 73, no. 9, pp. 1469–1480 (in Russian).

32. Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G. To Problem of Tree-Rotor Gyrostat Reorientation under Uncontrolled External Disturbances, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 6, pp. 414–419 (in Russian).

33. Vorotnikov V. I., Vokhmyanina A. V. Revisiting the Nonlinear Problem of the Passage of a Three-Rotor Gyrostat through a Given Angular Position in Space under Uncontrollable External Disturbances, *Cosmic Research*, 2018, vol. 56, nn. 5, pp. 382–387 (in Russian).



29–31 мая 2023 г.
г. Санкт-Петербург, Россия
АО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор"



XXX Санкт-Петербургская Международная конференция по интегрированным навигационным системам

Тематика конференции

- Инерциальные датчики, системы навигации и ориентации
- Интегрированные системы навигации и управления движением
- Глобальные навигационные спутниковые системы
- Средства гравиметрической поддержки навигации

В рамках каждого направления рассматриваются:

- схемы построения и конструктивные особенности;
- методы и алгоритмы;
- особенности разработки и применения для различных подвижных объектов и условий движения (аэрокосмические, морские, наземные, подземные);
- испытания и метрология.

Контактная информация:

Тел.: +7 (812) 499 82 10 +7 (812) 499 81 57

Факс: +7 (812) 232 33 76 E-mail: icins@eprib.ru