

В. А. Костюков, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., wkost-einheit@yandex.ru,
М. Ю. Медведев, д-р техн. наук, вед. науч. сотр., medvmihal@sfsedu.ru,
В. Х. Пшихопов, д-р техн. наук, гл. науч. сотр., pshichop@rambler.ru,
Южный федеральный университет, г. Таганрог

Алгоритмы планирования сглаженных индивидуальных траекторий движения наземных роботов*

Обсуждается разработка алгоритма построения траектории робототехнической платформы, движущейся в среде с препятствиями. Алгоритм основан на применении специальной локальной процедуры оптимизации на каждом шаге планирования и позволяет получать более адекватные в физическом смысле программные траектории без увеличения вычислительной сложности алгоритмов по сравнению с имеющимися методами. Алгоритм базируется на применении модернизированного метода потенциальных полей и последующем сглаживании полученной траектории. Модернизация метода потенциальных полей заключается в обосновании параметров отталкивающего и притягивающего многообразий и новом способе детектирования и избегания локальных минимумов. При обнаружении локального минимума с помощью специального геометрического критерия алгоритм добавляет на карту дополнительное препятствие, что позволяет избежать его при дальнейшем планировании траектории. Для обхода препятствий, которые могут быть аппроксимированы многоугольниками, предложен метод эффективной точки до препятствия, являющейся эквивалентом последнего по отношению к текущему расположению движущейся робототехнической платформы при применении данного метода планирования.

Предложена двухэтапная методика сглаживания кусочно-линейной траектории. Предполагается, что имеется исходная неоптимальная кривая, найденная любым методом планирования. Данная кривая оптимизируется с использованием функционала, включающего длину траектории и отклонение оптимизированной кривой от исходной кривой. На втором этапе осуществляется сопряжение линейных отрезков планируемой прямой кривыми второго порядка. В результате планируемая траектория движения представляет собой квадратично-линейную кривую с гладкой функцией траекторной скорости. При этом предложенный способ сопряжения прямолинейных участков траектории не требует резких изменений скорости при прохождении поворотов.

Рассматриваются и обсуждаются результаты моделирования, подтверждающие эффективность предлагаемой методики планирования траекторий движения роботов.

Ключевые слова: планирование траекторий, гладкие траектории, локальные минимумы, робототехническая платформа, двумерная среда

Введение

Построение траектории робототехнической платформы (РТП) в картографированной среде позволяет использовать разные алгоритмы планирования, включая алгоритмы A^* [1, 2], D^* [3], случайных деревьев [4, 5], дорожных карт [6], потенциальных полей [7–9], неустойчивых режимов [10, 11]. Указанные алгоритмы формируют, как правило, негладкие траектории, которые могут включать участки с осцилляциями. Для сглаживания таких траекторий необходимо применять отдельные алгоритмы. Также при планировании необходимо учиты-

вать скоростной режим движения, определяющийся техническими характеристиками РТП [12]. Особенно важно, чтобы планируемая траектория была реализуемой в ситуации, когда робот действует в группе, поскольку отклонение от заданного пути может приводить к коллизиям [13–16].

Предлагаемый в данной статье подход работает в непрерывном пространстве, однако для получения траектории первого приближения может осуществляться разбиение исходного пространства на дискретные ячейки [17–19]. Пространственная декомпозиция позволяет применять методы дискретного поиска, базирующиеся на теории графов; наибольшую популярность получили упомянутые выше алгоритмы семейств A^* и D^* [1–3].

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 22-29-00370.

Алгоритм A^* является развитием алгоритма Дейкстры, в котором с помощью эвристической функции стоимости пути снижена вычислительная сложность. Вместе с тем, алгоритм требователен к памяти, и число расчетов резко растет с ростом числа ячеек разбиения. Для снижения требовательности алгоритма A^* к памяти и его вычислительной сложности разработаны алгоритмы с итеративным углублением [20], A^* с ограничением памяти [21], иерархический A^* [22], A^* с динамическим изменением весов ребер [23, 24].

Более простым является метод потенциальных полей. Он позволяет планировать маршрут в динамических средах, а также получать более гладкие траектории [25–27]. Ограничением метода потенциальных полей является наличие локальных минимумов, из которых выходят с использованием отдельных алгоритмов [11, 25]. Кроме того, отталкивающие и, возможно, притягивающие функции лишь частично отражают физические аналоги и отличаются достаточной сложностью, не позволяющей использовать локальные процедуры оптимизации на каждом шаге движения. Преимущество использования таких процедур возможно и эффективно, если используется простой функционал, учитывающий правильно обоснованные факторы планирования, с адекватно определяемыми коэффициентами настройки.

В связи с изложенными проблемами предлагается использовать модернизированный алгоритм потенциальных полей, который позволяет избегать локальных минимумов. Для этого детектируется явление "зацикливания вокруг точки" и назначаются дополнительные препятствия в точках обнаруженных минимумов. Для учета влияния формы препятствий предлагается новый метод эффективной точки, являющейся эквивалентом таких препятствий по отношению к текущему расположению движущейся РТП.

Для построения сглаженных траекторий предлагается методика минимизации пространственной кусочно-линейной кривой по длине с последующим скруглением участков при вершинах дугами окружностей.

Постановка задачи

Рассматривается двумерная прямоугольная среда с препятствиями, представленная на

рис. 1 (см. третью сторону обложки). Отдельные препятствия представлены в виде выпуклых многоугольников, однако они могут образовывать сложные конфигурации, включая невыпуклые фигуры.

Полагается, что путь из текущего в целевое положение существует. На рис. 1 (см. третью сторону обложки) красной штриховой линией показана траектория первого приближения, которая строится модифицированным методом потенциальных полей. Зеленой сплошной линией представлена оптимизированная траектория. Дискретность исходной кривой обусловлена частотой обновления траектории движения.

Целью данной статьи является разработка простого и эффективного алгоритма построения глобальной траектории, обеспечивающего обход локальных минимумов на основании детектировании областей этих минимумов с последующим введением соответствующих виртуальных препятствий.

Алгоритм планирования должен сглаживать полученную программную траекторию, не допуская значительных осцилляций при движении в области препятствий. При этом под гладкостью понимается отсутствие значительных осцилляций, возникающих при движении вдоль препятствий, и отсутствие разрывов по скоростям в точках обновления траектории.

Алгоритм планирования с обнаружением локальных минимумов

Разрабатываемый модифицированный метод планирования отличается способом детектирования циклических движений относительно точки локального минимума. После обнаружения такой точки она считается новым препятствием, от которого начинает отталкиваться РТП.

Даны исходная точка $A(x_A, y_A)$ и целевая точка $B(x_B, y_B)$ и препятствия $X_{obs,i}(x_{obs,i}, y_{obs,i})$, $i = 1, 2, \dots, N_{obs}$. Рассмотрим итерационную процедуру, которая на k -м шаге, $k = 1, 2, \dots, K$, K — число итераций, необходимых для достижения окрестности целевой точки, определяет векторное приращение ΔX_k для перехода в следующую точку X_{k+1} : $X_{k+1} = X_k + \Delta X_k$. Пусть модуль приращения $|\Delta X_k| = \Delta r$ на k -м шаге определен и равен $\Delta r_k = v_k \Delta t$, где v_k — траекторная скорость РТП, Δt — интервал времени между соседними отсчетами итерационной процедуры. Требуется максимизировать функционал

$$\Phi(X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{N_{obs}} \delta_{ik} |X_{k+1} - X_{obs,i}|^2 - \delta_{B,k} |X_{k+1} - X_B|^2 \rightarrow \max, \quad (1)$$

при условии $|X_{k+1} - X_k|^2 = \Delta r^2 = v_k^2 \Delta t^2 = \text{const}$. Первое слагаемое в (1) — взвешенная сумма квадратов $|X_{k+1} - X_{obs,i}|^2$ расстояний до препятствий с весовыми коэффициентами $0 \leq \delta_{ik} \leq 1$. Второе слагаемое (1) — расстояние до целевой точки, весовой коэффициент $0 \leq \delta_{B,k} \leq 1$ определяется адаптивно, причем справедливо условие нормировки на каждом k -м шаге:

$$\sum_{i=1}^{N_{obs}} (\delta_{ik} + \delta_{B,k}) = 1. \quad (2)$$

Решение приведенной задачи дает следующее выражение для X_{k+1} :

$$X_{k+1} = X_k - \frac{v_k \Delta t [F_{1k}; F_{2k}]^T}{\sqrt{F_{1k}^2 + F_{2k}^2}}; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} F_{1k} &= (\tilde{x}_{obs,k} - x_k)(1 - \delta_{B,k}) + \delta_B(x_k - B), \\ F_{2k} &= (\tilde{y}_{obs,k} - y_k)(1 - \delta_{B,k}) + \delta_B(y_k - B), \end{aligned} \quad (4)$$

$$[\tilde{x}_{obs,k}; \tilde{y}_{obs,k}] = \sum_{i=1}^{N_{obs}} \delta_{ik} X_{obs,i} / (1 - \delta_{B,k}). \quad (5)$$

Для определения весовых коэффициентов δ_{ik} , $i = 1, 2, \dots, N_{obs}$, и $\delta_{B,k}$ выделим две вложенные окрестности $U_{pr,i1}$ и $U_{pr,i2}$ с общим центром в точке i -го препятствия и радиусами $R_{pr,1} < R_{pr,2}$. Нахождение в окрестности $U_{pr,1}$ считается наиболее опасным. Индекс i в обозначении указанных окрестностей далее опускаем в силу их взаимной конгруэнтности между собой.

На k -й итерации детектируем препятствия, для которых обеспечено вхождение текущей точки X_k в их большие окрестности $U_{pr,i2}$, используя условия

$$|X_k - X_{obs,kl}| < R_{pr,2}, \quad (6)$$

где u_{kl} , $l = 1, 2, \dots, L_k$, — множество номеров этих препятствий. Если это множество пустое, то движение осуществляется в направлении целевой точки, поэтому весовые коэффициенты назначаются следующим образом: $\delta_{B,k} = 1$, $\delta_{ik} = 0$, $i = 1, 2, \dots, N_{obs}$. Если это множество непустое, то определяется ближайшее к текущей точке препятствие с номером $i' = u_{kl'}$ (для которого $l' \leq L_k$), и затем анализируется, попадает ли текущая точка в меньшую окрестность

этого препятствия, т. е. проверяется выполнение условия

$$|X_k - X_{obs,i'}| < R_{pr,1}. \quad (7)$$

При выполнении условия (7) для весового коэффициента $\delta_{B,k}$ назначается значение $\delta_{B,\min} \ll 1$, а коэффициенты δ_{ik} определяются по формулам, учитывающим расстояния от точки X_k до препятствий из множества u_{kl} :

$$\delta_{ik} = \xi_k |X_k - X_{obs,u_{kl}}|^{-1}; \quad (8)$$

$$\xi_k = (1 - \delta_{B,\min}) / \sum_{i=1}^{L_k} |X_k - X_{obs,u_{kl}}|^{-1}, \quad (9)$$

и использовано условие нормировки (2). Если точка X_k не входит в меньшую окрестность $U_{pr,i1}$ ближайшего препятствия, т. е. условие (7) не выполняется, то назначается $\delta_{B,k} = \delta_{B,\text{mean}} > \delta_{B,\min}$, а коэффициенты δ_{ik} определяются по выражениям (8) и (9) с заменой $\delta_{B,\min}$ на $\delta_{B,\text{mean}}$.

Далее коэффициент $\delta_{B,k}$ корректируется в соответствии с выражением

$$\delta'_{B,k} = \delta_{B,k} R_B / |X_k - X_B|. \quad (10)$$

Здесь R_B — характерное расстояние до целевой точки, такое что при $|X_k - X_B| > R_B$ коэффициент $\delta'_{B,k}$ начинает гиперболически зависеть от $|X_k - X_B|$ и поэтому значительно растет при приближении к целевой точке. Соответствующие модернизированные формулы для расчета F_{1k} , F_{2k} получаются из (4) заменой $\delta_{B,k}$ на коэффициент $\delta'_{B,k}$ (10).

Скорость робота v_k варьируется следующим образом. Вводится окрестность препятствия, которую не должна пересекать РТП. Для выполнения этого условия проверяется, находится ли точка X_k в пределах радиуса торможения $R_{br} > R_{pr,1}$. Если условие $R_{br} > R_{pr,1}$ выполняется, то рассчитывается время Δt_{br} , которое необходимо для торможения с постоянным ускорением. Если это время меньше времени дискретизации итерационной процедуры $\Delta t_{br} < \Delta t$, то модуль скорости на следующей итерации уменьшается так, чтобы обеспечить равенство $\Delta t_{br} = \Delta t$. Таким образом, модуль скорости v_k изменяется в зависимости от условий движения в малой окрестности препятствия. Режим принудительного торможения позволяет учитывать особенности РТП, в том числе максимально возможное ускорение, путем варьирования радиуса R_{br} .

В предлагаемой методике используются простые выражения для притягивающих и отталкивающих сил, позволяющие оптимизировать локальный функционал, в результате чего находить вектор смещения к следующей точке пути. Весовые коэффициенты этого функционала имеют физический смысл и адаптивно перестраиваются.

Для обхода локальных минимумов вначале задается максимальное число шагов N_{iter} , за которое РТП должна достичь цели. Далее применяется метод потенциальных полей. Если объект не достигает цели, то считается, что он попал в локальный минимум. В этом случае находится область локального минимума. Вводится виртуальное круговое препятствие, которое включает окрестность локального минимума. Определяется ближайшая к этому препятствию точка X_{near} траектории, из которой необходимо продолжить движение. Для того чтобы часть траектории в окрестности точки X_{near} не пересекала виртуальное препятствие, целесообразно отстраиваться от его границы, т. е. если $X'_{\text{near}} = X(i'')$, то исходная точка уточняется следующим образом: $X'_{\text{near}} = X(i')$, где $i' = i'' - \Delta i$, $\Delta i < i''$, Δi — натуральное положительное число.

Точка X'_{near} считается исходной для планирования пути по методу потенциальных полей на первой итерации с виртуальным препятствием.

Может оказаться так, что РТП вновь попадет в тот же локальный минимум, если не удалось достаточно точно его детектировать. Тогда строится уточненное виртуальное препятствие, соответствующее данному минимуму. Может быть случай, когда РТП успешно минует этот минимум и попадает в другой. В этих случаях все действия, рассмотренные выше, повторяются.

Условие выхода из локального минимума за конечное число итераций — принадлежность каждой промежуточной начальной точки нового участка траектории уже имеющейся траектории, смещенной в сторону точки старта A .

Пусть n_0 — число узлов конечного участка траектории при попадании в область локального минимума. Рассчитаем среднюю точку $X_{\text{mean},0} = \frac{1}{n_0 + 1} \sum_{j=N-n_0}^N X(x_i, y_i)$ по совокупности последних n_0 узлов. Здесь N — число всех узлов траектории.

Максимальное отклонение $\Delta X_{\text{max},0}$ этих точек от среднего $X_{\text{mean},0}$ равно

$$\Delta X_{\text{max},0} = \sqrt{\frac{1}{n_0 + 1} \sum_{i=N-n_0}^N [X(x_i, y_i) - X_{\text{mean},0}]^2}. \quad (11)$$

Введем меру осцилляций участка траектории в виде среднего изменения $\Delta \psi_s$ угла рысканья, которое оценивается в соответствии с выражением

$$\Delta \psi_s(i_1, i_2) = \sqrt{\sum_{i=i_1}^{i_2} \Delta \psi_i^2 / N'}, \quad (12)$$

где $N' = i_2 - i_1 + 1$ — число точек обновления траектории; i_1, i_2 — номера узлов траектории, образующих ее участок; $\Delta \psi_i$ — приращение угла рысканья на i -м шаге обновления траектории. Значение меры (12) для конечного участка траектории в составе n_0 последних узлов обозначим $\Delta \psi_{s,0} \equiv \Delta \psi_s(N - n_0, N)$.

Рассмотрим множества новых точек исходной траектории:

$$\{X(x_i, y_i)\}, \quad i = N - n_0 - n_2(k-1), \dots, N, \quad (13)$$

где $k = 1, 2, \dots, K < N$, $n_2 = 0, 1, 2, \dots$ — шаг приращения по числу точек.

Для каждого такого набора определены величины

$$X_{\text{mean},k} = \frac{1}{(n_0 - n_2(k-1) + 1)} \sum_{i=N-n_0-n_2(k-1)}^N X(x_i, y_i); \quad (14)$$

$$\Delta X_{\text{max},k} = \sqrt{\frac{1}{(n_0 - n_2(k-1) + 1)} \times \sum_{i=N-n_0-n_2(k-1)}^N [X(x_i, y_i) - X_{\text{mean},k,0}]^2}; \quad (15)$$

$$\Delta \psi_{s,k} = \sqrt{\frac{1}{(n_0 - n_2(k-1) + 1)} \sum_{i=N-n_0-n_2(k-1)}^{N-n_2(k-1)} \Delta \psi_i^2}. \quad (16)$$

Величина $\Delta \psi_{s,k}$ (16) рассчитывается в "скользящем окне" шириной n_0 , перемещающемся от конца траектории в обратном направлении.

Введем в рассмотрение критерий, учитывающий два фактора — изменение максимального удаления и изменение среднего угла отклонения:

$$K_{\text{eff}}(k) = (\Delta X_{\text{max},k} / \Delta X_{\text{max},0})^2 + (\Delta \psi_{s,0} / \Delta \psi_{s,k})^2. \quad (17)$$

Определим, на каком шаге k' значение критерия (17) превысит заданное значение $K_{\text{eff},kr} > 1$, т. е. выполнится неравенство

$$K_{\text{eff}}(k') > K_{\text{eff},kr}. \quad (18)$$

Согласно выражению (18) до тех пор, пока множества (13) при достаточно малых k находятся в области локального минимума, значение $\Delta X_{\max,k}$ колеблется в малой окрестности значения $\Delta X_{\max,0}$. Кроме того, имеются осцилляции траектории на всех участках, входящих в область локального минимума, но от участка к участку при малых изменениях k в (13) величина $\psi_{s,k}$ меняется слабо. При удалении от локального минимума коэффициент (17) нарастает, поскольку в первом слагаемом величина $\Delta X_{\max,k}$ увеличивается, а $\Delta \psi_{s,k}$ уменьшается, так как уменьшается среднее изменение угла рыскания на участке, порожденном узлами $i = N - n_0 - n_2(k - 1), \dots, N - n_2(k - 1)$.

При достаточно большом значении $K_{eff,kr}$ неравенство (18) становится критерием пересечения границы области локального минимума. При этом возрастает максимальное расстояние от новых точек множества (13) до средней точки $X_{\text{mean},k}$, а осцилляции уменьшаются.

Как только найдено ближайшее множество, удовлетворяющее условию (18), вводится дополнительное виртуальное препятствие с центром и радиусом

$$X_{obs,add} = X_{\text{mean},k}, \quad r_{obs,add} = k_{s2} |X(x_{i'}, y_{i'})|, \quad (19)$$

где $i'' = N - n_0 - n_2(k' - 1)$.

Номер исходной точки $X(x_{i'}, y_{i'})$, совпадающей с X'_{near} , введенной выше, определяется согласно выражению

$$i' = i'' - n_3 = N - n_0 - n_2(k' - 1) - \Delta i, \quad (20)$$

где $\Delta i = [2r_{obs,add}/(V\Delta t)]$; $[\cdot]$ — операция отбрасывания дробной части; V — крейсерская скорость РТП; Δt — шаг дискретизации.

шей точки до ближайшей точки многоугольника. Назовем его эффективным расстоянием от текущей точки до препятствия. Далее оно используется в методе потенциальных полей.

Алгоритм уменьшения осцилляций

Пусть имеется начальная траектория движения РТП, представленная точками $A'_i(x'_i, y'_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Рассмотрим алгоритм, позволяющий проводить сглаживание этой траектории. Заметим, что сглаживание осцилляций сопряжено с минимизацией длины траектории. Поэтому проблема снижения указанных осцилляций ставится в виде задачи оптимизации функционала

$$G(Tr, p) = \delta_1 \sum_{i=2}^{N-1} [(x_i - x'_i)^2 + (y_i - y'_i)^2] + \delta_2 \sum_{i=2}^{N-1} [(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2], \quad (21)$$

где первое слагаемое есть сумма квадратов отклонений координат точек $A_i(x_i, y_i)$ от исходных точек $A'_i(x'_i, y'_i)$, а второе — длина целевой кривой Tr . Коэффициенты $0 \leq \delta_1, \delta_2 \leq 1$ задают степень влияния слагаемых в функционале (21).

Стационарная точка $X_{st}[x_{st,2}, \dots, x_{st,N-1}]^T$, $Y_{st}[y_{st,2}, \dots, y_{st,N-1}]^T$ функционала (21) по переменным $\{x_i, y_i\}$, $i = 1, 2, \dots, N - 1$ может быть найдена в виде

$$X_{st} = A^{-1}B_X, \quad Y_{st} = A^{-1}B_Y, \quad (22)$$

$$[A]_{N-2 \times N-2} = \begin{bmatrix} \delta_1 + 2\delta_2 & -\delta_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\delta_2 & \delta_1 + 2\delta_2 & -\delta_2 & 0 & \dots & . & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_2 & \delta_1 + 2\delta_2 & -\delta_2 & \dots & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & . & . & 0 & 0 \\ 0 & . & 0 & \dots & . & \delta_1 + 2\delta_2 & -\delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & . & \dots & 0 & -\delta_2 & \delta_1 + 2\delta_2 & -\delta_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\delta_2 & \delta_1 + 2\delta_2 \end{bmatrix}; \quad (23)$$

Для учета формы препятствий внешний контур аппроксимируется выпуклым многоугольником. При нахождении РТП рядом с препятствием рассчитывается расстояние от теку-

$$B_x = [\delta_1 x'_2 + \delta_2 x'_1, \delta_1 x'_3, \dots, \delta_1 x'_{N-2}, \delta_1 x'_{N-1} + \delta_2 x'_N]^T; \\ B_y = [\delta_1 y'_2 + \delta_2 y'_1, \delta_1 y'_3, \dots, \delta_1 y'_{N-2}, \delta_1 y'_{N-1} + \delta_2 y'_N]^T. \quad (24)$$

Покажем, что в точке (22) выполняется достаточное условие локального минимума по минорам матрицы Гессе при любых значениях δ_1, δ_2 таких, что $0 \leq \delta_1, \delta_2 \leq 1, \delta_G + \delta_L = 1$. Действительно, матрица Гессе для функционала (21) есть блочно-диагональная матрица. Известно, что если каждый из блоков такой матрицы положительно определен, тогда и результирующая блочно-диагональная матрица также будет положительно определенной [30].

Согласно следствию из теоремы Гершгорина [31], для любой симметрической матрицы с положительными элементами на главной диагонали достаточным условием положительной определенности этой матрицы является условие строгого доминирования диагональных элементов. Для симметрической трехдиагональной матрицы Теплица (21) это условие имеет вид

$$|\delta_1 + 2\delta_2| > 2|\delta_2|. \quad (25)$$

А так как по условию $0 \leq \delta_1, \delta_2 \leq 1$, то (23) может быть переписано как

$$\delta_1 + 2\delta_2 > 2\delta_2. \quad (26)$$

Из (26) следует, что достаточным условием локального минимума является условие $\delta_1 > 0$.

Заметим, что в точке (22) достигается и глобальный минимум функционала (21) в силу единственности стационарной точки для этого функционала.

При сглаживании могут быть использованы два условия — требование не пересечения препятствий и не превышение некоторого максимального отклонения σ_{kr} от исходной кривой. Это расхождение имеет смысл среднего значения амплитуды помеховых осцилляций, которые должны быть снижены. Это условие будем записывать в виде

$$\sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{i=2}^{N-1} [(x_i - x'_i)^2 + (y_i - y'_i)^2]} \leq \sigma_{kr}. \quad (27)$$

Для нахождения траектории минимальной длины с учетом указанных условий используется следующая процедура. Перебираются значения δ_1 в диапазоне $[\delta_{lmin}, \delta_{lmax}]$, $\delta_{lmin} \ll \delta_{lmax}$ с шагом $\Delta\delta_1 \ll \delta_{lmax}$. Значение δ_{lmax} соответствует случаю, когда оптимальное решение без учета указанных двух условий дает кривую, наиболее близкую к кратчайшему пути между точками (x_1, y_1) и (x_N, y_N) . Если оба условия удовлетворяются, то полученное решение будет оптимальным на множестве $\delta_1 \in [\delta_{lmin}, \delta_{lmax}]$. Если хотя бы

одно из этих условий не выполняется, то нужно перейти к большему значению δ_1 и далее — вновь проверить указанные условия.

Такая процедура повторяется до тех пор, пока не найдется такое значение δ_1 из интервала $[\delta_{lmin}, \delta_{lmax}]$, при котором удовлетворяются оба указанных выше условия, либо пока не будут исчерпаны все дискретные значения $\{\delta_{1,k}\}$, $k = 1, 2, \dots, K$, соответствующей последовательности.

На рис. 1 (см. третью сторону обложки) представлен пример нахождения траектории минимальной длины с учетом ограничивающих условий при следующих параметрах: $\sigma_{kr} = 7$ м, длина исходной кусочно-линейной кривой $l_0 = 140,28$ м. Интервал изменения параметра δ_1 $[\delta_{lmin} = 0,02; \delta_{lmax} = 0,98]$, шаг $\Delta\delta_1 = 0,02$. Полученная длина сглаженной кривой $l_{opt} = 73,87$ м при $\delta_1 = 0,22$ и $\sigma_2 = 7$ м. На рис. 1 (см. третью сторону обложки) красной кривой изображена исходная кусочно-линейная траектория, синим цветом представлены кривые на итерациях, зелеными точками показаны узловые точки оптимизированной по рассмотренному алгоритму кривой.

Квадратично-линейное сглаживание траектории

После получения кривой с уменьшенными колебаниями проводится ее сглаживание. Для этого применяется аппроксимация прямолинейными отрезками, гладко сопряженными с дугами окружностей [33], строящихся в каждой узловой точке исходной кусочно-линейной кривой.

Для сглаживания траекторий в виде отдельных точек применяются различные приемы, непрерывная линейная интерполяция весов на границе каждой ячейки, что приводит к значительно большему числу базовых точек, а также к значительному увеличению времени планирования [33].

Также необходимо устранять разрывы скоростей во времени. В противном случае планируемые траектории не позволят двигаться без рывков скоростей в узловых точках. Последнее может привести к снижению средней скорости каждой отдельной РТП и группы в целом.

Вторая причина использования гладких временных параметрических представлений индивидуальных траекторий заключается в требовании замедления движения РТП на участках с большой кривизной траектории.

Для решения указанных проблем кривые Безье [34] не подходят, так как они не дают возможности моделировать движение с замедлением на участках с повышенной кривизной. Если параметр кривой Безье считать функцией времени, то возникает нетривиальная задача нахождения этой функции по заданным требованиям. Поэтому для реализации процедуры сглаживания будем использовать два геометрических элемента: прямолинейные отрезки и дуги окружностей, которые стыкуются по касательным. Траекторная скорость на такой объединенной кривой должна быть гладкой функцией времени.

На рис. 2 представлен участок кусочно-линейной кривой, содержащий прямые A_1A_2 и A_2A_3 с базисными точками A_1 , A_2 и A_3 . Этот участок всегда можно заменить дугой некоторой окружности с центром в точке M , радиусом R и двумя прямыми отрезками A_1B , CA_3 , C — точка касания окружности.

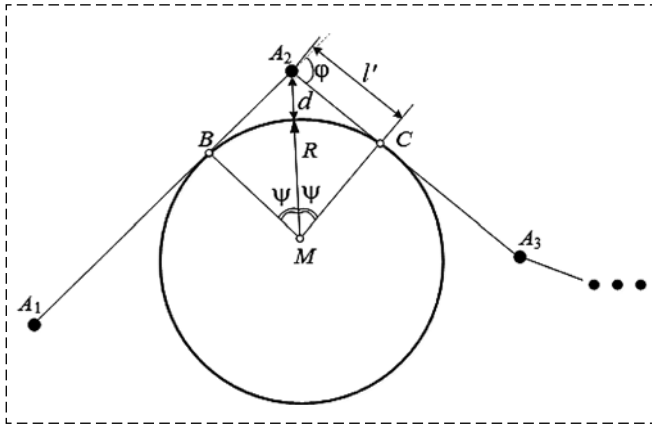


Рис. 2. Геометрия задачи по определению окружности сопряжения

Fig. 2. Geometry of the problem of determining the conjugation circle

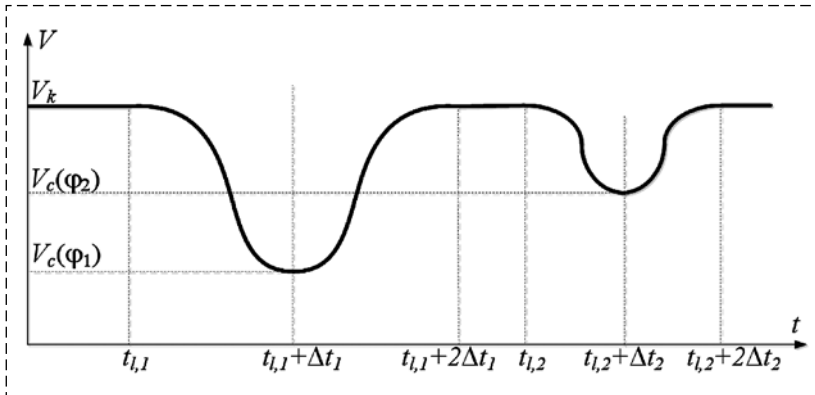


Рис. 3. Изменение планируемой скорости на повороте

Fig. 3. Changes in the planned speed on the turn

Величины R и l' определяются следующими выражениями:

$$l' = \frac{d(1 + \cos \psi)}{\sin \psi}; \quad (28)$$

$$R = l' / \operatorname{tg} \psi, \quad (29)$$

где $\psi = \varphi/2$ — половина угла поворота вектора скорости РТП при переходе с линейного участка A_1B на CA_3 после окончания движения по дуге.

На рис. 3 представлен график изменения планируемой скорости на повороте.

Параметрическое представление участка дуги имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= x_M + R \cos(s_c(t - t_l) + \alpha), \\ y(t) &= y_M + R \sin(s_c(t - t_l) + \beta), \end{aligned} \quad (30)$$

где t_l — время начала движения по дуге BC ; $s_c(t - t_l)$ — угловое расстояние, пройденное по окружности дуги к моменту времени t , причем $s_c(0) = 0$; α и β — неопределенные постоянные углы.

Для получения гладкой функции скорости будем исходить из следующего требования: на линейных участках скорость РТП постоянна и равна крейсерской скорости V , а на дуговых участках профиль скорости дан обобщенным выражением

$$v(t) = a(\varphi) \cos[\pi(t - t_l)/\Delta t] + b(\varphi), \quad (31)$$

где Δt — половина периода движения по участку BC ;

$$a(\varphi) = 0,5(V - V_c(\varphi)), \quad b(\varphi) = 0,5(V + V_c(\varphi)), \quad (32)$$

$V_c(\varphi)$ — монотонно убывающая функция угла поворота φ , характеризующая минимальное значение скорости, которое должно быть достигнуто на локальном участке движения по дуге.

Непосредственной проверкой легко убедиться в непрерывности функции скорости, задаваемой указанным способом.

Функция $V_c(\varphi)$ при $\varphi = 0$ принимает максимальное значение, равное крейсерской скорости $V_c(0) = V$. При $\varphi = \pi$ скорость принимает минимально возможное для данной РТП значение $V_c(\pi) = V_0$, определяемое ее техническими характери-

ками. Тогда в приближении линейности $V_c(\varphi)$ получим

$$V_c(\varphi) = V - (V - V_0)\varphi/\pi. \quad (33)$$

Целесообразным является введение пропорциональной зависимости между минимально допустимой скоростью на криволинейных участках V_0 и скоростью на линейных участках V . В этом случае выражение (33) принимает вид

$$V_c(\varphi) = V_k[1 - (1 - \eta)\varphi/\pi], \quad (34)$$

где принято, что $V_0 = \eta V$, $\eta = \text{const} < 1$.

При условии (34) половина времени прохождения дугового участка есть

$$\Delta t_c = R\psi/b. \quad (35)$$

Таким образом, на линейном участке РТП движется с постоянной скоростью V , а на повороте скорость косинусоидально спадает до уровня $V_c(\varphi)$ (34). Если минимально допустимая скорость пропорциональна величине V , то минимальная скорость на повороте также пропорциональна V согласно (34).

Отметим, что алгоритм уменьшения осцилляций может сглаживать как нежелательные осцилляции, так и колебания, связанные с маневрами уклонения и обхода препятствий. Необходимо рассматривать расстояние $d_{\min, \text{line}}$ минимального прямолинейного участка траектории одиночной РТП. Вся исходная кривая разбивается на участки, длина каждого из которых равна примерно $d_{\min, \text{line}}$. Далее для каждого участка решается задача минимизации осцилляций, при этом граничные точки выделенных участков являются неподвижными в процессе оптимизации. После этого полученная кусочно-ломаная кривая подвергается квадратично-линейному сглаживанию.

Результаты численного моделирования

При моделировании создана среда размером 1000×1000 м, на которой генерируются тетрагональные препятствия. Точка старта и цели выделены красными кружками. Траекторная скорость и шаг времени моделирования равны: $V = 6$ м/с, $\Delta t = 1$ с. Максимальное число шагов, отводимое на одну итерацию, подобрано экспериментально и составило $M = 500$. Число узлов конечного участка траектории и переменного участка "скользящего окна", ис-

пользуемых в процедуре обхода локальных минимумов, $n_0 = 60$.

На рис. 4 (см. третью сторону обложки) представлен случай, когда планирование применяется без алгоритма обнаружения локального минимума. В этом случае РТП до цели не доходит, процесс прекращается при достижении предельного значения $N_{\text{iter}} = 300$.

На рис. 5 (см. третью сторону обложки) представлены результаты моделирования метода планирования с алгоритмом обнаружения локальных минимумов. В приведенных двух примерах достаточно двух итераций для выхода из локального минимума. На рис. 5 (см. третью сторону обложки) красными кружками, расположенными в малых окрестностях препятствий, показаны области локальных минимумов. Зелеными линиями представлены соответствующие сглаженные траектории, полученные после применения модифицированного метода потенциальных полей. В результате сглаживания для первого примера удается уменьшить параметр $\Delta\psi_s$ в (18) от значения 2,21 до значения 0,071, а для второго — от 2,37 до значения 0,063.

На рис. 6 (см. третью сторону обложки) приведены результаты моделирования для среды, в которой имеется несколько локальных минимумов.

В ходе исследования проведена серия из 200 экспериментов со случайной картой. Во всех случаях достигнута целевая точка, в 34 % примеров детектированы локальные минимумы с последующим их обходом по предложенной выше процедуре. При этом уменьшение параметра $\Delta\psi_s$ в результате применения процедуры сглаживания составляет от 19,4 до 59,2 раз.

Получено, что модифицированный метод потенциальных полей с алгоритмом детектирования и обхода локальных минимумов и двухэтапной процедурой сглаживания позволяет с небольшими вычислительными затратами и с малым набором обоснованно выбираемых параметров получить гладкую траекторию РТП. В отличие от метода случайной генерации направления движения из точки локального минимума, предложенного в работе [35], данный метод позволяет выводить робота из области циклических движений.

В отличие от метода неустойчивых режимов [11, 25], в котором за счет контролируемых бифуркаций в динамике робота обеспечивается выход из области локального минимума при

определенных массоинерционных и кинематически-рулевых ограничениях, предлагаемый метод является кинематическим, работающим безотносительно к динамике объекта. Очевидно, что максимальный учет кинематических особенностей движения в отношении локализации минимумов потенциальных функций обеспечивает менее жесткие требования к конечной системе управления роботом.

Заключение

В настоящей работе предложено использовать модернизированный алгоритм потенциальных полей, позволяющий избегать локальных минимумов за счет детектирования явления "заикливание вокруг точки". Алгоритм базируется на оптимизационной процедуре, в которой функционал качества включает отталкивающую и притягивающую составляющие, имеющие квадратичную форму. Параметры этих составляющих обосновываются в большей степени, чем в исходном методе потенциальных полей.

Для учета препятствий многоугольной формы предложен метод эффективной точки, являющейся эквивалентом таких препятствий по отношению к текущему положению движущейся РТП.

Для сглаживания траекторий предлагается двухступенчатая методика, включающая минимизацию полученной пространственной кусочно-линейной кривой по длине, последующее построение кусочно-квадратичной кривой и ее временную параметризацию. Процедура обеспечивает сглаживание траектории в окрестностях ее вершин, а также управление траекторной скоростью робота с учетом особенностей кинематики РТП на поворотах.

Полученные результаты моделирования подтверждают эффективность процедуры нахождения локальных минимумов, а также их обход для сред с множеством минимумов. При этом вычислительная сложность предлагаемых алгоритмов не выше сложности алгоритмов, предложенных в работах [11, 25–27, 35].

В дальнейшем описанные алгоритмы планируется использовать в системе группового управления движением РТП. В таких системах особенно важно получение гладких физически реализуемых траекторий, поскольку отклонение от них может приводить к коллизиям.

Список литературы

1. Hart P. E., Nilsson N. J., Raphael B. A. Formal Basis for the Heuristic Determination of Minimum Cost Paths // IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics. 1968. Vol. 2. P. 100–107.
2. Писковский Д. С., Абдуллин Ф. Х., Николаева А. Р. Оптимизация алгоритма планирования пути A-star // Вестник ЮУрГУ. Серия "Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника". 2020. Т. 20, № 1. С. 154–160.
3. Stentz A. Optimal and efficient path planning for partially known environments // In Intelligent Unmanned Ground Vehicles. Springer, Boston, MA, USA, 1997. P. 203–220.
4. Казаков К. А., Семенов В. А. Обзор современных методов планирования пути // ТРУДЫ ИСП РАН. 2016. Т. 28(4). С. 241–294.
5. LaValle S. M., Kuffner J. J. Rapidly-exploring random trees: Progress and prospects // 2000 Workshop on the Algorithmic Foundations of Robotics. 2000. P. 293–308.
6. Ravankar A., Ravankar Ab., Emaru T., Kobayashi Y. HPPRM: Hybrid Potential Based Probabilistic Roadmap Algorithm for Improved Dynamic Path Planning of Mobile Robots // IEEE Access. 2020. Vol. 8. P. 221743–221766.
7. Khatib O. Real-Time Obstacles Avoidance for Manipulators and Mobile Robots // International Journal of Robotics Research. 1986. Vol. 5(1). P. 90–98.
8. Платонов А. К., Карпов И. И., Кирильченко А. А. Метод потенциалов в задаче прокладки трассы. М.: Препринт Института прикладной математики АН СССР, 1974. 27 с.
9. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. Вопросы управления движением мобильных роботов методом потенциально-го наведения // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20, № 11. С. 677–685.
10. Пшихопов В. Х., Медведев М. Ю. Децентрализованное управление группой однородных подвижных объектов в двумерной среде с препятствиями // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17, № 5. С. 346–353.
11. Пшихопов В. Х., Медведев М. Ю. Групповое управление движением мобильных роботов в неопределенной среде с использованием неустойчивых режимов // Труды СПИИРАН. 2018. Вып. 60. С. 39–63.
12. Medvedev M., Pshikhov V., Gurenko B., Hamdan N. Path planning method for mobile robot with maneuver restrictions // Proc. of the International Conference on Electrical, Computer, Communications and Mechatronics Engineering. 7–8 October 2021, Mauritius.
13. Гайдук А. Р., Мартынов О. В., Медведев М. Ю., Пшихопов В. Х., Хамдан Н., Фархад А. Нейросетевая система управления группой роботов в неопределенной двумерной среде // Мехатроника, автоматизация, управление. 2020. Т. 21, № 8. С. 470–479.
14. Nazarahari M., Khanmirza E., Doostie S. Multi-objective multi-robot path planning in continuous environment using an enhanced genetic algorithm // Expert Systems with Applications. 2019. Vol. 115. P. 106–120.
15. Hoy M., Matveev A. S., Savkin A. V. Algorithms for collision-free navigation of mobile robots in complex cluttered environments. A survey // Robotica. 2015. Vol. 33, N. 3. P. 463–497.
16. Shlyakhov N. E., Vatamaniuk I. V., Ronzhin A. L. Review of the Methods and Algorithms of a Robot Swarm Aggregation // Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie. 2017. Vol. 18, N. 1. P. 22–29.
17. Сухарев А. Г. Оптимальные стратегии поиска экстремума // СССР. Вычислительная математика и математическая физика. 1971. Т. 11(4). С. 910–924.
18. Hornung A., Wurm K. M., Bennewitz M., Stachniss C., Burgard W. OctoMap: An efficient probabilistic 3D mapping framework based on octrees // Autonomous Robots. 2013. Vol. 34(3). P. 189–206.

19. Janson L., Ichter B., Pavone M. Deterministic sampling-based motion planning: Optimality, complexity, and performance // International Journal of Robotics Research. 2018. Vol. 37, N. 1. P. 46–61.
20. Wang Q., Hao Y., Chen F. Deepening the IDA* algorithm for knowledge graph reasoning through neural network architecture // Neurocomputing. 2021. Vol. 429. P. 101–109.
21. Zhou R., Hansen E. A. Memory-Bounded {A*} Graph Search // The Florida AI Research Society Conference – FLAIRS. 2002. P. 203–209.
22. Holte R., Perez M., Zimmer R., MacDonald A. Hierarchical A*: Searching abstraction hierarchies efficiently // Proceedings of the 13th national conference on Artificial intelligence. 1996. Vol. 1. P. 530–535.
23. Liu B., Xiao X., Stone P. A Lifelong Learning Approach to Mobile Robot Navigation // IEEE Robotics and Automation Letters. 2021. Vol. 6, N. 2. P. 1090–1096.
24. Chen B. Y., Chen X.-W., Chen H.-P., Lam W. H. K. Efficient algorithm for finding k shortest paths based on re-optimization technique // Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review. 2020. Vol. 133, Article number 101819.
25. Pshikhopov V. Kh. (Ed.), Beloglazov D., Finaev V., Guzik V., Kosenko E., Krukhmalev V., Medvedev M., Pereverzev V., Pyavchenko A., Saprykin R., Shapovalov I., Soloviev V. Path Planning for Vehicles Operating in Uncertain 2D Environments. Elsevier, Butterworth-Heinemann, 2017. 312 p.
26. Ge S. S., Cui Y. J. New potential functions for mobile robot path planning // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 2000. Vol. 16, N. 5. P. 615–620.
27. Woods A. C., La H. M. A Novel Potential Field Controller for Use on Aerial Robots // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems. 2019. Vol. 49, N. 4. P. 665–676.
28. Медведев М. Ю., Костюков В. А., Пшихопов В. Х. Оптимизация движения мобильного робота на плоскости в поле конечного числа источников-репеллеров // Труды СПИИРАН. 2020. Т.19, № 1. С. 43–78.
29. Kostjukov V., Medvedev M., Pshikhopov V. Method for Optimizing of Mobile Robot Trajectory in Repeller Sources Field // Informatics and Automation. 2021. Vol. 20, N. 3. P. 690–726.
30. Wilkinson J. H. The algebraic Eigenvalue Problem. Oxford, Clarendon Press, 1965.
31. Гантмахер Ф. П. Теория матриц. М.: Наука, 1988.
32. Чекмарев А. А. Инженерная графика. М: Высшая школа, 1988.
33. Saponov L., Lacaze A. Path planning for robotic vehicles using generalized Field D* // Proc. SPIE, Unmanned Systems Technology X. 2008.
34. Григорьев М. И., Малоземов В. Н., Сергеев А. Н. Полиномы Бернштейна и составные кривые Безье // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46, № 11. С. 1962–1971.
35. Li F. Tan Y., Wang Y., Ge G. Mobile Robots Path Planning Based on Evolutionary Artificial Potential Fields Approach // Proc. Of the 2nd Intern. Conf. on Computer Science and Electronics Engineering. 2013. P. 1314–1317.

Algorithms for Planning Smoothed Individual Trajectories of Ground Robots

V. A. Kostjukov, wkost-einheit@yandex.ru, M. Y. Medvedev, medvmihal@sfsedu.ru,

V. Kh. Pshikhopov, pshichop@rambler.ru,

Southern Federal University, Rostov-on-Don, 344006, Russian Federation

Corresponding author: Kostjukov Vladimir A., Cand. of Tech. Sc., Senior Researcher, Southern Federal University, Rostov-on-Don, 344006, Russian Federation, e-mail: wkost-einheit@yandex.ru

Accepted on July 26, 2022

Abstract

The article is devoted to the development of an algorithm for constructing the trajectory of a robotic platform moving in an environment with obstacles. This algorithm is based on the application of a special local optimization procedure at each planning step and allows us to obtain feasible program trajectories without increasing the computational complexity of algorithms compared to existing methods. The algorithm is based on the application of the improved method of potential fields and subsequent smoothing of the resulting trajectory. The improving of the potential field method consists in a new way of detecting and avoiding local minima. When a local minimum is detected, it is added to the map as an additional obstacle, which makes it possible to avoid it during further trajectory planning. To circumvent obstacles that can be approximated by polygons, the method of the effective point to the obstacle is proposed, which is the equivalent of the latter in relation to the current location of the moving robotic platform when using this planning method. A two-stage technique for smoothing piecewise linear trajectories is proposed. It is assumed that there is some initial suboptimal curve found by any planning method. This curve is optimized using a functional that includes the length of the trajectory and the deviation of the optimized curve from the original curve. At the second stage, the linear segments of the planned straight line are conjugated with second-order curves. As a result, the planned trajectory of motion is a quadratic-linear curve with a smooth function of the trajectory velocity. At the same time, the proposed method of coupling rectilinear sections of the trajectory does not require sudden changes in speed when passing turns. Simulation results confirming the effectiveness of the proposed method of planning the trajectories of robots are considered and discussed.

Keywords: trajectory planning, smooth trajectories, local minima, robotic platform, two-dimensional environment

Acknowledgements: The study was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation, project No. 22-29-00370 performed at Joint-Stock Company "Robotics and Control Systems".

For citation:

Kostjukov V. A., Medvedev M. Y., Pshikhopov V. Kh. Algorithms for Planning Smoothed Individual Trajectories of Ground Robots, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 11, pp. 585–595.

DOI: 10.17587/mau.23.585-595

References

1. Hart P. E., Nilsson N. J., Raphael B. A. Formal Basis for the Heuristic Determination of Minimum Cost Paths, *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics*, 1968, vol. 2, pp. 100–107.
2. Piskorskii D. S., Abdullin F. K., Nikolaeva A. R. Optimization of A-Star Search Algorithm, *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, 2020, vol. 20, no. 1, pp. 154–160.
3. Stentz A. Optimal and efficient path planning for partially known environments, *In Intelligent Unmanned Ground Vehicles*, Springer, Boston, MA, USA, 1997, pp. 203–220.
4. Kazakov K. A., Semenov V. A. Reviews of modern path planning methods, *Proceedings of ISP RAS*, 2016, vol. 28(4), pp. 241–294 (in Russian).
5. LaValle S. M., Kuffner J. J. Rapidly-exploring random trees: Progress and prospects, *2000 Workshop on the Algorithmic Foundations of Robotics*, 2000, pp. 293–308.
6. Ravankar A., Ravankar Ab., Emaru T., Kobayashi Y. HP-PRM: Hybrid Potential Based Probabilistic Roadmap Algorithm for Improved Dynamic Path Planning of Mobile Robots, *IEEE Access*, 2020, vol. 8, pp. 221743–221766.
7. Khatib O. Real-Time Obstacles Avoidance for Manipulators and Mobile Robots, *International Journal of Robotics Research*, 1986, vol. 5(1), pp. 90–98.
8. Platonov A. K., Karpov I. I., Kiril'chenko A. A. Potential field attitude in the problem of path finding, Moscow. Institute of Applied Mathematics. Academy of Science USSR, 1974, 27 p. (in Russian).
9. Filimonov A. B., Filimonov N. B. Issues of Motion Control of Mobile Robots Based on the Potential Guidance Method, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*. 2019, vol. 20, no. 11, pp. 677–685 (in Russian).
10. Pshikhov V. Kh., Medvedev M. Yu. Decentralized Control of a Group of Similar Objects Moving in a Two-Dimensional Environment with Obstacles, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no.5, pp. 346–353 (in Russian).
11. Pshikhov V., Medvedev M. Group control of autonomous robots motion in uncertain environment via unstable modes, *SPIIRAS Proceedings*, 2018, vol. 60, no. 5, pp. 39–63 (in Russian).
12. Medvedev M., Pshikhov V., Gurenko B., Hamdan N. Path planning method for mobile robot with maneuver restrictions, *Proc. of the International Conference on Electrical, Computer, Communications and Mechatronics Engineering (ICECCME)*, 7–8 October 2021, Mauritius.
13. Gaiduk A. R., Martjanov O. V., Medvedev M. Yu., Pshikhov V. Kh., Hamdan N., Farhood A. Neural network based control system for robots group operating in 2nd uncertain environment, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 8, pp. 470–479.
14. Nazarahari M., Khanmirza E., Doostie S. Multi-objective multi-robot path planning in continuous environment using an enhanced genetic algorithm, *Expert Systems with Applications*, 2019, vol. 115, pp. 106–120.
15. Hoy M., Matveev A. S., Savkin A. V. Algorithms for collision-free navigation of mobile robots in complex cluttered environments. A survey, *Robotica*, 2015, vol. 33, no. 3, pp. 463–497.
16. Shlyakhov N. E., Vatamaniuk I. V., Ronzhin A. L. Review of the Methods and Algorithms of a Robot Swarm Aggregation, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 1, pp. 22–29.
17. Sukharev A. G. Optimal strategies of the search for an extremum, *U. S. S. R. Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1971, vol. 11, no. 4, pp. 910–924.
18. Hornung A., Wurm K. M., Bennewitz M., Stachniss C., Burgard W. OctoMap: An efficient probabilistic 3D mapping framework based on octrees, *Autonomous Robots*, 2013, vol. 34, no. 3, pp. 189–206.
19. Janson L., Ichter B., Pavone M. Deterministic sampling-based motion planning: Optimality, complexity, and performance, *International Journal of Robotics Research*, 2018, vol. 37, no. 1, pp. 46–61.
20. Wang Q., Hao Y., Chen F. Deepening the IDA* algorithm for knowledge graph reasoning through neural network architecture, *Neurocomputing*, 2021, vol. 429, pp. 101–109.
21. Zhou R., Hansen E. A. Memory-Bounded {A*} Graph Search, *The Florida AI Research Society Conference — FLAIRS*, 2002, pp. 203–209.
22. Holte R., Perez M., Zimmer R., MacDonald A. Hierarchical A*: Searching abstraction hierarchies efficiently, *Proceedings of the thirteenth national conference on Artificial intelligence*, 1996, vol. 1, pp. 530–535.
23. Liu B., Xiao X., Stone P. A Lifelong Learning Approach to Mobile Robot Navigation, *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2021, vol. 6(2), pp. 1090–1096.
24. Chen B. Y., Chen X.-W., Chen H.-P., Lam W. H. K. Efficient algorithm for finding k shortest paths based on re-optimization technique, *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 2020, vol. 133, Article number 101819.
25. Pshikhov V. Kh. (Ed.), Beloglazov D., Finaev V., Guzik V., Kosenko E., Krukhmalev V., Medvedev M., Pereverzev V., Pyavchenko A., Saprykin R., Shapovalov I., Soloviev V. *Path Planning for Vehicles Operating in Uncertain 2D Environments*, Elsevier, Butterworth-Heinemann, 2017, 312 p.
26. Ge S. S., Cui Y. J. New potential functions for mobile robot path planning, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2000, vol. 16, no. 5, pp. 615–620.
27. Woods A. C., La H. M. A Novel Potential Field Controller for Use on Aerial Robots, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2019, vol. 49, no. 4, pp. 665–676.
28. Medvedev M., Kostjukov V., Pshikhov V. Optimization of mobile robot movement on a plane with finite number of repeller sources, *SPIIRAS Proceedings*, 2020, vol. 19, no. 1, pp. 43–78.
29. Kostjukov V., Medvedev M., Pshikhov V. Method for Optimizing of Mobile Robot Trajectory in Repeller Sources Field, *Informatics and Automation*, 2021, vol. 20, no. 3, pp. 690–726.
30. Wilkinson J. H. The algebraic Eigenvalue Problem, Oxford, Clarendon Press, 1965.
31. Gantmakher F. R. Theory of Matrices, Moscow, Nauka, 1988 (in Russian).
32. Checkmarev A. A. Engineering Graphics, Moscow, High School, 1988 (in Russian).
33. Saponov L., Lacaze A. Path planning for robotic vehicles using generalized Field D*, *Proc. SPIE 6962, Unmanned Systems Technology X*, 2008.
34. Grigor'ev M. I., Malozemov V. N., Sergeev A. N. Bernstein polynomials and composite Bezier curves, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 2006, vol. 46, no. 11, pp. 1962–1971.
35. Li F. Tan Y., Wang Y., Ge G. Mobile Robots Path Planning Based on Evolutionary Artificial Potential Fields Approach, *Proc. Of the 2nd Intern. Conf. on Computer Science and Electronics Engineering*, 2013, pp. 1314–1317.