

С. С. Лемак, д-р физ.-мат. наук, lemaks2004@mail.ru, **М. Д. Белоусова**, мл. науч. сотр., mb@vrmsu.ru, **В. В. Альчиков**, студент, bestvladi@mail.ru,
НОШ "Фундаментальные и прикладные исследования космоса", МГУ имени М. В. Ломоносова,
НОШ "Мозг, когнитивные системы, искусственный интеллект", МГУ имени М. В. Ломоносова,
МГУ имени М. В. Ломоносова

Задача динамической имитации полета летательного аппарата на робототехническом стенде*

Для обучения пилотов управлению летательными аппаратами используются тренажерные комплексы, включающие в себя стенды для динамической имитации. Данные тренажеры должны создавать для оператора условия, наиболее приближенные к реальным, т. е. имитировать поведение летательного аппарата. В статье рассмотрена постановка задачи динамической имитации для стенда на базе промышленного робота-манипулятора. На концевом эффекторе робота устанавливается кабина с креслом для пилота.

Алгоритмы динамической имитации включают в себя две фазы: фазу имитации движения для пилота и фазу возврата в центр рабочей области с допороговыми значениями перегрузки, когда стенд находится близко к границе рабочей области. При выполнении фазы имитации стенд должен реализовывать такое движение, чтобы угловые ускорения, действующие на человека, и вектор перегрузки, действующий на центр масс человека на стенде, полностью совпадали с реальными, либо, если нет возможности, то чтобы совпадало направление этих векторов. При реализации второй фазы концевая точка стенда должна выполнять возврат в центр рабочей области с допороговыми значениями ускорений, но наиболее быстрым образом. Таким образом мы получаем задачу о переводе стенда из одного положения в другое при наличии ограничений на развиваемые скорости, ускорения и моменты сил. Данная задача может быть представлена как обобщение классической задачи о брахистохроне.

В статье рассмотрено решение задачи о движении материальной точки в однородном поле силы тяжести по кривой, расположенной в вертикальной плоскости, при наличии ограничений на кривизну траектории. Необходимо выбрать форму кривой таким образом, чтобы время спуска было минимальным. Решение этой задачи получено методами оптимального управления, рассмотрены случаи реализации регулярного и особого управлений, изучен вопрос их сопряжения, числа переключений между участками регулярного и особого управлений.

Ключевые слова: динамическая имитация, брахистохрона, оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, особое оптимальное управление

Постановка задачи динамической имитации полета

Для качественного обучения пилотов возникает необходимость использовать различного рода динамические тренажеры, позволяющие проводить обучение пилотов в условиях, наиболее приближенных к реальным. Различные кинематические схемы таких стендов и алгоритмы динамической имитации полета рассмотрены в работах [1, 2].

В качестве перспективного тренажера для пилотов сверхзвукового летательного аппарата (ЛА) предполагается использовать стенд на базе промышленного робота-манипулятора. Схема такого стенда представлена на рис. 1. На концевом эффекторе манипулятора устанавливается кабина с креслом для пилота.

Задача динамической имитации решается в рамках концепции динамической имитации для системы чувствительных масс пилота, находящихся на стенде и в кабине ЛА [2].

Для постановки задачи первой фазы динамической имитации следует рассмотреть одну из основных динамических характеристик движения — вектор перегрузки

$$\vec{n} = \frac{1}{|g_0|}(\vec{w} - \vec{g}),$$

где $|g_0|$ — модуль ускорения свободного падения на экваторе ($9,78 \text{ м/с}^2$); $\vec{g}$ — вектор гравитационного ускорения; $\vec{w}$ — вектор абсолютного ускорения расчетной точки N (чувствительной массы механорецептора пилота).

Пусть известна текущая перегрузка $\vec{n}^P(t)$ расчетной точки N в реальном полете ЛА. Математическая постановка задачи динамической имитации выглядит как определение ускорения концевика стенда $\vec{w}_k(t)$ (соответственно, перегрузки в расчетной точке N) и

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках программы центра "Сверхзвук" (соглашение 075-15-2022-331).

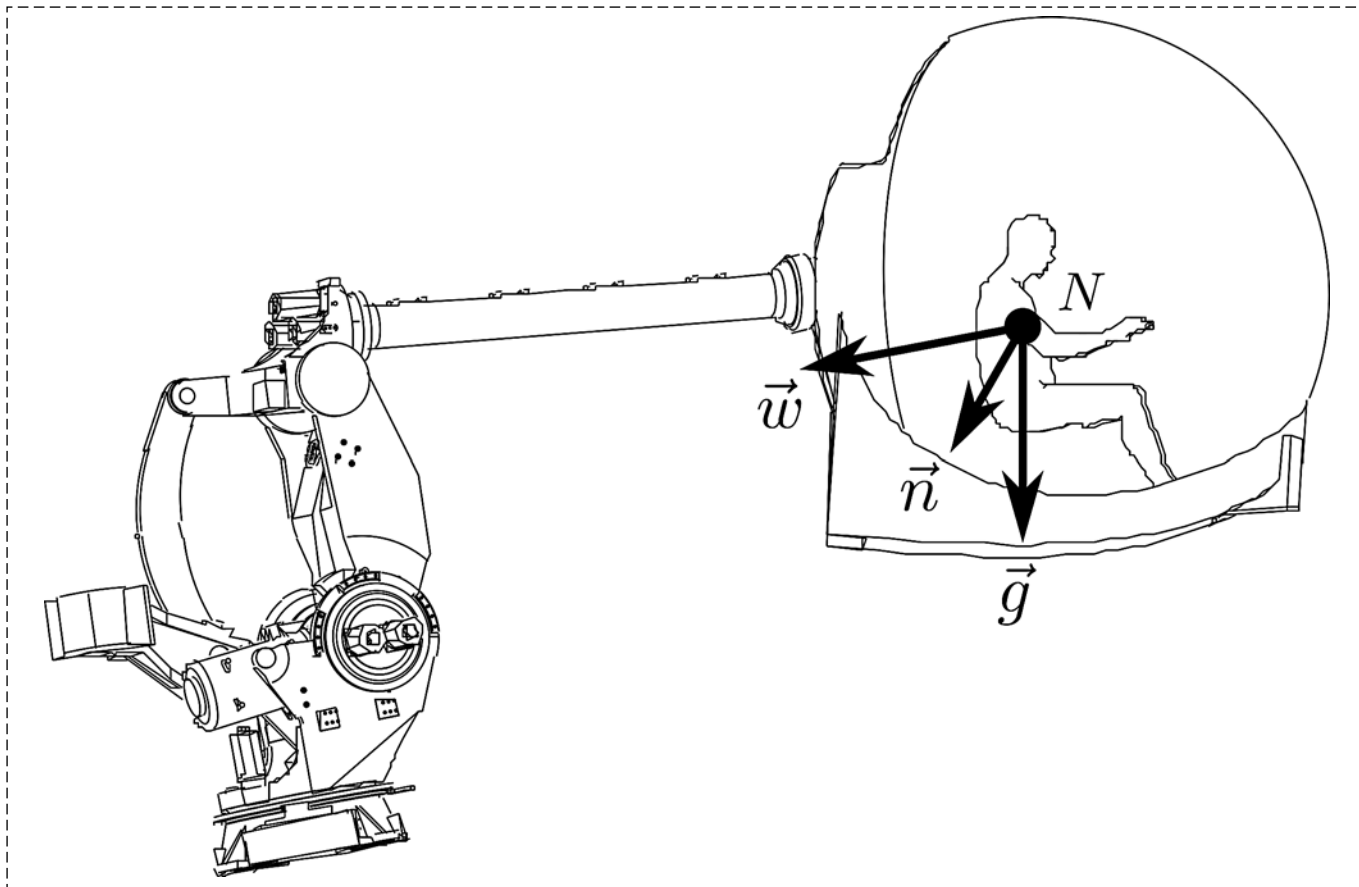


Рис. 1. Динамический стенд на базе промышленного робота-манипулятора

Fig. 1. Dynamic stand based on an industrial robotic arm

квазистационарных углов поворота кабины стенда $\tilde{\chi}(t)$ исходя из решения задачи минимизации критерия

$$\|\bar{n}(N, t) - \bar{n}^P(N, t)\| \rightarrow \min_{\bar{w}_k(t), \tilde{\chi}(t)},$$

где $\bar{n}(N, t)$ — вектор перегрузки в расчетной точке N стенда.

Аналогичная задача может быть сформулирована для имитации угловых ускорений

$$\|\ddot{\chi}(t) - \ddot{\chi}^P(t)\| \rightarrow \min_{\ddot{\chi}(t)}.$$

Если расчетная точка N расположена в центре подвеса кабины, то эти задачи можно разделить.

Для простоты рассмотрим первую задачу — имитации перегрузки при маневрах ЛА в вертикальной плоскости. В силу различного рода ограничений на кинематические и динамические параметры стенда задача динамической имитации может быть решена с приемлемой точностью только для ограниченных маневров ЛА на сравнительно коротком интервале

времени. На фазе собственно динамической имитации концевой эффектор стенда должен находиться в так называемой рабочей области динамического стенда. Рабочая область является некоторым сужением области допустимых положений концевой эффектора манипулятора. На рис. 2 показана область допустимых положений D эффектора для робота-манипулятора *FANUC M2000iA*. Из граничных точек рабочей области манипулятора R (рис. 2) возможно осуществление торможения концевой точки (эффектора) без выхода за рамки допустимых положений стенда D .

Если на первой фазе динамической имитации концевой эффектор выходит на границу рабочей области R (точка B на рис. 2), осуществляется вторая фаза алгоритма динамической имитации — скорейший по времени перевод стенда на множество стартовых положений стенда с допустимыми перегрузками

$$\|\bar{n}(N, t)\| \leq \varepsilon,$$

где ε — порог чувствительности по перегрузке для человека.

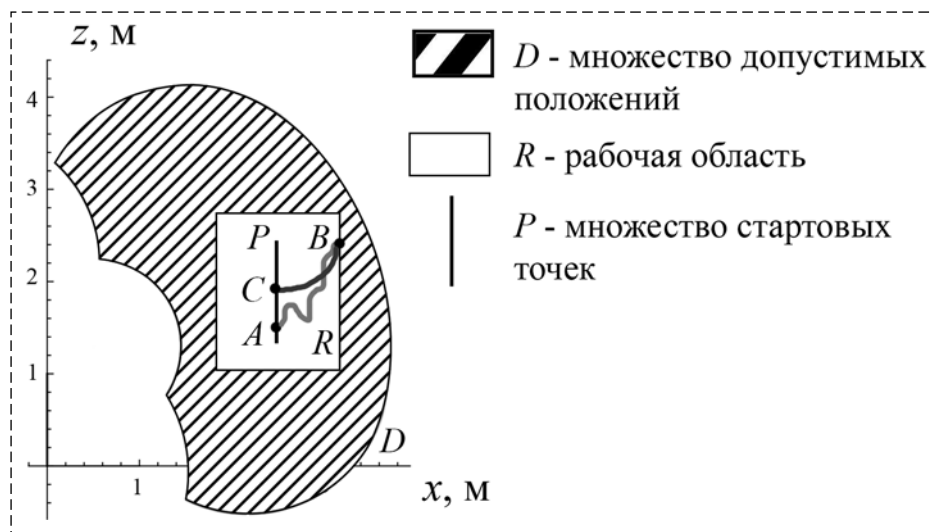


Рис. 2. Множество допустимых положений D конечного эффектора пятого звена манипулятора, его сужение — рабочая область R , вертикальная линия P — множество стартовых точек

Fig. 2. The set of admissible positions D for the manipulator end effector, the set constriction is the work area R , vertical line P is the set of starting points

Таким образом, алгоритм динамической имитации состоит из двух фаз: фазы динамической имитации движения ЛА и фазы возврата на множество стартовых положений конечного эффектора.

Реализация второй фазы алгоритма динамической имитации

Рассмотрим задачу возврата на множество стартовых положений. Множество стартовых положений находится в центре рабочей области и в нашем случае представляет вертикальную прямую P (рис. 2). Для сохранения качества динамической имитации фаза возврата (перевод из точки B в точку C на рис. 2) должна составлять минимально возможный интервал времени. Определив оптимальное движение конечного эффектора, можно вычислить программные движения звеньев манипулятора.

Таким образом, задача возврата сводится к задаче быстрого перевода материальной точки в вертикальной плоскости в поле силы тяжести при наличии ограничений. Данную задачу можно назвать обобщением задачи о брахистохроне.

Классическая постановка задачи о брахистохроне и одно из ее первых решений принадлежат Иоганну Бернулли. Поскольку эта задача и ее различные модификации и обобщения имеют много различных приложений, они представляют большой интерес для исследователей. Так, в работе [3] приведены краткая история ре-

шения классической задачи и некоторая классификация имеющихся ее обобщений. Это и "элементарные" решения, не использующие методы вариационного исчисления и оптимального управления, и задачи о движении частицы в разных силовых полях [4–6], релятивистские обобщения. Рассматривается также брахистохронное движение частицы по поверхности, движение протяженных тел и брахистохрона для системы переменной массы [7].

В работе [8] методами вариационного исчисления решается задача прихода не только из точки в точку, но

и с кривой на кривую. В статье [9] рассматривается пространственная брахистохрона.

Особое внимание уделяется задачам о брахистохроне с трением [3, 10–12]. В работе [3] исследован случай сухого трения как решение изопериметрической вариационной задачи. В работе [10] исследован случай линейного и квадратичного законов трения, в качестве управления рассматривается угол наклона траектории.

В статьях [11, 13] дополнительно предполагается наличие разгоняющей силы, действующей на материальную точку. В качестве управления принимается отношение нормальной составляющей реакции связи R к количеству движения частицы MV .

Существуют работы, изучающие движение протяженных тел вдоль брахистохронной кривой [14, 15]. В частности, в статье [14] рассмотрен случай брахистохронного движения саней Чаплыгина.

В настоящей статье рассмотрены минимальные по времени траектории частицы для случая, когда явно заданы ограничения на кривизну траектории.

Выберем систему координат, совпадающую с трехгранником Френе рассматриваемой кривой.

В качестве управления будем использовать кривизну u траектории частицы. Пусть неподвижная координатная плоскость Oz_1z_2 расположена в вертикальной плоскости и $0 \leq s \leq S$ — длина дуги гладкой регулярной кривой, лежащей в плоскости Oz_1z_2 . Обозначим координаты

единичного вектора касательной $\vec{\tau} = (x_1 \ x_2)^T$, а координаты нормали $\vec{n} = (-x_2 \ x_1)^T$. Обозначим $x_3 = v^2$ — квадрат скорости точки M , а $x_4 = L(s)$, $x_5 = H(s)$ — ее горизонтальную и вертикальную координаты.

Уравнения движения материальной точки единичной массы вдоль кривой следующие:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{ds} &= ux_2; & \frac{dx_4}{ds} &= x_1; \\ \frac{dx_2}{ds} &= -ux_1; & \frac{dx_5}{ds} &= x_2; \\ \frac{dx_3}{ds} &= -2gx_2; & \frac{dx_6}{ds} &= \frac{1}{\sqrt{x_3}}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $x_6(s)$ — текущее время движения точки M .

Краевые условия в (1) следующие:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= \cos\theta_0; & x_4(0) &= 0; & x_4(s_k) &= L; \\ x_2(0) &= \sin\theta_0; & x_5(0) &= 0; & x_5(s_k) &= H. \\ x_3(0) &= v_0^2; & x_6(0) &= 0; \end{aligned} \quad (2)$$

Поставим задачу минимизации времени прихода в заданную точку на плоскости Ox_4x_5 :

$$x_6(t_k) \rightarrow \min_{|u| \leq u_m}. \quad (3)$$

Получим решение поставленной задачи, используя необходимые условия оптимальности в виде принципа максимума Понтрягина.

Функция Понтрягина имеет вид

$$\begin{aligned} H &= ux_2\psi_1 - ux_1\psi_2 - 2gx_2\psi_3 + x_1\psi_4 + \\ &+ x_2\psi_5 + \frac{\psi_6}{\sqrt{x_3}} = H_0 + uH_1, \end{aligned}$$

где $H_1 = x_2\psi_1 - x_1\psi_2$, а $H_0 = x_1\psi_4 + x_2(\psi_5 - 2g\psi_3) + \frac{\psi_6}{\sqrt{x_3}}$.

Учитывая условия трансверсальности принципа максимума, запишем сопряженную систему с краевыми условиями на правом конце траектории:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{ds} &= u\psi_2 - \psi_4; & \frac{d\psi_5}{ds} &= 0; \\ \frac{d\psi_2}{ds} &= -u\psi_1 + g\frac{\psi_3}{x_3} - \psi_5; & \frac{d\psi_6}{ds} &= 0; \\ \frac{d\psi_3}{ds} &= g\psi_3\frac{x_2}{x_3^2} + \psi_6\frac{1}{x_3^2}; & \psi_1(s_k) &= 0; \\ & & \psi_2(s_k) &= 0; \\ \frac{d\psi_4}{ds} &= 0; & \psi_3(s_k) &= 0; \\ & & \psi_6(s_k) &= -1. \end{aligned} \quad (4)$$

На экстремалиях Понтрягина управление подчиняется условиям:

$$u(s) = \begin{cases} u_m & \text{при } H_1 > 0, \\ u^{\sin} & \text{при } H_1 \equiv 0, \\ -u_m & \text{при } H_1 < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Рассмотрим движение по особой дуге при $s \in [s^*, s^{**}]$.

Здесь выполнены следующие соотношения:

$$H_1 = x_2\psi_1 - x_1\psi_2 = 0; \quad (6)$$

$$\dot{H}_1 = -x_2\psi_4 + x_1(-2g\psi_3 + \psi_5) = 0; \quad (7)$$

$$\ddot{H}_1 = u(x_1\psi_4 + x_2(-2g\psi_3 + \psi_5)) + g\frac{x_1}{x_3^{3/2}} = 0; \quad (8)$$

$$H_0 = x_1\psi_4 + x_2(\psi_5 - 2g\psi_3) + \frac{\psi_6}{\sqrt{x_3}} = 0. \quad (9)$$

Из условий (7) и (8) найдем особое управление

$$u^{\sin} = -g\frac{x_1^2}{x_3^{3/2}\psi_4}. \quad (10)$$

Если $\psi_4 > 0$, условия Келли оптимальности особого управления выполнены. Действительно, подставляя (7) в (9), получим

$$\psi_4 = \frac{x_1}{\sqrt{x_3}} = \text{const} = \frac{\cos\theta^*}{v^*} > 0.$$

Закон изменения особого управления переписывается в виде

$$u^{\sin} = -g\frac{x_1}{x_3}. \quad (11)$$

Подставляя во второе уравнение (1), получим, что на особой траектории

$$\frac{dx_2}{ds} = \frac{\cos\theta^{*2}}{v^{*2}} = g \cdot c^2 = \text{const}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dx_3}{dx_2} &= -\frac{2}{c^2}x_2; \\ \frac{dx_4}{dx_2} &= \frac{1}{gc^2}\sqrt{1-x_2^2}; \\ \frac{dx_5}{dx_2} &= \frac{1}{gc^2}x_2; \\ \frac{dx_6}{dx_2} &= \frac{1}{gc}\frac{1}{x_1}, \end{aligned} \quad (12)$$

откуда следует уравнение особой кривой на плоскости Ox_2x_3

$$x_3 = \frac{1}{c^2}((x_2^0)^2 - x_2^2) + v_0^2, \quad (13)$$

координаты особой кривой на плоскости Ox_4x_5

$$x_4 = \frac{1}{2gc^2}(x_2\sqrt{1-x_2^2} + \arcsin x_2 - x_2^0x_1^0 - \arcsin x_2^0) + x_4^0; \quad (14)$$

$$x_5 = \frac{1}{2gc^2}(x_2^2 - (x_2^0)^2) + x_5^0. \quad (15)$$

Время движения по особой кривой определяется формулой

$$x_6 - x_6^0 = \frac{1}{2gc}(\arcsin x_2 - \arcsin x_2^0). \quad (16)$$

Рассмотрим модификацию поставленной экстремальной задачи, когда вертикальная координата конечной точки $x_5(s_k)$ не фиксирована.

Получаем задачу о минимуме времени прихода на заданную вертикальную прямую.

В этом случае из условий трансверсальности принципа максимума сопряженная переменная $\psi_5 = 0$, и из равенства (7) получим краевое условие

$$x_2(t_k) = 0. \quad (17)$$

Рассмотрим теперь движение по регулярному участку экстремали Понтрягина, где $u = \text{const}$. В этом случае

$$\frac{dx_3}{dx_1} = -\frac{2g}{u} = \text{const}$$

и

$$x_3 = -\frac{2g}{u}x_1 + v_0^2 + \frac{2g}{u}\cos\theta_0. \quad (18)$$

Координаты регулярной кривой:

$$x_4 = -\frac{1}{u}x_2 + \frac{1}{u}\sin\theta_0; \quad (19)$$

$$x_5 = \frac{1}{u}\sqrt{1-x_2^2} - \frac{1}{u}\cos\theta_0. \quad (20)$$

Оптимальная кривая представляет собой часть окружности

$$\left(x_4 - \frac{1}{u}\sin\theta_0\right)^2 + \left(x_5 + \frac{1}{u}\cos\theta_0\right)^2 = \frac{1}{u^2}.$$

Для того чтобы найти время движения по регулярному участку, сделаем некоторые преобразования. Обозначим

$$v_0^2 + \frac{2g}{u}\cos\theta_0 = \frac{2g}{u}\cos\theta_n.$$

Тогда из (18) получим

$$v^2 = \frac{2g}{u}(\cos\theta_n - \cos\theta).$$

Но $v = \frac{1}{u} \frac{d\theta}{dt}$, следовательно

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= 2gu(\cos\theta_n - \cos\theta) = \\ &= 4gu(\sin^2\theta_n/2 - \sin^2\theta/2). \end{aligned}$$

Сделав замену $\sin\theta/2 = \sin\theta_n/2 \cdot \sin\varphi = k\sin\varphi$, получим время движения

$$x_6 = -\text{sign} u \frac{1}{\sqrt{g|u|}}(F(\varphi, k^2) - F(\varphi_0, k^2)), \quad (21)$$

где $F(\varphi, k^2)$ — неполный эллиптический интеграл первого рода.

Рассмотрим структуру оптимального управления в поставленной задаче о брахистохроне. Оптимальная траектория может состоять из участков с регулярным либо особым управлением.

Пусть сначала $g = 0$. Тогда поставленная задача есть вариант задачи о машине Дуббинса: найти на плоскости кратчайший путь, соединяющий две точки. Решение состоит из куска окружности, представляющей регулярный участок, и прямой, представляющей особое решение.

Рассмотрим вопрос сопряжения регулярного и особого участков оптимальной траектории. Пусть в некоторый момент времени t^* попали на особый участок. Рассмотрим проекцию решения на плоскость Ox_2x_3 . Через (x_2^*, x_3^*) обозначим точку сопряжения.

Пусть особая кривая попадает на конечное многообразие $(0, x_3^k)$ и при этом особое управление лежит внутри допустимого интервала управления $[u_{\min}, u_{\max}]$.

Допустим, что на отрезке времени $[t', t'']$ оптимальное решение сошло с особой кривой и вернулось обратно. Поскольку особое решение получено из условия неотрицательности второй вариации функционала, такое решение не может быть лучше по времени, чем при движении по особому участку.

Поэтому сойти с особого участка решение может только если:

- а) особая траектория не попадает на конечное многообразие;
- б) особое управление достигает допустимой границы.

Пример оптимального перехода на заданную вертикальную прямую

Рассмотрим теперь задачу попадания за кратчайшее время на прямую $x_4(t_k) = L$. Будем считать ограничения на управление симметричными $|u_{\min}| = u_{\max} > 0$.

В силу (11) особое управление монотонно растет, потому если в момент сопряжения его значение принадлежит допустимому отрезку, то в дальнейшем это свойство сохраняется. Особая кривая попадает на конечное многообразие, где $x_2(t_k) = 0$.

Поэтому структура решения такова, что на начальном отрезке времени оптимальное управление лежит на границе допустимого отрезка по управлению, а далее — особое решение до момента t_k попадания на конечное многообразие.

Рассмотрим сначала случай, когда ограничения на управление отсутствуют: $u_{\min} = -\infty$. Тогда на всем отрезке времени осуществляется особое управление.

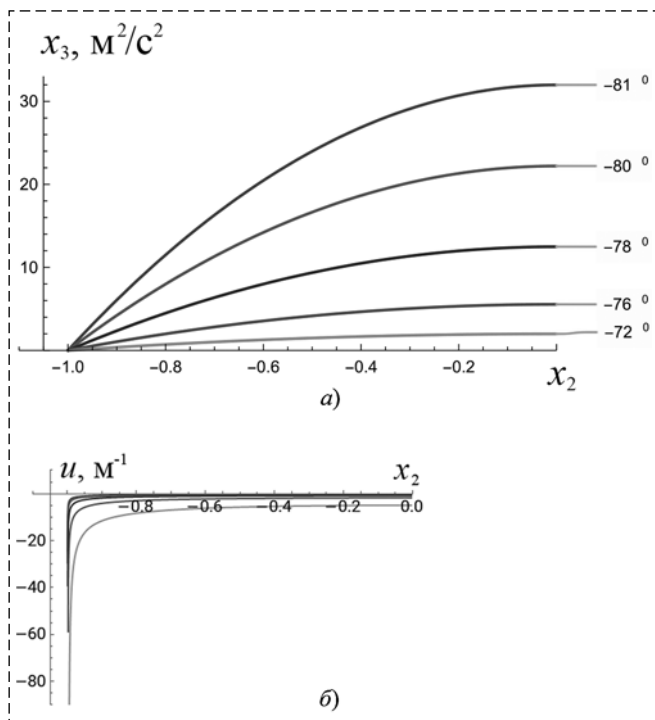


Рис. 3. Особые траектории (а) и особые управления (б)
Fig. 3. Singular trajectories (a) and singular control (b)

На рис. 3 показаны особые траектории и соответствующие им особые управления при фиксированной начальной скорости точки $v_0 = 0,1$ м/с и различных начальных углах наклона траектории $\theta(0)$. Заметна большая чувствительность особой траектории к изменению начального наклона.

Заметим, что наклон траектории и скорость точки на особой дуге связаны интегралом (13). Соответственно, каждому фиксированному положению граничной вертикальной прямой соответствует определенный начальный угол наклона траектории $\theta(0)$. Он определяется из граничного условия $x_4(x_2^k) = L$, где x_4 вычисляется по формуле (14).

Если начальный угол наклона отличается от наклона особой траектории, либо в начальный момент не выполняются ограничения на кривизну, начальный отрезок траектории представляет собой регулярную дугу. Рассмотрим вопрос сопряжения регулярной и особой дуги экстремали Понтрягина на примере.

Пусть заданы параметры экстремальной задачи

$$L = 1 \text{ м}, v_0 = 0,1 \text{ м/с}, \\ \theta_0 = -1,54, u_{\min} = -30,5 \text{ м}^{-1}.$$

В общем случае точку сопряжения регулярного и сингулярного кусков (x_2^*, x_3^*) находим, вычислив корень квадратного уравнения

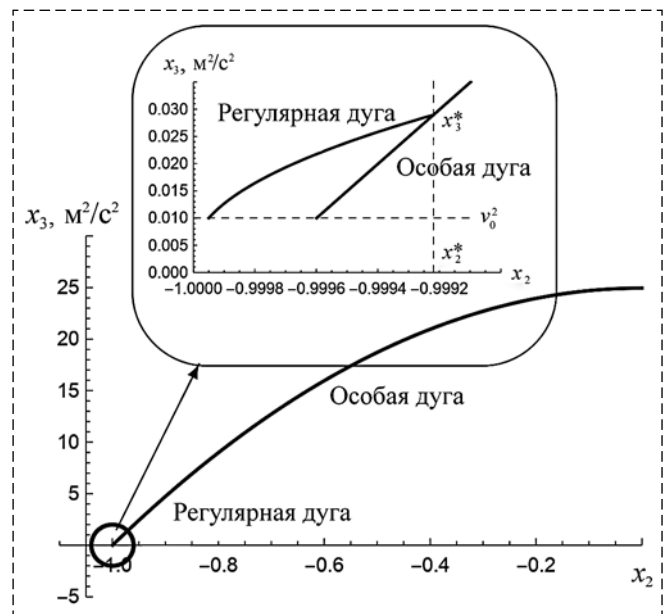


Рис. 4. Сопряжение регулярной и особой дуг оптимальной траектории
Fig. 4. Conjugation of the optimal trajectory regular and singular arcs

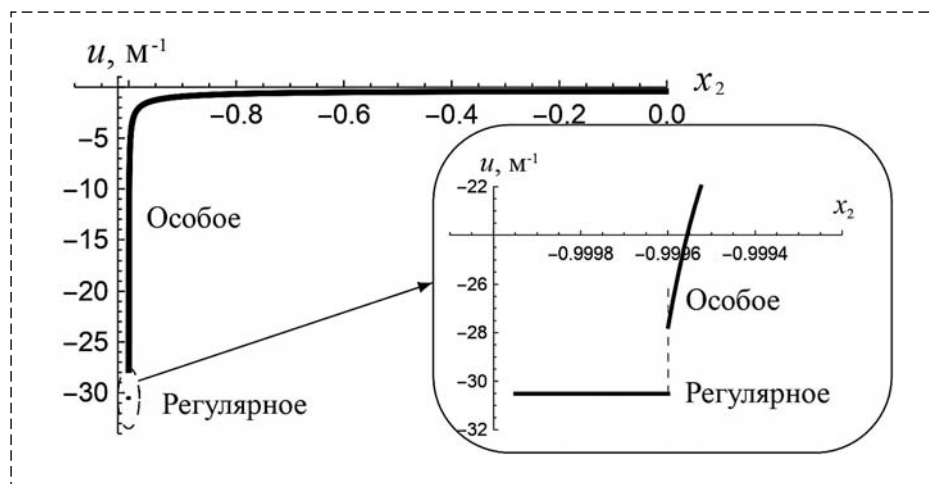


Рис. 5. Оптимальное управление в точке сопряжения

Fig. 5. Optimal control in conjugation point

$$x_1^{*2} + g \frac{(x_1^0)^2}{u_m v_0^2} - (x_1^0)^2 - \frac{(x_1^0)^2}{u_m v_0^2} \frac{g \cos \theta_0}{u_m} = 0,$$

где θ_0 — начальный угол наклона регулярного траектории, а x_1^0 — координата особого куска траектории, соответствующая начальной скорости v_0 .

На рис. 4 показан пример сопряжения на плоскости Ox_2x_3 .

Сопряжения регулярного и особого управлений представлено на рис. 5.

В точке сопряжения управление претерпевает скачок, что соответствует условиям оптимального сопряжения регулярного и особого управлений для особой дуги первого порядка [15].

Как показано выше, параметру L соответствует определенное значение начального угла особой дуги.

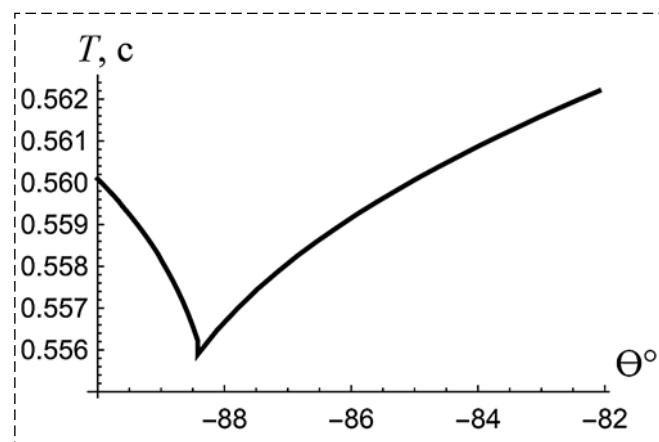


Рис. 6. Оптимальное время движения T в зависимости от начального угла наклона вектора скорости

Fig. 6. Motion time T dependence of initial inclination angle of velocity vector

Проверим, является ли угол наклона θ_0 , соответствующий особому участку, оптимальным с точки зрения общего времени прихода T на терминальное многообразие — вертикальную прямую.

На рис. 6 показано сравнение времени движения по оптимальной траектории для различных начальных углов наклона.

Результаты, представленные на рис. 6, показывают, что начальный наклон траектории $\theta_0 = -88,6^\circ$, соответствующий особому решению, является оптимальным.

Можно показать, что этот результат верен для общего случая. Он следует из принципа максимума Понтрягина. Действительно, изменим начальные условия: сделаем угол наклона начальной скорости точки θ_0 свободным.

Тогда краевое условие на левом конце (2) примет вид

$$x_1^2(0) + x_2^2(0) = 1, x_3(0) = v_0, \\ x_4(0) = x_5(0) = x_6(0) = 0.$$

Из условия трансверсальности на левом конце траектории следуют соотношения

$$\psi_1(0) = 2\lambda_1 x_1(0), \quad \psi_2(0) = 2\lambda_1 x_2(0). \quad (22)$$

Подставив эти значения в выражение (7) для функции H_1 , получим

$$H_1(0) = x_2(0)\psi_1(0) - x_1(0)\psi_2(0) = 0.$$

Это означает, что экстремаль Понтрягина в начальный момент находится на особом участке. Если особый участок является допустимым, то вся экстремаль будет совпадать с особым участком. В этом случае оптимальный начальный угол наклона скорости соответствует наклону на особом участке.

Рассмотрим вопрос о числе переключений на регулярном участке до момента сопряжения с особым участком. Как было показано выше, осуществить сопряжение можно при постоянном управлении, знак которого зависит от того, больше либо меньше начальный наклон наклона на особом участке.

Для решения задачи наибо́льшего по-
падания в точку сопряжения (x_2^*, x_3^*) надо ре-
шить задачу быстрого перехода из началь-
ной точки $(x_2(0), v_0)$ на вертикальную прямую
 $x_2 = x_2^*$. Поскольку второе уравнение систе-
мы (1) отделяется от остальных, смена знака
управления u приводит к увеличению времени
прихода в точку x_2^* .

Заключение

В статье дана постановка задачи динами-
ческой имитации управляемого полета для
тренажера на базе промышленного робота-ма-
нипулятора. Показано, что алгоритм динами-
ческой имитации состоит из двух фаз: ими-
тации перегрузки в рабочей области стенда и
возврата на множество стартовых положений.
Последняя задача может быть представлена
как обобщение задачи о брахистохроне.

Приведено решение задачи о движении ма-
териальной точки по кривой в вертикальной
плоскости в однородном поле силы тяжести при
наличии ограничений на кривизну траектории.
Получено полуаналитическое решение задачи
оптимизации, описана структура сопряжения
регулярного и сингулярного решений и изучен
вопрос числа переключений между участками
регулярного и особого управлений.

Список литературы

1. Alexandrov V. V., Lemak S. S. Algorithms of dynamic piloted flight simulator stand based on a centrifuge with a controlled cardan suspension // Journal of Mathematical Sciences. 2021. Vol. 253, N. 6. P. 768–777.
2. Александров В. В., Воронин Л. И., Глазков Ю. Н., Ишлинский А. Ю., Садовничий В. А. Математические задачи ди-

намической имитации аэрокосмических полетов. М.: Изд-во Московского университета, 1995.

3. Сумбатов А. С. Задача о брахистохроне (классификация обобщений и некоторые последние результаты) // Труды Московского физико-технического института. 2017. Т. 35. С. 66–75.
4. Gemmer J., Umble R., Nolan M. Generalizations of the Brachistochrone Problem // Pi Mu Epsilon Journal. 2011. Vol. 13, N. 4. P. 207–218.
5. Grimm C., Gemmer J. Weak and Strong Solutions to the Inverse-Square Brachistochrone Problem on Circular and Annular Domains // Involve, a Journal of Mathematics. 2016. Vol. 10, N. 05.
6. Vratnagar B., Saje Miran. On the analytical solution of the brachistochrone problem in a nonconservative field // International Journal of Non-Linear Mechanics. 1998. Vol. 33, N. 05. P. 489–505.
7. Гладков С., Богданова С. К теории движения тел с переменной массой // Вестник Томского Государственного Университета. 2020. Т. 6, № 65. С. 83–91.
8. Mertens S., Mingramm S. Brachistochrones With Loose Ends // European Journal of Physics. 2008. Vol. 29, N. 11.
9. Гладков С., Богданова С. К теории пространственной брахистохроны // Вестник Томского Государственного Университета. 2020. Т. 5, № 68. С. 53–60.
10. Cherkasov O. Y., Zarodnyuk A. V. Brachistochrone problem with linear and quadratic drag and accelerating force // Mathematics in Engineering, Science and Aerospace. Cambridge, 2015. Vol. 6, N. 1. P. 35–44.
11. Вондрухов А. С., Голубев Ю. Ф. Оптимальные траектории в задаче о брахистохроне с сухим трением // Известия Российской Академии Наук. Теория и системы управления. 2016. С. 11.
12. Wensrich C. Evolutionary solutions to the brachistochrone problem with Coulomb friction // Mechanics Research Communications. 2004. Vol. 31, N. 03. P. 151–159.
13. Зароднюк А. В., Черкасов О. Ю. О максимизации горизонтальной дальности и брахистохроне с разгоняющей силой и вязким трением // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2017. Т. 4. С. 3–10.
14. Radulovich R., Obradovich A., Salnik S., Mitrovik Z. The brachistochronic motion of a wheeled vehicle // Nonlinear Dynamics. 2017. Vol. 87, N. 01.
15. Benham G. P., Cohen C., Brunet E., Clanet C. Brachistochrone on a velodrome // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2020. Vol. 476. N. 2238. P. 20200153. <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2020.0153>.
16. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. Москва: Наука, 1973.

To the Problem of Motion Cueing Simulation on a Robotic Stand for Aircraft Flight

S. S. Lemak, lemak2004@mail.ru,

Educational School "Fundamental and Applied Space Research", Lomonosov Moscow State University,
Moscow, 119192, Russian Federation,

M. D. Belousova, mb@vrmsu.ru,

Educational School "Brain, Cognitive Systems, Artificial Intelligence", Lomonosov Moscow State University,
Moscow, 119192, Russian Federation,

V. V. Alchikov, bestvladi@mail.ru,

Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119192, Russian Federation

Corresponding author: Belousova M. D., Junior Researcher, Lomonosov Moscow State University,
Moscow, 119192, Russian Federation, e-mail: mb@vrmsu.ru

Abstract

Various simulators with motion cueing simulation stands, which make it possible to create an acceleration environment for the pilot that is close to a real flight, are used for training aircraft pilots. The article considers the formulation of the motion cueing simulation on a stand based on an industrial manipulator. Motion cueing simulation algorithms include two phases: motion cueing simulation phase and phase of return to the working area center. During simulation phase the stand must implement such a movement that the angular accelerations acting on the person and the overload vector acting on the center of mass of the operator completely coincide with the real ones. If it is not possible then just the directions of these vectors should coincide. During the second phase the stand end point must return to the working area center with acceleration values below the threshold, but in the fastest way. This task can be presented as a generalization of the brachistochrone problem. The article considers the problem of the material point motion in a uniform gravity field along a curve located in a vertical plane, in the presence of restrictions on the trajectory curvature. It is necessary to choose the curve shape in such a way that the descent time is minimal. The problem solution is obtained by optimal control methods, the cases of regular and singular control realization are considered, the question of its conjugation. Also, the switching number between sections of regular and singular control is studied.

Keywords: motion cueing imitation, brachistochrone, optimal control, Pontryagin's Maximum Principle, singular optimal control

Acknowledgements: The work was supported financially by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the program of the Supersonic Center (agreement 075-15-2022-331).

For citation:

Lemak S. S., Belousova M. D., Alchikov V. V. To the Problem of Motion Cueing Simulation on a Robotic Stand for Aircraft Flight, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 10, pp. 546–554.

DOI: 10.17587/mau.23.546-554

References

1. Alexandrov V. V., Lemak S. S. Algorithms of dynamic piloted flight simulator stand based on a centrifuge with a controlled cardan suspension, *Journal of Mathematical Sciences*, 2021, vol. 253, no. 6, pp. 768–777.
2. Alexandrov V. V., Voronin L. I., Glazkov Yu. N., Ishlinskiy A. Yu., Sadovnichiy V. A. Mathematical problems of motion cueing simulation of aerospace flights, Moscow, Moscow University Press, 1995 (In Russian).
3. Sumbatov A. S. The problem on a brachistochrone (classification of generalizations and some recent results), *Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology*, vol. 35, pp. 66–75 (In Russian).
4. Gemmer J., Umble R., Nolan M. Generalizations of the Brachistochrone Problem, *Pi Mu Epsilon Journal*, 2011, vol. 13, no. 4, pp. 207–218.
5. Grimm C., Gemmer J. Weak and Strong Solutions to the Inverse-Square Brachistochrone Problem on Circular and Annular Domains, *Involve, a Journal of Mathematics*, 2016, vol. 10, no. 05.
6. Vratnari B., Saje Miran. On the analytical solution of the brachistochrone problem in a nonconservative field, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1998, vol. 33, no. 05, pp. 489–505.
7. Gladkov S., Bogdanova S. To the theory of motion of bodies with variable mass, *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2020, vol. 6, no. 65, pp. 83–91 (In Russian), <https://doi.org/10.17223/19988621/58/1>.
8. Mertens S., Mingramm S. Brachistochrones With Loose Ends, *European Journal of Physics*, 2008, vol. 29, no.11.
9. Gladkov S. O., Bogdanova S. B. To the theory of n-dimensional brachistochrone, *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta, Matematika i mekhanika*, vol. 5, no. 68, pp. 53–60 (In Russian).
10. Cherkasov O. Y., Zarodnyuk A. V. Brachistochrone problem with linear and quadratic drag and accelerating, *Mathematics in Engineering, Science and Aerospace*, Cambridge, 2015, vol. 6, no. 1, pp. 35–44.
11. Vondrukhov A. S., Golubev Y. F. Optimal trajectories in brachistochrone problem with Coulomb friction, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2016, vol. 55, no. 3, pp. 341–348.
12. Wensrich C. Evolutionary solutions to the brachistochrone problem with Coulomb friction, *Mechanics Research Communications*, 2004, vol. 31, no. 03, pp. 151–159.
13. Zarodnyuk A. V., Cherkasov O. Yu. On maximization of the horizontal range and the brachistochrone problem with an accelerating force and viscous drag, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2017, vol. 56, no. 4, pp. 553–560.
14. Radulovich R., Obradovich A., Salinik S., Mitrovik Z. The brachistochronic motion of a wheeled vehicle, *Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 87, no. 01.
15. Benham G. P., Cohen C., Brunet E., Clanet C. Brachistochrone on a velodrome, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2020, vol. 476, no. 2238, pp. 20200153. <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2020.0153>.
16. Gabasov R., Kirillova F. M. Singular optimal control, Moscow, Science Publishing, 1973 (In Russian).