

В. И. Краснощеченко, канд. техн. наук, доц., v.krasnoshechenko@yandex.ru,
Калужский филиал Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана, г. Калуга

Линеаризация нелинейных аффинных систем управления с неинволютивными распределениями введением линеаризующих управлений

Рассмотрен алгоритм нахождения линейных эквивалентов (точной линеаризации) для неинволютивных распределений управляемых векторных полей. В отличие от распространенного подхода при решении данной проблемы — использования динамической линеаризации (введения интеграторов), что приводит к расширению пространства состояний, — предложен алгоритм получения инволютивных распределений и обеспечения локальной управляемости на основе линеаризующих управлений. Суть алгоритма: выбрать такое управление и найти для него явное выражение, что управляемое векторное поле, связанное с данным управлением, при присоединении его к неуправляемому векторному полю обеспечит локальную управляемость и инволютивность соответствующих распределений. Для проверки инволютивности распределений и нахождения функций разложения векторных полей по базису текущего распределения, а по ним — непосредственно условий, накладываемых на линеаризующие управления, автором разработан алгоритм и программа в пакете Maple для нахождения данных функций. Для удобства изложения и максимальной наглядности предложенного подхода в статье обобщаются и используются не общепринятые в прикладной дифференциальной геометрии обозначения. Это относится, в первую очередь, к представлению векторных полей в координатной форме или в виде дифференциальных операторов, что часто не конкретизируется, а считается, что форма векторного поля определяется из контекста. В статье эти формы четко разделены и показано их конкретное использование. Рассмотрен пример — нелинейная аффинная система управления пятого порядка с тремя управлениями, в котором подробно отражены все этапы синтеза.

Ключевые слова: линеаризация "вход—состояние", инволютивность, распределение, линеаризующее управление, неинволютивные распределения, индексы управляемости

Введение

При решении задач линеаризации в пространствах "вход—состояние" и "вход—выход" одним из важнейших условий является требование инволютивности распределений управляемых векторных полей. В случае нарушения этого условия точная линеаризация (линейный эквивалент в форме Бруновского [1]) посредством введения статической обратной связи не возможна. Тогда получают частично линеаризованную форму в пространстве "вход—состояние", либо имеет место нуль-динамика — в случае линеаризации в пространстве "вход—выход" [2].

Для неинволютивных распределений статическая линеаризация не возможна. В работах [3–5] был предложен подход, который получил название *динамической линеаризации с использованием обратной связи*. Одним из вариантов динамической линеаризации может быть получение статической линеаризации на расширенном пространстве за счет введения до-

полнительных интеграторов во входные цепи. После такого расширения есть возможность получить инволютивные распределения и, таким образом, решить задачу статической (точной) линеаризации в расширенном пространстве. Но здесь возникает проблема: фактически введение интеграторов приводит к управлению по его (управлению) производной, но тогда как выбирать начальные условия для этих интеграторов — фактически начального управления? Другим подходом при динамической линеаризации является динамическая линеаризация по выходу, которая приводит к так называемым "плоским (flat)" системам [6]. Ряд задач линеаризации были решены с использованием данного подхода [3, 7]. Но этот подход тоже приводит к расширению пространства состояний (чаще всего введением интеграторов). В статье [6] делается вывод о том, что "... в многомерных нелинейных аффинных системах управления вопрос о динамической линеаризации считается достаточно сложным и в общем виде не решенным".

Один из подходов к решению поставленной задачи *без расширения* пространства состояний рассмотрен в работе В. И. Елкина, Л. Е. Коноваловой [8]. Подход основан на использовании внешних дифференциальных форм и построении интегрируемых кораспределений для уравнений Пфаффа. В представленной ниже статье предлагается иное решение проблемы неинволютивности распределений, причем также *без расширения* пространства состояний. В этом случае одно или несколько управляемых векторных полей $\mathbf{g}_j (j = 1, \dots, k < m)$ переводятся соответствующим выбором управлений (назовем их *линеаризующими*) $u_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, k$, в неуправляемые (без увеличения размерности вектора состояния), и полученные векторные поля присоединяются к исходному неуправляемому векторному полю $\mathbf{f}$, что дает новое неуправляемое векторное поле $\tilde{\mathbf{f}}$. При этом управления $u_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, k$, определяются из необходимости выполнения условий инволютивности и управляемости.

Мы покажем, что проблему нахождения линеаризующих управлений вполне можно решить в рамках теории построения инволютивных распределений для линейных эквивалентов, учитывая при этом, конечно же, специфику данной задачи. Более того, для рассмотренного ниже примера, взятого из статьи [8], будет получен более общий результат (*два варианта* линеаризующего управления, а не один, как в работе [8]).

1. Некоторые обозначения и условия точной линеаризации

1.1. Гладкие векторные поля будем представлять, в зависимости от конкретной ситуации, в одной из двух равнозначных форм. Именно,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\xi_1(\mathbf{x}) \ \dots \ \xi_n(\mathbf{x}))^T \quad (\text{F1})$$

— гладкое векторное поле в *координатной* форме на многообразии (частным случаем этого может быть поверхность) M . Это же векторное поле, рассматриваемое как *дифференциальный оператор для гладких функций*, определенных на многообразии M , имеет вид

$$f = \sum_{i=1}^n \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\text{F2})$$

Нетрудно найти связь между компонентами (F1) и представлением (F2). Именно,

$$\xi_i(\mathbf{x}) = f.x_i = \sum_{j=1}^n \xi_j(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} x_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где точка внизу $(.)$ обозначает, что на компоненту x_i , а в общем случае, на некоторую функцию $\varphi(\mathbf{x})$ *действует* дифференциальный оператор. Чаше в литературе используется обозначение

$$L_f \varphi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \xi_j(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(\mathbf{x}),$$

где $L_f \varphi(\mathbf{x})$ — производная Ли функции $\varphi(\mathbf{x})$, которая совпадает с $f.\varphi(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T f(\mathbf{x})$ — производной функции $\varphi(\mathbf{x})$ вдоль векторного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ [9, 10]: $L_f \varphi(\mathbf{x}) = f.\varphi(\mathbf{x})$. Мы будем использовать второе обозначение, так как оно позволяет более компактно записывать необходимые выражения и, с нашей точки зрения, лучше подходит для пояснений (ниже это будет показано). Аналогичный подход возможен для дифференцирования векторных полей. Дифференцирование Ли векторного поля $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ вдоль векторного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ (в координатной форме) $L_f \mathbf{g}$ совпадает с коммутатором (скобкой Ли) $[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g} = L_f \mathbf{g}$ векторных полей [9, 10]. Однако скобки Ли (коммутатор) практически не используются в алгоритмах статической линеаризации потому, что многократное дифференцирование представляется в виде вложенных скобок, что весьма затруднительно для чтения и восприятия текста. Например, для сравнения $L_f^3 \mathbf{g} = [\mathbf{f}, [\mathbf{f}, [\mathbf{f}, \mathbf{g}]]]$. Коммутатор векторных полей $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ чаще обозначается как $ad_f \mathbf{g}$ [11]. Мы, по тем же причинам, будем вместо коммутатора использовать производную Ли, так как обозначение $ad_f \mathbf{g}$ вводится формально и в дифференциальной геометрии обозначает присоединенное представление группы Ли в ее алгебре Ли [11, 12]. Для обоснования наших обозначений рассмотрим общий случай нахождения коммутатора в координатной форме:

$$[\varphi(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}), \theta(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})] = ad_{\varphi(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})} \theta(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x}),$$

где $\varphi(\mathbf{x})$, $\theta(\mathbf{x})$ — гладкие функции. Этот стандартный вид не дает полной информации и требует раскрытия скобок Ли. Имеем

$$\begin{aligned}
[\varphi(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}), \theta(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})] &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\theta(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x}))\varphi(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \\
- \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\varphi(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}))\theta(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x}) &= \varphi(\mathbf{x})\theta(\mathbf{x})[\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x})] + \\
+ \varphi(\mathbf{x})\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \theta(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x})\right) - \theta(\mathbf{x})\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x})\right) &= \\
= \varphi(\mathbf{x})\theta(\mathbf{x})ad_f \mathbf{g} + \varphi(\mathbf{x})\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \theta(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x})\right) - & \\
- \theta(\mathbf{x})\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x})\right), &
\end{aligned}$$

где $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — скалярное произведение векторов. В наших обозначениях в операторной форме тот же коммутатор представляется следующим образом:

$$\begin{aligned}
[\varphi(\mathbf{x})f, \theta(\mathbf{x})g] &= (\varphi(\mathbf{x})f) \cdot (\theta(\mathbf{x})g) - \\
- (\theta(\mathbf{x})g) \cdot (\varphi(\mathbf{x})f) &= \varphi(\mathbf{x})(f \cdot \theta(\mathbf{x})g) + \varphi(\mathbf{x})\theta(\mathbf{x})f \cdot g - \\
- \theta(\mathbf{x})(g \cdot \varphi(\mathbf{x})f) - \theta(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})(g \cdot f) &= \varphi(\mathbf{x})(f \cdot \theta(\mathbf{x})g) - \\
- \theta(\mathbf{x})(g \cdot \varphi(\mathbf{x})f) + \varphi(\mathbf{x})\theta(\mathbf{x})L_f g, &
\end{aligned}$$

где используется дифференцирование

$$w \cdot g = \left(\frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{w}(\mathbf{x}) \right)^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$$

для некоторых векторных полей $\mathbf{w}(\mathbf{x})$, $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ и $L_f g = f \cdot g - g \cdot f$.

Символом M^k будем обозначать k -е распределение в некоторой точке многообразия M как подпространство касательного пространства с базисом в координатной форме; обозначение M^k определяет тот же состав векторных полей, но рассматриваемых как дифференциальные операторы, действующие на гладкие функции.

С групповой точки зрения операторы (F2) называются инфинитезимальными (бесконечно малыми) операторами соответствующих однопараметрических групп, и конечное (в общем случае локальное) действие определяется экспоненциальным отображением операторов в окрестности тождественного преобразования (единицы группы) $\mathbf{e}^{tf} = \mathbf{e}^{tL_f}$ и $\mathbf{e}^{tg} = \mathbf{e}^{tL_g}$, где L_f, L_g — дифференцирование (производная) Ли. Решение уравнения

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}$$

можно найти из уравнения восстановления действия группы по ее инфинитезимальному оператору [12]:

$$x_i(t) = F_f(x_i, t) = \mathbf{e}^{tf} x_i = \mathbf{e}^{tL_f} x_i,$$

где предполагается, что в разложении экспоненты имеем композицию преобразований $f^k \cdot x_i = f \cdot (f^{k-1} \cdot x_i)$, $k = 0, 1, \dots$, а x_i , $i = 1, \dots, n$, (без аргумента) определяют некоторые начальные условия для соответствующей переменной. Более подробно эти вопросы рассмотрены в монографии [13].

1.2. Задача нахождения линейных эквивалентов (точной линеаризации) для статически линеаризуемых нелинейных аффинных систем формулируется следующим образом. Для нелинейной аффинной системы вида

$$\sum_{i=1}^{IS} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m u_i \mathbf{g}_i(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in M, \mathbf{u} \in R^m,$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, m$, — гладкие векторные поля в координатном представлении; M — гладкое многообразие размерности n , необходимо найти такую неособую нелинейную замену координат и обратную связь, что в новых координатах трансформированная система принимает канонический вид управляемой линейной системы (форма Бруновского — клеточный вид, где каждая клетка в форме Фробениуса, размерность которой определяется индексом управляемости [14, 15]):

$$\sum_{i=1}^{Br} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}_c \mathbf{y} + \mathbf{B}_c \mathbf{v}, \mathbf{y} \in R^n, \mathbf{v} \in R^m$$

Для решения поставленной задачи рассматривается распределение управляемых векторных полей $M^0 = \text{span}\{\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{g}_m(\mathbf{x})\}$ (где span — линейная оболочка соответствующих векторов). Пусть A, B — два семейства гладких векторных полей на многообразии M . Обозначим $[A, B] = \{[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = L_f \mathbf{g} : \mathbf{f} \in A, \mathbf{g} \in B\}$ — множество векторных полей, полученных через скобки Ли векторных полей соответствующих семейств. Обозначим скобки более высоких порядков $L_f^2 \mathbf{g}(\mathbf{x}) = [\mathbf{f}, [\mathbf{f}, \mathbf{g}]]$ и т. п. (для этих целей используют также обозначение $[\mathbf{f}, [\mathbf{f}, \mathbf{g}]] = ad_f^2 \mathbf{g}$ и т. п.).

$$M^j = \text{span}\{M^{j-1}, [\mathbf{f}, M^{j-1}]\}, j = 1, 2, \dots$$

Утверждение [15]. Линейный эквивалент в форме Бруновского существует тогда и только тогда, когда

- все распределения инволютивны, т. е. каждое распределение замкнуто относительно операции умножения (скобки Ли или коммутатора) векторных полей $[M^j, M^j] = M^j$, $j = 0, 1, 2, \dots, p \leq n - m$;
- $m^j = \dim M^j = \text{const}$, $j = 0, 1, 2, \dots, p \leq n - m$;
- размерность $\dim M^p = n$.

2. Метод линеаризующих управлений для построения инволютивных распределений

Для нахождения линеаризующих управлений применяется разложение векторных полей по базису, определяющему инволютивность распределений и управляемость. Суть предлагаемого подхода состоит в следующем.

1. Из всего семейства управляемых векторных полей $\{g_1(x), \dots, g_m(x)\}$ выделяется минимальное подсемейство, наличие которого определяет неинволютивность распределения M^0 . Оставшиеся после этого выделения управляемые векторные поля представляют собой базис инволютивного распределения. При этом, в общем случае, нельзя добиться полной управляемости.

2. Выбором соответствующего управления для управляемых векторных полей неинволютивного подсемейства (что и характеризует вырожденность системы при замене управлений) необходимо сохранить инволютивность базисного распределения.

3. Получить (при необходимости) инволютивные распределения более высокой размерности и обеспечить локальную управляемость в некоторой области.

Рассмотрим *детально метод линеаризующих управлений*. Задана нелинейная гладкая многомерная аффинная система управления

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x). \quad (1)$$

Предполагается, что исходное распределение управляемых векторных полей $\tilde{M}^0 = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\}$ не инволютивно. Пусть часть (без снижения общности считаем, что это первые k управляемых векторных полей) формирует максимальное инволютивное распределение $M^+ = \text{span}\{g_1, \dots, g_k; k < m\}$. Ставится задача: найти линеаризующие управления $u_{k+1}(x), \dots, u_m(x)$ такие, что векторное поле

$$\tilde{f}(x) = f(x) + \sum_{i=k+1}^m u_i(x) g_i(x)$$

преобразует исходную систему (1) к системе

$$\dot{x} = \tilde{f}(x) + \sum_{i=1}^k u_i g_i(x), \quad (2)$$

для которой распределение M^+ позволяет получить линейный эквивалент в форме Бруновского (статическая линеаризация).

Без снижения общности предположим, что $k = m - 1$, т. е. у нас только одно не линеаризуемое (приводит к неинволютивному распределению) управляемое векторное поле $g_m(x)$. Пусть $M^0 = \Delta^+$ — начальное инволютивное распределение. Распределения более высоких порядков получаем в соответствии с их определениями. Имеем

$$M^j = \text{span}\{M^{j-1}, [f, M^{j-1}]\}, j = 1, 2, \dots$$

Согласно утверждению, представленному выше, линейный эквивалент в форме Бруновского существует тогда и только тогда, когда

$$[M^j, M^j] = M^j, j = 0, 1, 2, \dots, p \leq n - m. \quad (3)$$

Для неинволютивных распределений справедливо *строгое* включение

$$M^j \subset [M^j, M^j], j = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

т. е. векторные поля $v_p, v_q \in M^j$ при взаимодействии $[v_p, v_q]$ формируют подпространство $\text{span}\{v_p, v_q\}$, которое *не принадлежит* распределению M^j : $\text{span}\{v_p, v_q\} \notin M^j$.

Наша задача: найти такое линеаризующее управление $u_m(x)$, чтобы перейти от строгого включения (4) к равенству (3).

В соответствии с предположением M^0 — инволютивное распределение. Для каждого последующего распределения $M^j, j \geq 1$, выбором *линеаризующего* управления $u_m(x)$ необходимо выполнить равенство (3). Распределение $M^j(u_m(x))$ относительно неуправляемого векторного поля $\tilde{f}(x, u_m(x)) = f(x) + u_m(x)g_m(x)$ имеет вид

$$\begin{aligned} M^j(u_m(x)) &= \\ &= \text{span}\{[f(x) + u_m(x)g_m(x), M^{j-1}], M^{j-1}\} = \\ &= M^{j,0} + \text{span}\{[u_m(x)g_m(x), M^{j-1}]\} = \\ &= M^{j,0} + \text{span}\{u_m(x)[g_m(x), M^{j-1}]\}^- + \\ &\quad + \text{span}\{-M^{j-1} \bullet (u_m(x)g_m(x)), \end{aligned} \quad (5)$$

где $M^{j,0}$ — распределение M^j для $u_m(x) = 0$ и

$$\begin{aligned} [u_m(x)g_m(x), M^{j-1}] &= \\ &= \underbrace{u_m(x)[g_m(x), M^{j-1}]^+}_{\in M^j} + \underbrace{u_m(x)[g_m(x), M^{j-1}]^-}_{\notin M^j} - \\ &\quad -(M^{j-1}) \bullet (u_m(x)g_m(x)), \end{aligned} \quad (6)$$

$(M^{j-1}) \bullet (\varphi(x)) = (v_1 \bullet \varphi(x), \dots, v_s \bullet \varphi(x))$ — множество векторных полей как дифференциальных

операторов для гладкой функции $\varphi(\mathbf{x})$, $M^{j-1}(\mathbf{x}) = \text{span}\{\mathbf{v}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{v}_s(\mathbf{x})\}$ — линейное пространство (линейная оболочка) этих же векторных полей в координатном представлении в точке $\mathbf{x}$ (для краткости и удобства восприятия в некоторых случаях данный аргумент мы будем опускать). Компоненты $\underbrace{u_m(\mathbf{x})[\mathbf{g}_m(\mathbf{x}), M^{j-1}]^+}_{\in M^j}$ и $\underbrace{u_m(\mathbf{x})[\mathbf{g}_m(\mathbf{x}), M^{j-1}]^-}_{\notin M^j}$ в выражении (6) указывают на то, что необходимо выделить составляющие, принадлежащие M^j , т. е. $[\mathbf{g}_m(\mathbf{x}), M^{j-1}]^+ \in M^j$, и не принадлежащие распределению M^j , т. е. $[\mathbf{g}_m(\mathbf{x}), M^{j-1}]^- \notin M^j$. Это позволит найти требуемое линеаризующее управление $u_m(\mathbf{x})$.

Уравнения для нахождения линеаризующего управления $u_m(\mathbf{x})$ и соответствующего выполнения равенства (3) следующие:

1. Если $\text{rank}(M^j) > \text{rank}(M^{j-1})$, т. е. размерность распределения увеличивается, то уравнение для определения $u_m(\mathbf{x})$ имеет вид

$$u_m(\mathbf{x})[\mathbf{g}_m(\mathbf{x}), M^{j-1}]^- - (M^{j-1}) \cdot (u_m(\mathbf{x}))\mathbf{g}_m(\mathbf{x}) = 0, \quad (7)$$

что позволит сохранить инволютивность распределения M^j и выполнение равенства (3).

2. Если $\text{rank}(M^j) = \text{rank}(M^{j-1})$, т. е. имеем не полностью управляемую систему, то уравнение для определения $u_m(\mathbf{x})$ имеет вид

$$u_m(\mathbf{x})[\mathbf{g}_m(\mathbf{x}), M^{j-1}]^- - (M^{j-1}) \cdot (u_m(\mathbf{x}))\mathbf{g}_m(\mathbf{x}) \neq 0, \quad (8)$$

т. е. необходимо увеличивать размерность распределения M^j (за счет векторного поля $\mathbf{g}_m(\mathbf{x})$ и его взаимодействия с другими векторными полями распределения M^{j-1}) для получения полностью управляемой системы.

Особенности алгоритма в случае неинволютивных распределений по предложенному алгоритму мы рассмотрим на конкретном примере из статьи [8] и проведем сравнение результатов.

3. Пример построения инволютивных распределений с использованием линеаризующих управлений

Задана математическая модель системы управления в виде нелинейной аффинной системы ($n = 5$, $m = 3$) [8]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + u_1\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) + u_2\mathbf{g}_2(\mathbf{x}) + u_3\mathbf{g}_3(\mathbf{x}), \quad (9)$$

где

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_2x_4 \\ -x_1x_3x_4 \\ 2x_2x_3x_4 \\ -x_2x_4^2 \\ -x_2x_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_2 \\ -2x_3 \\ x_4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_3(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \\ e^{-x_5} \end{pmatrix}.$$

Требуется получить линейный эквивалент в форме Бруновского для данной системы управления.

Проверим, линеаризуема ли система (9) с помощью статической обратной связи, для чего построим соответствующие распределения. Распределение $M^0 = \text{span}\{\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}), \mathbf{g}_3(\mathbf{x})\}$ имеет размерность $\dim M^0 = 3$, но является неинволютивным: $L_{\mathbf{g}_3}\mathbf{g}_1 = [\mathbf{g}_3, \mathbf{g}_1] \notin M^0$, поэтому линеаризация с помощью статической обратной связи не возможна. Попробуем добиться инволютивности базисного распределения и выполнения условий управляемости.

Замечаем, что на множестве M^0 можно выделить два инволютивных распределения: $M_1^0 = \text{span}\{\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x})\}$ и $M_2^0 = \text{span}\{\mathbf{g}_2(\mathbf{x}), \mathbf{g}_3(\mathbf{x})\}$. В зависимости от того, какими свойствами обладает каждое из распределений, мы и определим, какое из векторных полей — $\mathbf{g}_1(\mathbf{x})$ или $\mathbf{g}_3(\mathbf{x})$ (но не $\mathbf{g}_2(\mathbf{x})$, так как оно входит в оба распределения) — необходимо перевести в неуправляемое векторное поле, чтобы выполнить условия линеаризации со статической обратной связью. В работе [8] таким векторным полем определено $\mathbf{g}_3(\mathbf{x})$ с линеаризующим управлением u_3 . Мы рассмотрим оба варианта.

Вариант 1. Вначале выясним, можно ли обойтись лишь двумя векторными полями $\mathbf{g}_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}_2(\mathbf{x})$, т. е. мы считаем, что управление $u_3(\mathbf{x}) = 0$. Имеем:

— распределение M_1^0 — инволютивное распределение и $\dim M_1^0 = 2$;

— распределение $M_1^1 = \text{span}\{\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}), L_{\mathbf{f}}\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), L_{\mathbf{f}}\mathbf{g}_2(\mathbf{x})\}$, $\dim M_1^1 = 3$ является инволютивным распределением и $L_{\mathbf{f}}^i\mathbf{g}_2(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, 2, \dots$;

— распределение $M_1^2 = \text{span}\{\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}), L_{\mathbf{f}}\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), L_{\mathbf{f}}\mathbf{g}_2(\mathbf{x}), L_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), L_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g}_2(\mathbf{x})\}$, $\dim M_1^2 = 4$ также является инволютивным.

Однако распределение $M_1^3 = \text{span}\{L_f^j \mathbf{g}_j(\mathbf{x}), i = 0, 1, \dots, 3; j = 1, 2\}$ имеет такую же размерность $\dim M_1^3 = 4$, поэтому условие локальной управляемости $\dim M_1^3 = 5$ не выполнено, т. е. при $u_3(\mathbf{x}) = 0$ добиться выполнения условий для линеаризации со статической обратной связью не удастся. Необходимо использовать векторное поле $\mathbf{g}_3(\mathbf{x})$.

Основными требованиями, которые мы должны соблюдать при нахождении управления $u_3(\mathbf{x})$, будут:

- выполнение условий инволютивности

$$[M^j, M^j] = M^j, j = 0, 1, 2, \quad (10)$$

- и управляемости

$$\dim M_1^3(u_3) = 5 \quad (11)$$

где

$$M_1^0 = M_1^{0,0},$$

$$M_1^j(u_3) = M_1^{j,0} + [u_3 \mathbf{g}_3, M_1^{j-1}], j = 1, 2. \quad (12)$$

Из выражений (10)–(12) получим необходимые условия для линеаризующего управления $u_3(\mathbf{x})$:

$$[u_3(\mathbf{x}) \mathbf{g}_3, M_1^{j-1}]^- = u_3(\mathbf{x}) [\mathbf{g}_3(\mathbf{x}), M_1^{j-1}]^- - (M_1^{j-1})_\bullet(u_3(\mathbf{x})) \mathbf{g}_3(\mathbf{x}) = 0, j = 1, 2; \quad (13)$$

$$\dim(M_1^j + u_3(\mathbf{x}) [\mathbf{g}_3(\mathbf{x}), M_1^{j-1}]^+) = \dim M_1^j, j = 1, 2; \quad (14)$$

$$[u_3(\mathbf{x}) \mathbf{g}_3(\mathbf{x}), M_1^2]^- = u_3(\mathbf{x}) [\mathbf{g}_3(\mathbf{x}), M_1^2]^- - (M_1^2)_\bullet(u_3(\mathbf{x})) \mathbf{g}_3(\mathbf{x}) \neq 0, \quad (15)$$

где, напомним,

$$[u_3(\mathbf{x}) \mathbf{g}_3(\mathbf{x}), M_1^j]^\pm, ([u_3(\mathbf{x}) \mathbf{g}_3(\mathbf{x}), M_1^j]^\pm), j = 0, 1, 2,$$

— компоненты, которые не принадлежат (принадлежат) соответствующим распределениям $M_1^j, j = 1, 2$.

Найдем распределение $M_1^1(u_3(\mathbf{x}))$, зависящее от линеаризующего управления $u_3(\mathbf{x})$, базис $\{\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}), L_f \mathbf{g}_1(\mathbf{x})\}$:

$$M_1^1(u_3(\mathbf{x})) = \text{span}\{\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}), L_{f+u_3 \mathbf{g}_3} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}), L_{f+u_3 \mathbf{g}_3} \mathbf{g}_2(\mathbf{x})\}.$$

Имеем

$$L_{f+u_3 \mathbf{g}_3} \mathbf{g}_1 = L_f \mathbf{g}_1 + u_3(\mathbf{x}) L_{\mathbf{g}_3} \mathbf{g}_1 - g_{1\bullet}(u_3(\mathbf{x})) \mathbf{g}_3 = \left(1 - \frac{u_3(\mathbf{x})}{x_1 x_4}\right) L_f \mathbf{g}_1 - \frac{3x_2}{x_1} u_3(\mathbf{x}) \mathbf{g}_1 - g_{1\bullet}(u_3(\mathbf{x})) \mathbf{g}_3. \quad (16)$$

Из выражения (13) получаем *первое условие* на управление $u_3(\mathbf{x})$ (векторное поле $\mathbf{g}_3$ не входит в базис этого распределения):

$$g_{1\bullet}(u_3(\mathbf{x})) = \left(x_4 \frac{\partial}{\partial x_3}\right) u_3(\mathbf{x}) = 0, \quad (17)$$

т. е. управление $u_3(\mathbf{x})$ является инвариантом однопараметрической группы $F_{g_1}(\bullet, t) g_1$. Из соотношения (15) получаем *второе условие* ($\dim M_1^2 > \dim M_1^1$, векторное поле $L_f \mathbf{g}_1$ входит в базис этого распределения):

$$\left(1 - \frac{u_3(\mathbf{x})}{x_1 x_4}\right) \neq 0. \quad (18)$$

Найдем последнюю составляющую распределения $M_1^1(u_3(\mathbf{x}))$. Имеем

$$L_{f+u_3 \mathbf{g}_3} \mathbf{g}_2 = L_f \mathbf{g}_2 + u_3(\mathbf{x}) L_{\mathbf{g}_3} \mathbf{g}_2 - g_{2\bullet}(u_3(\mathbf{x})) \mathbf{g}_3 = (u_3(\mathbf{x}) - g_{2\bullet}(u_3(\mathbf{x}))) \mathbf{g}_3, \quad (19)$$

где учтено $L_{\mathbf{g}_3} \mathbf{g}_2 = [\mathbf{g}_3, \mathbf{g}_2] = \mathbf{g}_3$.

Условие (13) для уравнения (19) дает *третье* выражение для нахождения $u_3(\mathbf{x})$:

$$u_3(\mathbf{x}) - g_{2\bullet}(u_3(\mathbf{x})) = u_3(\mathbf{x}) - \left(-x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - 2x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{\partial}{\partial x_5}\right) u_3(\mathbf{x}) = 0. \quad (20)$$

Переходим к распределению $M_1^2(u_3(\mathbf{x}))$. Разложение по базису формируемого распределения имеет вид

$$L_{f+u_3 \mathbf{g}_3}^2 \mathbf{g}_1 = \left(1 - \frac{u_3(\mathbf{x})}{x_4}\right) L_f^2 \mathbf{g}_1 + u_3(\mathbf{x}) \left(\frac{3x_2 x_4 - 4x_2 x_4 x_1}{x_4 x_1}\right) L_f \mathbf{g}_1 + u_3(\mathbf{x}) x_1 x_4^2 \mathbf{g}_2 + u_3(\mathbf{x}) \left(\frac{3x_3 x_4^2 x_1^2 + 9x_4^2 x_2^2 - 3x_3 x_4^2 x_1}{x_4 x_1}\right) \mathbf{g}_1 - L_f g_{1\bullet}(u_3(\mathbf{x})) \mathbf{g}_3. \quad (21)$$

Формула (21) используется для нахождения функций инволютивного представления векторного поля $L_{f+u_3 \mathbf{g}_3}^2 \mathbf{g}_1$ через базисные векторные поля $\{L_f^2 \mathbf{g}_1, L_f \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_1\}$.

В соотношении (21) согласно выражениям (13), (14) должны выполняться следующие требования:

$$L_f g_{1\bullet}(u_3(\mathbf{x})) = 0 \quad (22)$$

или в развернутой форме

$$\left(x_4^2 x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - 3x_4^2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) u_3(\mathbf{x}) = 0,$$

и

$$\left(1 - \frac{u_3(\mathbf{x})}{x_4} \right) \neq 0. \quad (23)$$

Поскольку по построению $L_{f+u_3 g_3} \mathbf{g}_2 = 0$, то, соответственно, и $L_{f+u_3 g_3}^2 \mathbf{g}_2 = 0$. Полученные пять условий гарантируют инволютивность соответствующих распределений и их требуемую размерность 4. Получим последнее условие, определяющее управляемость всего распределения. Для этого найдем $L_{f+u_3 g_3}^3 \mathbf{g}_1$ и учтем неравенство (15). Имеем

$$\begin{aligned} L_{f+u_3 g_3}^3 \mathbf{g}_1 &= (u_3(\mathbf{x}) x_4^3 x_1 - L_f^2 \mathbf{g}_1 \cdot u_3(\mathbf{x})) \mathbf{g}_3 + \\ &+ \alpha_1(\mathbf{x}, u_3) L_f^2 \mathbf{g}_1 + \alpha_2(\mathbf{x}, u_3) L_f \mathbf{g}_1 + \\ &+ \alpha_3(\mathbf{x}, u_3) \mathbf{g}_2 + \alpha_4(\mathbf{x}, u_3) \mathbf{g}_1, \end{aligned} \quad (24)$$

где $\alpha_i(\mathbf{x}, u_3), i = 1, \dots, 4$, — некоторые функции, которые не влияют на управляемость и в силу их громоздкости не приводятся. Добавляем в базис распределения векторное поле $\mathbf{g}_3$ и из выражений (24) и (15) получаем

$$u_3(\mathbf{x}) x_4^3 x_1 - L_f^2 \mathbf{g}_1 \cdot u_3(\mathbf{x}) \neq 0, \quad (25)$$

или в развернутой форме

$$\begin{aligned} x_4^2 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} u_3(\mathbf{x}) - (x_4^3 x_2 + 5x_4^3 x_1 x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} u_3(\mathbf{x}) + \\ + (x_4^3 x_1 x_3 + 12x_4^3 x_2^2) \frac{\partial}{\partial x_3} u_3(\mathbf{x}) + \\ + x_4^4 x_1 \frac{\partial}{\partial x_4} u_3(\mathbf{x}) + x_4^3 x_1 \frac{\partial}{\partial x_5} u_3(\mathbf{x}) \neq u_3(\mathbf{x}) x_4^3 x_1. \end{aligned}$$

Выпишем все полученные условия для линеаризующего управления $u_3(\mathbf{x})$:

$$\left. \begin{aligned} g_{1\bullet}(u_3(\mathbf{x})) &= 0, \\ u_3(\mathbf{x}) &\neq x_1 x_4, \\ u_3(\mathbf{x}) - g_{2\bullet}(u_3(\mathbf{x})) &= 0, \\ L_f g_{1\bullet}(u_3(\mathbf{x})) &= 0, \\ u_3(\mathbf{x}) &\neq x_4, \\ u_3(\mathbf{x}) x_4^3 x_1 - L_f^2 g_{1\bullet}(u_3(\mathbf{x})) &\neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Несмотря на большое число уравнений в частных производных и алгебраических неравенств, система (26) легко решается и имеет следующие два независимых решения:

$$u_3^1(\mathbf{x}) = x_4(x_1 + C), \quad C = \text{const} \neq 0, \quad (27)$$

$$u_3^2(\mathbf{x}) = e^{x_5} x_1. \quad (28)$$

Отметим, что в работе [8] получено первое линеаризующее управление с константой $C = 1$. Для найденных управлений исходная система линеаризуема с использованием статической обратной связи, причем индексы управляемости (размеры клеток Бруновского) равны 4 и 1.

Проверка. Проверим полученный результат на решении (28) с линеаризующим управлением $u_3(\mathbf{x}) = u_3^2(\mathbf{x}) = e^{x_5} x_1$. В качестве функций преобразования для первой клетки Бруновского с индексом управляемости 4 используем функцию $T_1(\mathbf{x}) = e^{-x_5} x_4$, а для второй клетки с индексом управляемости 1 — функцию $T_2(\mathbf{x}) = x_3 + x_4$ (данные функции обеспечивают требования по линеаризации — два линейно независимых решения для получения управления исходной нелинейной системы, причем функция $T_1(\mathbf{x})$ является еще инвариантом группы преобразований с инфинитезимальным генератором: векторные поля $L_{\tilde{f}} g_1, g_1$ из распределения M_1^2). Обозначим векторное поле $\tilde{f}_\bullet = (f + u_3(\mathbf{x}) g_3)_\bullet$ как дифференциальный оператор, действующий на гладкие функции. Последовательно получаем

$$y_1 = T_1(\mathbf{x}) = e^{-x_5} x_4;$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 = \tilde{f}_\bullet T_1(\mathbf{x}) + u_1(\mathbf{x}) g_{1\bullet} T_1(\mathbf{x}) + \\ &+ u_2(\mathbf{x}) g_{2\bullet} T_1(\mathbf{x}) = \tilde{f}_\bullet T_1(\mathbf{x}) = -e^{-x_5} x_1 x_4; \\ \dot{y}_2 &= y_3 = \tilde{f}_\bullet^2 T_1(\mathbf{x}) + u_1(\mathbf{x}) g_{1\bullet} (\tilde{f}_\bullet T_1(\mathbf{x})) + \\ &+ u_2(\mathbf{x}) g_{2\bullet} (\tilde{f}_\bullet T_1(\mathbf{x})) = \tilde{f}_\bullet^2 T_1(\mathbf{x}) = \\ &= x_4 (e^{-x_5} x_1^2 + x_2 e^{-x_5} x_4 - x_1 x_2); \\ \dot{y}_3 &= y_4 = \tilde{f}_\bullet^3 T_1(\mathbf{x}) + u_1(\mathbf{x}) g_{1\bullet} (\tilde{f}_\bullet^2 T_1(\mathbf{x})) + \\ &+ u_2(\mathbf{x}) g_{2\bullet} (\tilde{f}_\bullet^2 T_1(\mathbf{x})) = \tilde{f}_\bullet^3 T_1(\mathbf{x}) = \\ &= -x_4 (e^{-x_5} x_1 x_3 x_4^2 + e^{-x_5} x_2^2 x_4^2 + e^{-x_5} x_1^3 + \\ &+ 3e^{-x_5} x_1 x_2 x_4 + e^{x_5} x_1^2 x_3 + e^{x_5} x_1 x_2^2 - \\ &- x_1 x_2^2 x_4 - 2x_2 x_1^2 - x_1 x_3 x_4 - x_2^2 x_4); \\ \dot{y}_4 &= v_1 = \tilde{f}_\bullet^4 T_1(\mathbf{x}) + u_1(\mathbf{x}) g_{1\bullet} (\tilde{f}_\bullet^3 T_1(\mathbf{x})) + \\ &+ u_2(\mathbf{x}) g_{2\bullet} (\tilde{f}_\bullet^3 T_1(\mathbf{x})) = \tilde{f}_\bullet^4 T_1(\mathbf{x}) + u_1(\mathbf{x}) \times \\ &\times (-x_4^2 (e^{-x_5} x_1 x_4^2 + e^{x_5} x_1^2 - x_1^2 x_4 - x_1 x_4)) + u_2(\mathbf{x}) 0; \\ \dot{y}_5 &= v_2 = \tilde{f}_\bullet T_2(\mathbf{x}) + u_1(\mathbf{x}) g_{1\bullet} (T_2(\mathbf{x})) + \\ &+ u_2(\mathbf{x}) g_{2\bullet} (T_2(\mathbf{x})) = 2x_2 x_3 x_4 - x_2 x_4^2 + \\ &+ u_1(\mathbf{x}) x_4 + u_2(\mathbf{x}) (-2x_3 + x_4). \end{aligned}$$

Замечание. Из-за громоздкости развернутое выражение для $\tilde{f}_\bullet^4 T_1(\mathbf{x})$ опущено.

Данная система линеаризуема в регулярной окрестности, где инволютивные распределения сохраняют свою размерность и не вырождена матрица перехода

$$\Pi = \begin{pmatrix} g_{1\bullet}(\tilde{f}^3 T_1(\mathbf{x})) & g_{2\bullet}(\tilde{f}^3 T_1(\mathbf{x})) \\ g_{1\bullet}(T_2(\mathbf{x})) & g_{2\bullet}(T_2(\mathbf{x})) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -x_4^2(e^{-x_5} x_1 x_4^2 + e^{x_5} x_1^2 - x_1^2 x_4 - x_1 x_4) & 0 \\ x_4 & -2x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

от линейного управления $\mathbf{v}(\mathbf{y}) = \mathbf{K}\mathbf{y}$ к нелинейному

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}) \ u_2(\mathbf{x})) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{v}(\mathbf{y}(\mathbf{x})), \mathbf{x}).$$

Рассмотрим следующий вариант.

Вариант 2. Здесь мы поступим так же, как и первом варианте. Вначале считаем, что управление $u_1(\mathbf{x}) = 0$. Управляемое распределение $M_2^0 = \text{span}\{\mathbf{g}_2(\mathbf{x}), \mathbf{g}_3(\mathbf{x})\}$ является инволютивным и его размерность $\dim M_2^0 = 2$. Соответственно, распределения

$$M_2^1 = \text{span}\{\mathbf{g}_3(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}), L_{\mathbf{f}}\mathbf{g}_3(\mathbf{x}), L_{\mathbf{f}}\mathbf{g}_2(\mathbf{x})\},$$

$$\dim M_2^1 = 3$$

и

$$M_2^2 = \text{span}\{\mathbf{g}_3(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}), L_{\mathbf{f}}\mathbf{g}_3(\mathbf{x}),$$

$$L_{\mathbf{f}}\mathbf{g}_2(\mathbf{x}), L_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g}_3(\mathbf{x}), L_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g}_2(\mathbf{x})\},$$

$$\dim M_2^2 = 4$$

также являются инволютивными, но распределение $M_2^3 = \text{span}\{L_{\mathbf{f}}^i \mathbf{g}_j(\mathbf{x}), i = 0, 1, \dots, 3; j = 3, 2\}$ имеет размерность $\dim M_2^3 = 4$, т. е. система при нулевом управлении $u_1(\mathbf{x}) = 0$ локально не управляема, поэтому необходимо присоединить векторное поле $\mathbf{g}_1$ и найти линеаризующее управление $u_1(\mathbf{x})$. По аналогии с *вариантом 1* выпишем условия на управление $u_1(\mathbf{x})$:

$$[u_1(\mathbf{x})\mathbf{g}_1, M_2^{j-1}]^- = u_1(\mathbf{x})[\mathbf{g}_1, M_2^{j-1}]^- -$$

$$- (M_2^{j-1})_{\bullet}(u_1(\mathbf{x}))\mathbf{g}_1 = 0, j = 1, 2; \quad (29)$$

$$\dim(M_2^j + u_1(\mathbf{x})[\mathbf{g}_1, M_2^{j-1}]^+) = \dim M_2^j, j = 1, 2; \quad (30)$$

$$[u_1(\mathbf{x})\mathbf{g}_1, M_2^2]^- = u_1(\mathbf{x})[\mathbf{g}_1, M_2^2]^- -$$

$$- (M_2^2)_{\bullet}(u_1(\mathbf{x}))\mathbf{g}_1 \neq 0, \quad (31)$$

где $[u_1(\mathbf{x})\mathbf{g}_1, M_2^j]^-$, $([u_1(\mathbf{x})\mathbf{g}_1, M_2^j]^+)$, $j = 0, 1, 2$, — компоненты, которые *не принадлежат (принадлежат)* соответствующим распределениям M_2^j , $j = 1, 2$. Найдем распределение

$$M_2^1(u_1(\mathbf{x})) =$$

$$= \text{span}\{\mathbf{g}_3(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}), L_{\mathbf{f}+u_1\mathbf{g}_1}\mathbf{g}_3(\mathbf{x}), L_{\mathbf{f}+u_1\mathbf{g}_1}\mathbf{g}_2(\mathbf{x})\}.$$

Имеем

$$L_{\mathbf{f}+u_1\mathbf{g}_1}\mathbf{g}_2 = L_{\mathbf{f}}\mathbf{g}_2 + u_1(\mathbf{x})L_{\mathbf{g}_1}\mathbf{g}_2 - g_{2\bullet}(u_1(\mathbf{x}))\mathbf{g}_1 =$$

$$= -(3u_1(\mathbf{x}) + g_{2\bullet}(u_1(\mathbf{x})))\mathbf{g}_1. \quad (32)$$

Откуда согласно формуле (29) получаем

$$3u_1(\mathbf{x}) + g_{2\bullet}(u_1(\mathbf{x})) = 0; \quad (33)$$

$$L_{\mathbf{f}+u_1\mathbf{g}_1}\mathbf{g}_3 = u_1(\mathbf{x})\alpha_1(\mathbf{x})\mathbf{g}_3 + u_1(\mathbf{x})\alpha_2(\mathbf{x})L_{\mathbf{f}}\mathbf{g}_3 +$$

$$+ \alpha_3(\mathbf{x}, u_1(\mathbf{x}))L_{\mathbf{f}}\mathbf{g}_3 + u_1(\mathbf{x})\alpha_4(\mathbf{x})\mathbf{g}_2 - g_{3\bullet}(u_1(\mathbf{x}))\mathbf{g}_1,$$

где $\alpha_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, 4$, — известные функции. Так как в соответствии с условием (29) векторное поле $L_{\mathbf{f}+u_1\mathbf{g}_1}\mathbf{g}_3$ должно принадлежать распределению $M_2^1(u_1)$, векторное поле $L_{\mathbf{f}}\mathbf{g}_3 \in M_2^2$, а управление $u_1(\mathbf{x})$ входит линейно в разложение (35), то выполнение требования (30) для распределения $M_2^1(u_1)$ возможно только для управления $u_1(\mathbf{x}) = 0$, что, как показано выше, не решает задачи линеаризации (отсутствует полная управляемость).

Вывод. Таким образом, управление $u_1(\mathbf{x})$ не может быть линеаризующим управлением.

Обсуждение результатов и заключение

В статье рассмотрен алгоритм нахождения линейных эквивалентов (точной линеаризации) для неинволютивных распределений управляемых векторных полей с использованием линеаризующих управлений, причем, в отличие от известных методов динамической линеаризации, без расширения пространства состояний. Рассмотрен конкретный пример с объектом пятого порядка и тремя управляющими воздействиями. Были исследованы все возможные линеаризующие управления и выбраны те, которые обеспечивают выполнение условий статической линеаризации. Сложность данного подхода заключается в необходимости решать системы уравнений в частных производных с алгебраическими неравенствами. Вторая задача — аналитическая проверка условий инволютивности, т. е. определение функций разложения любого векторного поля по базису из данного инволютивного распределения. Автором разработан алгоритм и написана программа проверки инволютивности в пакете Maple, которая использовалась для получения линеаризующих управлений.

Список литературы

1. Brunovsky P. On classification of linear controllable systems // Kybernetika. 1970. Vol. 6. P. 173—178.
2. Byrnes C., Isidori A. A survey of recent developments in nonlinear control theory // Proc. of 1st IFAC Symp. Robot Conf., Barcelona. 1985. P. 287—291.
3. Dzięza J. A., Czarkowski D. On dynamic feedback linearization of an induction motor // Proc. 5th Europ. Conf. ECC'99, Karlsruhe, Germany. 1999. Paper CD file F0669.pdf. 6 p.
4. Di Benedetto M. D., Isidori A. The matching of nonlinear models via dynamic state feedback // SIAM J. Control, 1986. Vol. 24, N. 5. P. 1063—1075.

5. Franch J., Fossas E. Linearization by prolongations: new bounds for three input systems // Proc. of the 14th IFAC World Congress, Beijing, China. 1999. P.461–466.
6. Nieuwstadt M., Rathinam M., Murray R. M. Differential flatness and absolute equivalence of nonlinear control systems // SIAM J. Control Optim. 1998. Vol. 36, N. 4. P. 1225–1239.
7. Chiasson J. A New Approach to Dynamic Feedback Linearization Control of an Induction Motor // IEEE Transactions on Automatic Control. 1998. Vol. 43, N. 3. P.391–397.
8. Елкин В. И., Коновалова Л. Б. О редукции нелинейных управляемых систем к линейным // Автоматика и телемеханика. 2000. № 2. С. 45–55.
9. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли / Пер. с англ. М.: Мир, 1982. 360 с.

10. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1 / Пер. с англ. М.: Наука, 1981. 344 с.
11. Трофимов В. В. Введение в геометрию многообразий с симметриями. М.: Изд-во МГУ им. М. В. Ломоносова, 1989. 360 с.
12. Постников М. М. Группы и алгебры Ли. М.: Наука, 1982. 448 с.
13. Краснощеченко В. И., Крищенко А. П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. 520 с.
14. Hunt L. R. Controllability of general nonlinear systems // Math. Systems Theory. 1979. N.12. P.361–370.
15. Jucubczyk B., Respondek W. On linearization of control systems // Bull. L'acad Pol. Science. 1980. Vol.28, N. 9–10. P. 517–522.

Linearization of Nonlinear Affine Control Systems with Non-Involutive Distributions by the Introduction of Linearizing Controls

V. I. Krasnoschechenko, v.krasnoschechenko@yandex.ru,

Bauman Moscow State Technical University, Kaluga, 248000, Kaluga Branch, Russian Federation,

Corresponding author: Krasnoschechenko Vladimir I., PhD, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Kaluga, 248000, Kaluga Branch, Russian Federation, e-mail: v.krasnoschechenko@yandex.ru

Accepted on August 31, 2022

Abstract

In the article an algorithm for finding linear equivalents (exact linearization) for noninvolutive distributions of control vector fields is considered. In contrast to the common approach to solving this problem — the use of dynamic linearization (the introduction of integrators), which leads to an expansion of the state space — an algorithm for obtaining involutive distributions and ensuring local controllability based on linearizing controls is proposed. The essence of the algorithm: choose such a control and find an explicit expression for it that a controlled vector field associated with this control, when attached to a drift vector field, will provide local controllability and involution of the corresponding distributions. To check the involution of distributions and find the decomposition functions of vector fields on the basis of the current distribution, and on them directly the conditions imposed on the linearization controls, the author has developed an algorithm and a program in the Maple package for finding these functions. For the convenience of presentation and maximum clarity of the proposed approach, in the article is using notation not generally accepted in applied differential geometry. This applies primarily to the representation of vector fields in coordinate form or in the form of differential operators, which is often not specified, but it is assumed that the shape of the vector field is determined from the context. In the article, these forms are clearly separated and their specific use is shown. An example is considered — a nonlinear affine control system of the fifth order with three controls, in which all stages of synthesis are reflected in detail.

Keywords: Input-state linearization, involution, distribution, linearizing control, non-involutive distributions, controllability indices

For citation:

Krasnoschechenko V. I. Linearization of Nonlinear Affine Control Systems with Noninvolutive Distributions by the Introduction of Linearizing Controls, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 12, pp. 619–627.

DOI: 10.17587/mau.23.619-627

References

1. Brunovsky P. On classification of linear controllable systems, *Kybernetika*, 1970, vol. 6, pp. 173–178.
2. Byrnes C., Isidori A. A survey of recent developments in nonlinear control theory, *Proc. of 1st IFAC Symp. Robot Conf.*, Barselona, 1985, Nov. 6–8, pp. 287–291.
3. Dzieza J. A., Czarkowski D. On dynamic feedback linearization of an induction motor, *Proc. 5th Europ. Conf. ECC'99*, Karlsruhe, Germany, 1999, paper CD file F0669.pdf, 6 p.
4. Di Benedetto M. D., Isidori A. The matching of nonlinear models via dynamic state feedback, *SIAM J. Control*, 1986, vol. 24, no 5, pp. 1063–1075.
5. Franch J., Fossas E. Linearization by prolongations: new bounds for three input systems, *Proc. of the 14th IFAC World Congress*, Beijing, China, 1999, pp. 461–466.
6. Nieuwstadt M., Rathinam M., Murray R. M. Differential flatness and absolute equivalence of nonlinear control systems, *SIAM J. Control Optim.*, 1998, vol. 36, no. 4, pp. 1225–1239.
7. Chiasson J. A. New Approach to Dynamic Feedback Linearization Control of an Induction Motor, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, vol. 43, no. 3, pp. 391–397.

8. Elkin V. I., Konvalova L. B. On the reduction of nonlinear controlled systems to linear ones, *Automation and Telemekhanics*, 2000, no. 2, pp. 45–55 (in Russian).
9. Warner F. Fundamentals of the theory of smooth manifolds and Lie groups, Moscow, Mir, 1982, 360 p. (in Russian).
10. Kobayashi Sh., Nomizu K. Fundamentals of differential geometry. Vol. 1, Moscow, Nauka, 1986, 344 p. (in Russian).
11. Trofimov V. V. Introduction to the geometry of manifolds with symmetries, Moscow, Lomonosov Moscow State University Publishing House, 1989, 360 p. (in Russian).
12. Postnikov M. M. Lie groups and algebras, Moscow, Nauka, 1982, 448 p. (in Russian).
13. Krasnoschechenko V. I., Krishchenko A. P. Nonlinear systems: geometric methods of analysis and synthesis, Moscow, Publishing House of Bauman Moscow State Technical University, 2005, 520 p. (in Russian).
14. Hunt L. R. Controllability of general nonlinear systems, *Math. Systems Theory*, 1979, no. 12, pp. 361–370.
15. Jucubczyk B., Respondek W. On linearization of control systems, *Bull. L'acad Pol. Science*, 1980, vol. 28, no. 9–10, pp. 517–522.