

А. М. Малышенко, д-р техн. наук, проф., tam@tpu.ru,
Национальный исследовательский Томский политехнический университет

Вход-выходные силомоментные отображения у шасси робокаров с тремя колесами Илона

Современный этап развития робототехники фокусируется все в большей мере на исследованиях, разработке, производстве и эксплуатации мобильных роботов. Разнообразие в их функциональном назначении, среде эксплуатации (наземные, подземные, подводные, воздушные, космические), в требованиях к технико-экономическим и эксплуатационным свойствам порождает разнообразие таких роботов. Используемые в мобильных роботах типы кинематических схем, двигателей и их приводов также существенно расширяют их нынешний и будущий парк. Многообразие наиболее распространенных в настоящее время мобильных роботов с колесными шасси (робокаров) определяется числом и типом используемых в них колес и их относительным положением на шасси. Поэтому разработка колесных роботов предполагает выбор варианта исполнения их шасси на основе сопоставительного анализа различных потенциально применимых схемотехнических решений.

Данная статья содержит математические описания вход-выходных силомоментных отображений (взаимосвязей) вращающих моментов на валах колес робокаров с силами и вращающими моментами, обеспечивающими движения их шасси по горизонтальной плоскости, которые могут использоваться для сопоставительного анализа и выбора схемотехнических решений для шасси робокаров. Такие описания приводятся и анализируются для четырех вариантов кинематических схем шасси робокаров с тремя колесами Илона (меканум колесами, шведскими колесами). Они определяются для всех возможных вариантов направлений прикладываемых к колесам таких робокаров вращающих моментов, а также для тех случаев, когда к одному из этих колес вращающий момент не прикладывается. Тем самым описываются и анализируются различные ситуации — режимы функционирования подобных робокаров с использованием всех трех или любых двух колес для обеспечения прикладываемых к шасси робокаров сил и моментов, необходимых для их перемещений.

Статья содержит оценки структур вход-выходных силомоментных отображений для выбранных четырех вариантов кинематических схем шасси робокаров с тремя колесами Илона, а также влияния их внутренних вход-выходных перекрестных связей на реализацию алгоритмов управления подобными робокарами, взаимосвязь по их управляемым переменным, маневренность, управляемость и достижимость. Описан вариант алгоритма решения обратных силомоментных задач для шасси в указанном выше исполнении. Указана предпочтительность использования подобных робокаров при реализации типовых задач управления — финитного, программного, следящего и терминального управления.

Ключевые слова: робокар, шасси, колеса Илона, вход-выходные отображения, прямые и обратные силомоментные задачи шасси, маневренность, управляемость, достижимость, алгоритмы управления

Введение

Автоматические транспортные тележки (робокары, мобильные роботы) с каждым годом получают все большее применение. С их помощью уже успешно решаются многие технологические операции в различных отраслях производства [1, 2]. Они используются для логистических и исследовательских целей [3–5], в сельском хозяйстве [6], в быту [7], военном деле [8], причем часто в некомфортных и жизненно опасных для людей средах [9, 10], в медицине и социальной сфере [11, 12]. Области их практического применения, несомненно, будут расширяться и в будущем.

Типовыми режимами функционирования робокаров являются финитные, программные, следящие, терминальные при движениях на заранее известной или неизвестной "сцене" (в заранее известной или неизвестной среде), в том числе с поисковыми или исследовательскими целями.

Наибольшее распространение в настоящее время получили робокары, базирующиеся на

колесных шасси. Разнообразие последних определяется в первую очередь функциональным назначением робокаров, средой и условиями их эксплуатации, а также типом и числом колес, которыми оснащены их шасси. В робокарах нашли применение колеса традиционного типа [13], сферические колеса и колеса с периферийными роликами, свободно вращающимися на осях, не параллельных оси вращения колеса. При этом следует заметить, что несмотря на многовековое использование колес касающаяся их терминология до сих пор не устоялась [13].

Под традиционными колесами (их называют также классическими, обычными, автомобильными) понимают [13] колеса трех типов: фиксированные (не меняющие положение своих центров и осей вращения относительно шасси); центрально ориентируемые (относительно шасси сохраняющие неизменным положение своего центра, но способные поворачиваться своей плоскостью вокруг проходящей через центр колеса вертикальной оси); не центрально ориентируемые (отличающиеся от центрально ориентируемых колес тем, что повороты их

плоскости осуществляются вокруг вертикальной оси, не проходящей через их центр. Такие колеса в обиходе часто называют рояльными).

Традиционные колеса обычно используются в робокарах, к которым не предъявляются высокие требования в части их маневренности, не требуются повороты на месте и не являются критичными присущие таким колесам скольжение и обусловленное им трение. В тех же ситуациях, когда при практическом применении робокаров подобные особенности шасси с традиционными колесами нежелательны или даже не приемлемы, используются сферические колеса или (что значительно чаще) колеса с периферийными роликами.

Основополагающая идея колес с периферийными роликами, по-видимому, принадлежит Joseph Grabowiecki, оформившему ее в 1919 г. в патенте США № 1305535 [14]. Кинематическая схема предложенного им колеса включает группу равномерно размещенных по его периферии свободно вращающихся на своих осях роликов и соответствует колесу, представленному на рис. 1, б. Подобное техническое решение колеса позволяет существенно сократить нежелательное трение при нелинейных перемещениях оснащенного им транспортного средства и повысить его маневренность. Усовершенствованными вариантами этого колеса являются всенаправленное колесо (omnidirectional Wheel), предложенное J. Blumrich (патент США № 3789947) [15] и колесо по патенту США № 3882885, выданному Peter Rodney McKinnon [11, 16]. Последнее, по сути, представляет пару параллельных и жестко связанных между собой колес по патенту [15], но с угловым смещением между ними, обеспечивающим непрерывный контакт этого колеса с опорной поверхностью. Отметим, что

колеса по патентам [15, 16] сохраняют достоинства колеса J. Grabowiecki, но оказывают на шасси меньшие вертикальные вибрации при своем движении. С этой же целью применяют и строенные подобным типом колеса.

Отличительной особенностью колес по патентам [16–18] является расположение на ободе колеса роликов, оси вращения которых находятся в плоскости, перпендикулярной оси колеса. Группу этих колес чаще всего называют омни-колесами (omni-wheels).

К классу колес с периферийными роликами относится и колеса (рис. 1, а), предложенные в 1973 г. инженером Бенгтом Илоном из шведской компании Magnum AB, называемые колесами Илона, magnum-колесами или шведскими колесами [19–21]. Закрепленные на внешнем ободе колеса Илона ролики развернуты относительно основной оси колеса на 45° (а в омни-колесах — на 90°).

Указанные выше типы колес с периферийными роликами предпочитают использовать в транспортных средствах, предназначенных для работы в условиях, требующих от них повышенной маневренности, в том числе способности совершать полные повороты на месте. В настоящее время получили большее применение колеса Илона, а не омни-колеса.

Требуемое функционирование робокаров обеспечивают их системы автоматического управления (CAU), алгоритмы управления в которых определяются не только необходимыми перемещениями робокаров в пространстве, но и в существенной мере заложенной в его шасси кинематической схемой и соответствующим ей силомоментным вход-выходным отображением определяющих их движения сил и моментов. При этом под силомоментным вход-выходным отображением у шасси в случае их движений по горизонтальной плоскости следует понимать зависимостидвигающих его сил по двум взаимно-ортогональным направлениям на плоскости (как правило, по его строительным осям) и вращающего его вокруг вертикальной оси момента от моментов на ведущих осях колес шасси. Установление подобных зависимостей в теории механизмов и машин называют решением "прямой задачи кинематики", а установление обратных им зависимостей — "обратной задачей кинематики" [22]. В частности, для манипуляционного робота прямая задача кинематики — это определение по значениям углов в его сочленениях вращательного типа и/или значениям линейных перемещений в его призматических сочленениях линейных и угловых координат схвата или используемого в манипуляторе рабочего инструмента.

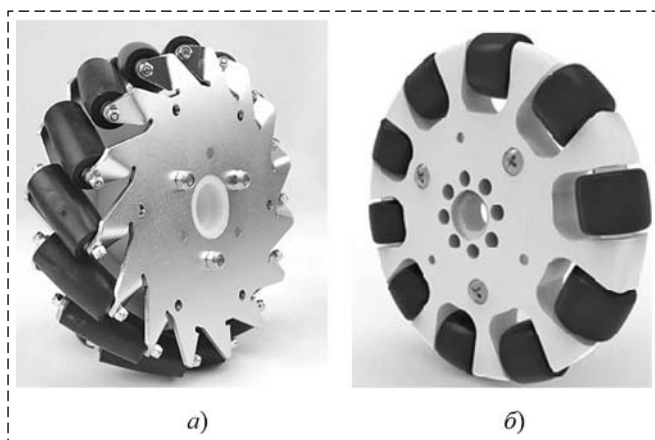


Рис. 1. Внешний вид колес с периферийными роликами:
а — колесо Илона; б — омни-колесо (из открытых источников)

Fig. 1. Appearance of wheels with peripheral rollers:
а — Ikon's wheel; б — omni-wheel (from open sources)

Применительно к шасси робокаров в качестве прямой задачи следует считать определение зависимости от моментов на валах его колес значений приложенных к шасси вектора силы в плоскости его движения и вращающего его вокруг вертикали места момента, обеспечивающих, соответственно, линейные и вращательные движения робокара. Знание этих зависимостей необходимо для выбора приводных двигателей для колес шасси. Эти зависимости необходимы для решения обратной задачи (определения моментов на валах колес шасси по указанным выше желаемым значениям вектора силы и вращающего момента). Решение обратной задачи для шасси является необходимой частью алгоритма управления робокаром при реализации заданных его движений по горизонтальной плоскости. При этом указанные выше прямую и обратную задачи применительно к шасси робокара логично называть силомоментными прямой и обратной задачами шасси.

Целью данной статьи является решение прямых и обратных силомоментных задач для наиболее вероятных схмотехнических решений шасси с тремя колесами Илона, оценка потенциальных возможностей таких шасси в части реализации разнообразных движений робокара на горизонтальной плоскости и оценка того, насколько эффективным может быть использование колес Илона для шасси в трехколесном исполнении.

Анализируемые схмотехнические решения шасси с тремя колесами Илона

Несмотря на небольшое число колес трехколесные шасси могут иметь большое число

реализаций, отличающихся не только конструктивными параметрами, но и относительным расположением колес. Тем не менее, при практических реализациях используется относительно небольшое число вариантов их схмотехнического исполнения. В частности, у робокаров, от которых требуется повышенная маневренность, чаще всего используются кинематические схемы, при которых центры колес на шасси располагаются в вершинах равностороннего треугольника.

При применении колес Илона схема их расположения может отличаться лишь относительной ориентацией осей этих колес и размещаемых на них роликов. Четыре из наиболее привлекательных вариантов таких расположений колес из соображений обеспечиваемой шасси подвижности представлены в табл. 1.

Для определения силомоментных вход-выходных связей у представленных на рис. 1 шасси введем следующие допущения.

Будем полагать, что колеса Илона при движениях шасси не проскальзывают. При этом в процессе управления робокаром прикладываемые от электроприводов к ним вращающие моменты передаются через электромагнитные муфты, в связи с чем к колесам могут быть приложены не только вращающие моменты в обоих направлениях их вращения, но и в соответствии с реализуемыми алгоритмами управления движениями робокара в отдельных режимах управления у одного из колес вращающий момент может быть нулевым.

Далее полагаем, что шасси оснащено однотипными колесами Илона. При этом центры колес расположены на одинаковом расстоянии от конструктивного центра робокара и находятся в вершинах равностороннего треугольника.

Используемые условные обозначения

Примем следующие условные обозначения, полагая при этом, что все используемые далее трехгранники осей являются правыми и имеют взаимно ортогональные оси:

$O_0X_0Y_0Z_0$ — базовый трехгранник осей, относительно которого определяется положение шасси робокара в плоскости $O_0X_0Y_0$;

$OXYZ$ — трехгранник осей, жестко связанный с шасси в его конструктивном центре O так, что ось OZ направлена вертикально вверх, а ось OY направлена в центр одного из колес шасси;

θ — угол отклонения оси OY от направления O_0Y_0 (курсовой угол робокара);

x, y — текущие координаты центра шасси в плоскости $O_0X_0Y_0$ в направлениях O_0X_0 и O_0Y_0 , соответственно;

Таблица 1

Варианты анализируемых кинематических схем шасси робокаров с тремя колесами Илона

Номер варианта	Кинематическая схема	Номер варианта	Кинематическая схема
1		2	
3		4	

i — порядковый номер i -го колеса шасси;
 R — внешний радиус i -го колеса;
 L_i — расстояние между центрами шасси и i -го колеса;

M_{k_i} — создаваемый i -м приводом момент вращения на валу i -го колеса;

F_{k_i} — передаваемая на шасси сила от i -го колеса;

α_i — угол отклонения от оси Ox направления из центра шасси O к центру O_i i -го колеса;

$OX_1Y_1Z_1$ — трехгранник осей, который образуется поворотом трехгранника $OXYZ$ вокруг его оси OZ на угол α_i ;

$O_iX_{i1}Y_{i1}Z_{i1}$ — трехгранник осей, который образуется смещением на L_i трехгранника $OX_1Y_1Z_1$ вдоль его оси OX_i (до совмещения его центра с центром i -го колеса);

β_i — угол отклонения оси i -го колеса в плоскости OXY от OX_{i1} ;

$O_iX_iY_iZ_i$ — связанный с i -м колесом трехгранник осей, получаемый поворотом $O_iX_{i1}Y_{i1}Z_{i1}$ вокруг оси O_iZ_{i1} на угол β_i ;

ξ — угол наклона осей роликов от плоскости колеса (для колес Илона $\xi = 45^\circ$);

$\gamma = -135^\circ$ — угол между направлением приложенного к i -му колесу Илона от его привода вращающего момента M_{k_i} и создаваемой им силой F_{k_i} , действующей на шасси.

Полагаем также, что в приведенных в табл. 1 вариантах шасси все колеса имеют одинаковый радиус R . Одинаковы и расстояния L от их центров O_i до центра шасси O .

Силомоментные связи шасси с одним из своих колес

В целях формирования вход-выходных силомоментных отображений для всех шасси роботов, представленных в табл. 1, и выработки для этого типового подхода определим их вначале для одного колеса Илона, расположенного на шасси так, как представлено на рис. 2.

Для определения вход-выходных силомоментных отображений у приведенных в табл. 1 трехколесных шасси может использоваться математический аппарат, основанный на применении однородных векторов (англ.: homogeneous vectors) размера 4×1 и однородных матриц (homogeneous matrices) размера 4×4 [23–25], который широко используется не только в теории механизмов и машин, в том числе в робототехнике, но и в компьютерной графике, в техническом зрении, в проективной геометрии. Такой математический аппарат позволяет единообразно описывать линейные и угловые преобразования (переходы) между исполь-

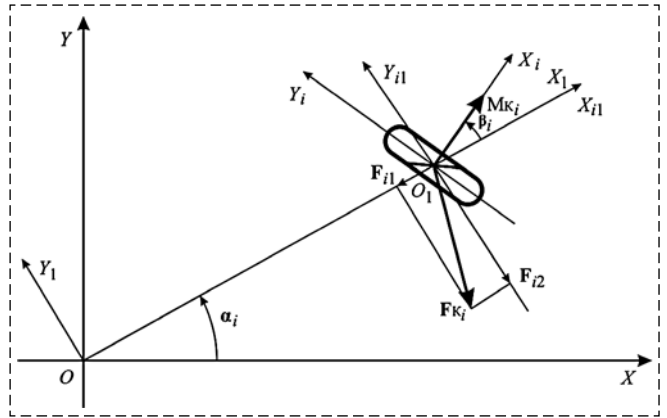


Рис. 2. Относительное положение i -го колеса Илона на шасси робота

Fig. 2. Relative position of Elon's i -th wheel on the robocar chassis

зуемыми при описании кинематических цепей механизмов трехгранниками осей.

В связи с тем, что силомоментные связи между шасси и их колесами в данном случае определяются лишь в двухмерном пространстве (плоскости) OXY и относительно просты, использование для их определения однородных четырехмерных векторов и матриц вряд ли целесообразно. Их применение может быть целесообразно в тех случаях, когда необходимо устанавливать такие связи у роботов, имеющих силомоментные взаимосвязи с внешней средой не только через их колеса, но и через установленные на них манипуляторы или другие механизмы. Поэтому далее используем трехмерные векторы и векторно-матричные преобразования с учетом их относительных угловых положений в плоскости OXY .

Создаваемая приводом i -го колеса сила воздействия на шасси F_{k_i} связана с вращающим моментом M_{k_i} на его оси следующим уравнением:

$$F_{k_i} = R^{-1} M_{k_i} e^{j\gamma}, i \in \overline{1,3},$$

где R_i — радиус колеса, а γ — угол между моментом M_{k_i} и создаваемой им силой F_{k_i} .

Для установления силомоментной связи представленного на рис. 2 колеса и шасси определим вначале проекции передаваемой на шасси от i -го колеса силы F_{k_i} на оси трехгранника $O_iX_{i1}Y_{i1}Z_{i1}$. Они определяются по следующему векторно-матричному выражению:

$$\begin{aligned} F_{k_{i1}} &\triangleq [F_{k_{i1}}, F_{k_{i2}}, F_{k_{i3}}]^T = \\ &= R^{-1} \mathbf{WR3}(\gamma) \mathbf{WR3}(\beta_i) M_{k_i} = \\ &= R^{-1} \begin{bmatrix} c(\gamma) & -s(\gamma) & 0 \\ s(\gamma) & c(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta_i & -s\beta_i & 0 \\ s\beta_i & c\beta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{k_i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1)$$

В этом уравнении и далее под матрицей $\mathbf{WR3}(\mu)$ понимаем матрицу поворота ортогонального трехгранника осей вокруг его третьей оси на угол μ вида

$$\mathbf{WR3}(\mu) = \begin{bmatrix} c\mu & -s\mu & 0 \\ s\mu & c\mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где для краткости записей приняты условные обозначения:

$$c\mu \triangleq \cos \mu; \quad s\mu \triangleq \sin \mu.$$

Выполнив в (1) перемножения в правой части равенства, получим следующий результат:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{K_{i1}} &= [F_{K_{i1}}, F_{K_{i2}}, F_{K_{i3}}]^T = \\ &= R^{-1} \mathbf{WR3}(\gamma) \mathbf{WR3}(\beta_i) \mathbf{M}_{K_i} = \\ &= R^{-1} \begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta_i \cdot \mathbf{M}_{K_i} \\ s\beta_i \cdot \mathbf{M}_{K_i} \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} R^{-1}(c\gamma \cdot c\beta_i - s\gamma \cdot s\beta_i) \mathbf{M}_{K_i} \\ R^{-1}(s\gamma \cdot c\beta_i + c\gamma \cdot s\beta_i) \mathbf{M}_{K_i} \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

из которого следует, что проекции вектора $\mathbf{F}_{K_{i1}}$ на оси X_{i1} и Y_{i1} будут, соответственно, определяться по следующим формулам:

$$F_{K_{i1}} = R^{-1}(c\gamma \cdot c\beta_i - s\gamma \cdot s\beta_i) \mathbf{M}_{K_i}, \quad (2)$$

$$F_{K_{i2}} = R^{-1}(s\gamma \cdot c\beta_i + c\gamma \cdot s\beta_i) \mathbf{M}_{K_i}. \quad (3)$$

Подставив в (2), (3) соответствующее колесам Илона значение $\gamma = -135^\circ$, получим

$$F_{K_{i1}} = -\frac{\sqrt{2}}{2R} (c\beta_i - s\beta_i) \mathbf{M}_{K_i},$$

$$F_{K_{i2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2R} (c\beta_i + s\beta_i) \mathbf{M}_{K_i}.$$

Составляющая $F_{K_{i1}}$ вектора силы $\mathbf{F}_{K_{i1}}$ определяет силу, с которой данное колесо воздействует на шасси в направлении OX_1 , а составляющая $F_{K_{i2}}$ создает момент

$$M_{iz} = -\frac{\sqrt{2}}{2R} L(c\beta_i + s\beta_i) \mathbf{M}_{K_i}, \quad (4)$$

вращающий шасси относительно вертикальной оси OZ . При этом проекции силы $F_{K_{i1}}$ на строительные оси OX и OY шасси определяют, соответственно, по формулам:

$$F_{ix} = -\frac{\sqrt{2}}{2R} c\alpha_i (c\beta_i - s\beta_i) \mathbf{M}_{K_i}, \quad (5)$$

$$F_{iy} = -\frac{\sqrt{2}}{2} s\alpha_i (c\beta_i - s\beta_i) \mathbf{M}_{K_i}. \quad (6)$$

Силомоментные взаимодействия шасси и каждого из колес во всех приведенных в табл. 1 схемах шасси определяются совокупностью постоянных параметров R , L , γ и двумя углами — α_i , β_i , значения которых зависят от схемы шасси, относительного положения на нем этих колес и указаны в табл. 2.

Решение прямой вход-выходной силомоментной задачи проиллюстрируем на шасси, кинематическая схема которого представлена на рис. 3 и соответствует варианту 1 в табл. 1.

На рис. 3 указаны действующие на шасси силы $\mathbf{F}_{K_i}$, $i \in 1, 3$, и их проекции $F_{K_{i1}}$, $F_{K_{i2}}$ от каждого из его колес, определяемые вращающимися колесами моментами $\mathbf{M}_{K_i}$, $i \in 1, 3$.

Таблица 2

Параметры α_i и β_i кинематических цепей шасси, приведенных в табл. 1

Параметры колес	Номер колеса	Номер кинематической схемы шасси в табл. 1			
		1	2	3	4
Угол α_i , °	1	90	90	90	90
	2	210	210	210	210
	3	-30	-30	-30	-30
Угол β_i , °	1	0	-60	-90	-90
	2	0	-60	-90	-60
	3	0	-60	-90	60

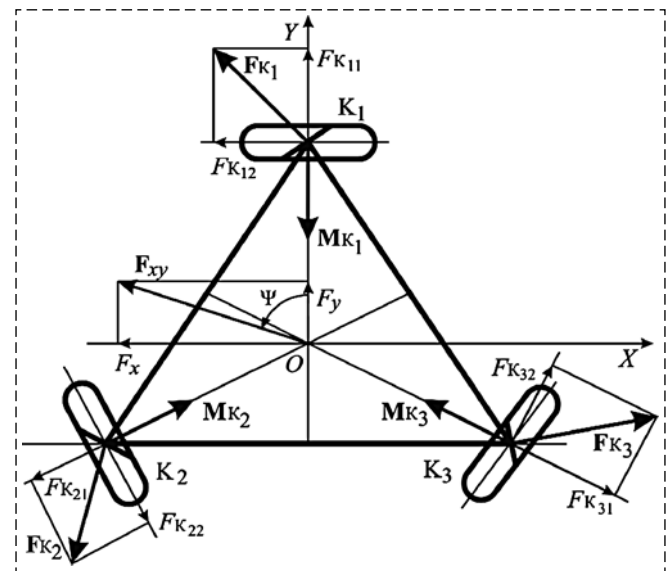


Рис. 3. Кинематическая схема шасси и действующие на него силы

Fig. 3. Kinematic scheme of the chassis and the forces acting on it

Решения прямых задач шасси робокаров по вариантам 1—4 из таблицы 2 при моментах на валах колес, указанных на рис. 3 (из семейства М₊)

Номер варианта исполнения шасси	Уравнения, полученные при решении прямой силомоментной задачи для этого шасси
1	$F_x = -\frac{1}{R}(\cos 30^\circ M_{K_2} - \cos 30^\circ M_{K_3})$ $F_y = \frac{1}{R}(\sin 45^\circ M_{K_1} - \sin 30^\circ M_{K_2} - \sin 30^\circ M_{K_3})$ $M_z = \frac{\sqrt{2}}{2R}L(M_{K_1} + M_{K_2} + M_{K_3})$
2	$F_x = -\frac{1}{R}(\cos 15^\circ \cos 30^\circ M_{K_2} - \cos 15^\circ \sin 30^\circ M_{K_3})$ $F_y = \frac{1}{R}(\cos 15^\circ M_{K_1} - \cos 15^\circ \cos 30^\circ M_{K_2} - \cos 15^\circ \sin 30^\circ M_{K_3})$ $M_z = -\frac{L}{R} \sin 15^\circ (M_{K_1} + M_{K_2} + M_{K_3})$
3	$F_x = -\frac{\sqrt{2}}{2R}(\cos 30^\circ M_{K_2} + \sin 30^\circ M_{K_3})$ $F_y = -\frac{\sqrt{2}}{2R}(M_{K_1} + \sin 30^\circ M_{K_2} - \cos 30^\circ M_{K_3})$ $M_z = \frac{\sqrt{2}}{2R}L(M_{K_1} - M_{K_2} + M_{K_3})$
4	$F_x = -\frac{\sqrt{2}}{2R}(\cos 15^\circ \cos 30^\circ M_{K_2} - \sin 15^\circ \cos 30^\circ M_{K_3})$ $F_y = -\frac{\sqrt{2}}{2R}(M_{K_1} + \cos 15^\circ \sin 30^\circ M_{K_2} + \sin 15^\circ \sin 30^\circ M_{K_3})$ $M_z = \frac{\sqrt{2}}{2R}L(M_{K_1} + \sin 15^\circ M_{K_2} + \cos 15^\circ M_{K_3})$

Используя расчетные формулы (4)—(6) и значения параметров α_i и β_i для этого варианта шасси, приведенные в табл. 2, получаем аналитические выражения для создаваемых каждым колесом вращающего шасси вокруг вертикальной оси OZ момента M_{iz} и действующих на него сил F_{ix} и F_{iy} , а также их суммарные значения, соответственно, M_z , F_x и F_y . Последние указаны в табл. 3. В этой же таблице приведены аналитические выражения для аналогичных моментов и сил, которые соответствуют второй, третьей и четвертой кинематическим схемам шасси из табл. 1.

Далее полагаем, что приводы колес способны создавать их вращающие моменты в обоих направлениях (M_+ и M_- , соответственно), и что при необходимости робокар может переводиться на режимы работы с использованием только двух каких-либо его колес. Следовательно, моменты на валу каждого из колес шасси $M_i \in \{M_+, M_-, 0\}$, $i \in \overline{1, 3}$.

Смена направления крутящего момента на любом из колес по сравнению с принятыми на рис. 2 приводит к изменению знаков обусловленных им действующей на шасси силы и вращающего его момента. В ситуациях, когда в описываемом шасси на каком-либо из валов колес вращающий момент будет равен нулю (при отключенном его приводе), силомоментные вход-выходные отображения шасси могут быть получены приравниванием этого момента нулю в уравнениях (4)—(6).

Входящие в табл. 3 уравнения определяют, по сути, не только количественные взаимосвязи между входными для шасси воздействиями M_1 , M_2 , M_3 и его выходными переменными F_x , F_y , M_z , обеспечивающие его движения на горизонтальной плоскости. Они также отражают структуру вход-выходных взаимосвязей этих величин у шасси как части робокара — объекта автоматического управления.

Решение обратных силомоментных задач шасси с тремя колесами Илона

Решение обратной силомоментной задачи для шасси сводится к определению моментов

M_i , $i \in \overline{1, 3}$, на валах колес шасси в функции от заданных значений составляющих F_x , F_y продольной силы F_{xy} (рис. 3) и вектора вращающего шасси момента M_z .

Математические модели, описывающие решения прямых задач для каждого из приведенных в табл. 3 четырех шасси, линейны и могут быть представлены в виде векторно-матричного уравнения

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{M}_K, \quad (7)$$

где введены следующие обозначения:

$$\mathbf{F} \triangleq [F_x, F_y, M_z]^T, \mathbf{M}_K \triangleq [M_{K_1}, M_{K_2}, M_{K_3}]^T.$$

В таком случае обратное силомоментное отображение шасси определяется уравнением

$$\mathbf{M}_K = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{F}, \quad (8)$$

при условии, что матрица $\mathbf{A}$ в уравнении (7) является невырожденной.

Для первого в табл. 1 варианта шасси по приведенным в табл. 3 уравнениям силомоментного отображения $\mathbf{M}_K \triangleq [M_{K_1}, M_{K_2}, M_{K_3}]^T$ в $\mathbf{F} \triangleq [F_x, F_y, M_z]^T$ матрица $\mathbf{A}$ имеет вид:

$$A = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 0 & -\cos 30^\circ & \cos 30^\circ \\ \sin 45^\circ & -\sin 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ L \cos 45^\circ & L \cos 45^\circ & L \cos 45^\circ \end{bmatrix}$$

и является невырожденной. Не сложно убедиться в том, что невырожденные матрицы A соответствуют и остальным трем вариантам шасси. Следовательно, для всех этих четырех вариантов шасси обратное силомоментное отображение определяется уравнением (8).

Если шасси будет реализовано с тремя колесами Илона, но по отличной от указанных в табл. 1 кинематической схеме, и матрица A для него окажется вырожденной, то в уравнении (14) вместо обратной матрицы A^{-1} следует использовать псевдообратную для A матрицу A^+ . При этом следует принять

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T,$$

если столбцы матрицы A линейно независимы, или принять

$$A^+ = A^T (A A^T)^{-1},$$

если линейно независимы строки матрицы A . В двух последних формулах A^T — транспонированная матрица A .

Оценка свойств робокаров с тремя колесами Илона как объектов автоматического управления

Вид представленных в табл. 3 уравнений, описывающих вход-выходные силомоментные отображения шасси с тремя колесами Илона, свидетельствует о том, что робокары, оснащенные такими шасси, представляют собой с позиций управления объекты со всем возможным множеством внутренних взаимосвязей между прилагаемыми к колесам вращающими моментами M_1 , M_2 , M_3 и определяющими их движение силами F_x , F_y и моментом M_z . В связи с этим робокары с такими шасси относятся к классу объектов управления, для которых наиболее сложно реализуются системы автоматического управления (САУ), особенно если они должны обеспечивать в процессе функционирования независимое (автономное) управление всеми их выходными управляемыми переменными. Для описываемого типа робокаров таковыми являются линейные координаты x , y центра связанного с шасси трехгранника осей $OXYZ$ в горизонтальной плоскости $O_0X_0Y_0$ базового

трехгранника осей $O_0X_0Y_0Z_0$, а также угловое положение трехгранника $OXYZ$ относительно $O_0X_0Y_0Z_0$, определяемое курсовым углом θ .

Для независимого управления выходными переменными x , y , θ , робокара необходимо нейтрализовать влияние взаимозависимых изменений выходных переменных шасси F_x , F_y , M_z при изменениях моментов на валах его колес. Анализ всего комплекта представленных в табл. 3 уравнений показывает, что подобные режимы работы данных шасси не возможны без дополнительных схмотехнических и/или алгоритмических решений, обеспечивающих нейтрализацию им присущих взаимных вход-выходных силомоментных перекрестных связей.

Важной характеристикой свойств робокаров является их маневренность, т. е. способность в статических и/или динамических режимах менять направление их движений и угловую ориентацию, т. е. управляемые переменные x , y , θ [17]. Это свойство робокаров в существенной мере зависит от кинематической схемы их шасси, используемых в них типов колес и их вход-выходных силомоментных отображений.

Однотипность структур этих отображений, представленных в табл. 3 для рассмотренных четырех кинематических схем шасси, позволяет сделать для них следующее обобщающее заключение. Маневренность в статических состояниях робокара с любым из таких шасси в пределах всего заданного рабочего пространства перемещений робокара x_{rp} , y_{rp} , θ_{rp} имеет явные ограничения из-за наличия всего возможного множества внутренних перекрестных связей между движущими шасси силами F_x , F_y , вращающим его моментом M_z и движущими его вращающими моментами на валах колес. Ограничения заключаются в том, что невозможно будет обеспечить одновременное независимое поддержание заданных изменений во времени всех управляемых переменных x , y , θ . Поэтому в ситуациях, когда робокары с рассмотренными в данной статье шасси должны обладать повышенной маневренностью, их следует оснащать системами автоматического управления, использующими дополнительные схмотехнические и/или алгоритмические средства (прекомпенсаторы), обеспечивающие нейтрализацию влияния взаимных вход-выходных перекрестных силомоментных связей в их шасси.

Робокары, как и любые другие объекты автоматического управления, должны обладать в пределах заданных им рабочих пространств x_{rp} , y_{rp} , θ_{rp} свойствами достижимости и управляемости. Со строгими математическими определениями этих свойств можно ознако-

миться, в частности, в работе [26]. Здесь лишь поясним их физический смысл применительно к рассматриваемому классу робокаров. Они обладают свойством достижимости, если при имеющихся у них ресурсах по управлению могут быть переведены за конечное время из исходного начального состояния x_0, y_0, θ_0 их рабочего пространства $x_{rp}, y_{rp}, \theta_{rp}$ в любое другое состояние x, y, θ этого пространства. Управляемость таких робокаров означает, что они могут быть переведены при имеющихся у них ресурсах по управлению за конечное время из любого состояния рабочего пространства $x_{rp}, y_{rp}, \theta_{rp}$ в его исходное начальное состояние. Данные свойства могут быть корректно оценены лишь с использованием математических моделей динамики анализируемых робокаров.

Необходимым условием для обеспечения свойств достижимости и управляемости робокара с шасси на трех колесах Илона является возможность изменения в процессе его движений действующих на шасси сил F_x, F_y и вращающего момента M_z таким образом, чтобы в конечном итоге могли быть реализованы во всем его рабочем пространстве $x_{rp}, y_{rp}, \theta_{rp}$ все указанные в предыдущем абзаце перемещения. Потенциально такой возможностью обладают все приведенные в табл. 1 варианты шасси, но при условии, что в процессе отработки заданных перемещений возможны не только (и не столько) их движения при одновременном формировании моментов, управляющих приводами всех трех колес, но и режимы или подрежимы работы при каком-либо одном приводе, не создающем на его приводном колесе вращающий момент. Следовательно, система автоматического управления такого робокара должна реализовываться с использованием в алгоритме логических условий и формировать управляющие воздействия на приводы колес при различных вход-выходных математических описаниях своего шасси, что существенно ее усложняет.

Заключение

Привлекательность трехколесного исполнения шасси для робокаров связана, прежде всего, с возможностью реализовать его с меньшими массогабаритными характеристиками, что часто бывает одним из основных требований заказчиков в проектных заданиях. Поэтому оценка потенциальных возможностей такого исполнения шасси робокаров при их эксплуатации представляет не только теоретический, но и практический интерес.

Математические модели вход-выходных силовомоментных отображений у шасси с тремя колесами Илона характеризуются полным набором внутренних взаимосвязей между каждым из вращающих моментов на валах их колес с определяющими продольные движения шасси силами F_x, F_y и моментом M_z , вращающим его относительно вертикали места. Поэтому робокары с такими шасси правомерно отнести к объектам автоматического управления, у которых сложно обеспечить автономность управления определяющими движение шасси силами F_x, F_y и моментом M_z и, соответственно, независимость по управляемым выходным переменным x, y, θ .

Шасси с тремя колесами Илона потенциально обеспечивают управляемость и достижимость у оснащенных ими робокаров при создании для них систем автоматического управления. Поэтому перемещения таких робокаров в пределах всего их заданного рабочего пространства $x_{rp}, y_{rp}, \theta_{rp}$ реализуемы между любыми двумя состояниями в пределах этого пространства. Однако из-за внутренних силовомоментных перекрестных связей в шасси и обусловленного ими связанного управления по выходным переменным x, y, θ такие переводы далеко не всегда могут быть проведены с наложением жестких ограничений на текущие значения переменных $x(t), y(t), \theta(t)$. В ряде случаев может оказаться, что такие задачи управления целесообразно реализовывать с использованием в процессе управления как трех, так и двух управляемых колес или их в выбранной последовательности. При этом, если это допустимо по условиям реализуемой задачи управления, вначале может быть обеспечено заданное линейное перемещение, а затем угловое положение робокара (или наоборот). Система автоматического управления робокара в таких случаях должна реализовываться с использованием в алгоритме управления логических условий.

Автономное управление переменными $x(t), y(t), \theta(t)$ робокара возможно лишь с использованием в системе управления аппаратных и/или алгоритмических прекомпенсаторов, позволяющих компенсировать влияние внутренних силовомоментных перекрестных связей в шасси на управляемые переменные.

Таким образом, можно заключить, что исполнение шасси с тремя колесами Илона более приемлемо для робокаров, предназначенных для реализации при своей работе задач финитного управления, нежели задач слежения, программного и терминального управления, при которых, как правило, требуется обеспечивать взаимонезависимые изменения управляемых переменных x, y, θ .

Список литературы

1. **Справочник** по промышленной робототехнике: В 2-х кн. Кн. 1 / Под ред. Ш. Нофа. М.: Машиностроение, 1989.
2. **Моритц Л.** Тенденции развития мобильных роботов // Control Engineering Россия. 2020. № 4(88). С. 56–58. URL: <https://controleng.ru/wp-content/uploads/56-1.pdf> (дата обращения: 16.03.2022).
3. **Автоматические** управляемые транспортные средства // Склад & техника. 2006. № 3. 24.08.2020. URL: <https://sitmag.ru/article/10543-kamo-gryadeshi-ats> (дата обращения: 16.03.2022).
4. **Давыдов В. В.** 20 идей по развитию России. Часть 16. Беспилотный транспорт. URL: <https://20idei.ru/ru/ideas/16> (дата обращения: 16.02.2022).
5. **Космические** роботы / Site'Kid.ru. Онлайн энциклопедия. URL: https://sitekid.ru/izobreteniya_i_tehnika/roboty/kosmicheskie_roboty.html (дата обращения: 16.03.2022).
6. **Бойко А.** Каталог автономных сельскохозяйственных роботов для работы в поле, в саду или теплице // Robotrends. URL: <http://robotrends.ru/robopedia/katalog-avtonomnyh-robotov-dlya-raboty-v-selskom-hozyaystve> (дата обращения: 16.03.2022).
7. **Повный А.** Бытовые роботы — обзор роботов различного назначения. // Онлайн журнал "Электрик Инфо", 25 октября 2016. URL: <http://elektrik.info/obzor/1182-bytovye-roboty-obzor-robotov-razlichnogo-naznacheniya.html> (дата обращения: 16.03.2022).
8. **Автоматические** транспортные средства снабжения для солдат на поле боя. URL: http://www.army-guide.com/rus/article/article_1573.html (дата обращения: 16.03.2022).
9. **Бойко А.** Каталог пожарных роботов. RoboTrens. URL: <https://robotrends.ru/robopedia/katalog-pozharnyh-robotov> (дата обращения: 16.03.2022).
10. **Рыжков Е.** Марсоходы прошлого, настоящего и будущего. URL: <https://novosti-kosmonavтики.ru/articles/75355.html> (дата обращения: 16.03.2022).
11. **Social Robotics.** Proc. of 13th International Conference, ICSR 2021. Singapur, 10–13 Nov. 2021. Springer International Publishing. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-90525-5> (дата обращения: 16.03.2022).
12. **Electric** wheel chair / EVER Monaco 2006 fair for mobility with renewable energy. Fair report part 1: general and special vehicles. URL: <https://car.pege.org/2006-ever-monaco/wheel-chair.htm>.
13. **Campion G., Bastin G., D'Andrea-Novel B.** Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots // IEEE Transactions on robotics and automation. 1996. Vol. 12, N. 1. P. 47–62.
14. **Grabowiecki J.** Vehicle Wheel. USPatent 1103535. Patented June, 1919.
15. **Blumrith J. F.** USPatent 3789947. Int. cl. B60b 19/12. Omnidirectional wheel. Issued 1974-02-05.
16. **McKinnon P. R.** USPatent № 8556289. Oct. 15, 2013. URL: <https://patentimages.storage.googleapis.com/3e/64/f9/8b93a5202becad/US8556279.pdf>.
17. **Малышенко А. М.** Маневренность управляемых динамических систем и ее квалиметрия // Мехатроника, автоматизация и управление. 2005. № 5. С. 2–6. URL: <http://novtex.ru/mech/mech2005/annot05.htm> (дата обращения: 16.03.2022).
18. **Bradbury H. M.** Omni-Direktional Transport Device. USPatent No. 4 223753, 1980. URL: <https://patents.google.com/patent/US4223753A/en>.
19. **Ilon B. E.** Wheels for a course stable selfpropelling vehicle movable in any desired direction of the ground or some other base. USPatent 3876255, B60b 19/00. Issued 1975-04-08.
20. **Diegel O., Badve A., Potgieter J., Tlale S.** Improved Mecanum Wheel Design for Omni-directional Robots // Proc. 2002 Australasian Conference on Robotics and Automation. Anckland, 27–29 November 2002. P. 117–121. URL: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?jsessionid=35B5E34901A0B49C9A5B7F75CBFAECD7?doi=10.1.1.227.5044&rep=rep1&type=pdf>.
21. **Антонов А.** Типы колес мобильных роботов // Роботоша. Ноябрь 27, 2014. URL: <http://robotosha.ru/robotics/wheel-types-mobile-robots.html> (дата обращения: 16.03.2022).
22. **Шиманчук Д. В.** Теоретическая механика. Кинематика системы тел (манипулятора). СПб.: Изд. Санкт-Петербур. гос. ун-в., 2020. 167 с. URL: http://www.apmath.spbu.ru/staff/shimanchuk/files/g_kinematics_rbsystem.pdf (дата обращения: 16.03.2022).
23. **Handbook of robotics.** Siciliano B., Khatib O. (Editors). Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. 1611 p.
24. **Siciliano B., Sciavicco L., Villani L., Oriolo G.** Robotics: Modelling, Planning and Control. Springer, 2009. 632 p.
25. **John J. Uicker Jr., Pennock G. R., Shigley J. E.** Theory of Machines and Mechanisms (McGraw-Hill series in mechanical engineering). Oxford University Press, USA. 2016. 976 p.
26. **Стрейт В.** Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления. М.: Наука, 1986.

Input-Output Force-Torque Mappings for the Chassis of Robocars with Three Ilon's Wheels

A. M. Malysenko, mam@tpu.ru,

National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, 634050, Russian Federation

Corresponding author: **Malysenko Aleksandr M.**, Dr. Tech. Sc., Professor,
National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, 634050, Russian Federation, e-mail: mam@tpu.ru

Accepted on May 11, 2022

Abstract

The current stage of development of robotics is increasingly focused on the research, development, production and operation of mobile robots. Their diversity in terms of functional purpose, operating environment (ground, subterranean, subaquatic, aerial, space), according to the requirements for technical, economic and operational characteristics objectively generates a broad variety of such robots. The types of kinematic schemes, propellers and their drives used in mobile robots are also important factors determining their existing and future fleet. The prospects for the implementation and achievement of the aforementioned characteristics in wheeled automatic vehicles (robocars), which constitute a substantial part of modern mobile robots, depend largely on the design of their chassis, and, first of all, on the number and type of wheels used and their relative position on the chassis. Therefore, when choosing a design option for the chassis, the development of robocars involves their multidimensional analysis, based on a comparison of various potentially applicable circuit

solutions. The paper contains mathematical descriptions of input-output force-torque mappings (connections) of the shaft torques of the Ilon's wheels that ensure the motion of robocars along a horizontal plane. The proposed descriptions can be used for comparative analysis and selection of circuit solutions for the chassis of robocars. Such descriptions are specified and analyzed for four variants of kinematic designs of the chassis of robocars with three Ilon's wheels (Mecanum wheels, Swedish wheels). They are determined for all possible directions of torques applied to the wheels of such robocars, as well as for those cases when no torque is applied to one of these wheels. Thus, the author describes and analyzes the operation modes of such robocars using all three or any two wheels to ensure the forces and torques applied to the chassis of the robocars necessary for their movement. Additionally, the article contains the estimates of the structures of the input-output force-torque mappings for the selected four variants of kinematic designs of the chassis of robocars with three Ilon's wheels. The influence of their internal input-output cross couplings on the implementation of control algorithms for such robocars is also estimated, as well as the relationship in their controlled variables, maneuverability, controllability and reachability. The author describes a variant of the algorithm for solving the inverse force-torque problems for the chassis in the aforementioned design, and also indicates the preferability for the use of such robocars in the implementation of typical control problems including finite, terminal control, servo and software.

Keywords: robocar, chassis, Ilon's wheels, input-output mappings, direct and inverse force-torque chassis problems, maneuverability, controllability, reachability, control algorithms

For citation:

Malysenko A. M. Input-Output Force-Torque Mappings for the Chassis of Robocars with Three Ilon's Wheels, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 9, pp. 486—495.

DOI: 10.17587/mau.23.486-495

References

1. **Handbook** of Industrial Robotics, Moscow, Mashinostroyeniye, 1989 (in Russian), available at: <https://www.ozon.ru/product/spravochnik-po-promyshlennoy-robototekhnike-komplekt-iz-2-knig-143469116/?sh=mZHEdV5W7w>
2. **Moritts L.** Trends in the development of mobile robots, *Control Engineering Russia*, 2020, no. 4 (88), pp. 56—58 (in Russian), available at: <https://controleng.ru/wp-content/uploads/56-1.pdf>.
3. **Automatically** controlled vehicles // *Sklad & Technika*, no. 3, 2006. 24.08.20 (in Russian), available at: <https://sitmag.ru/article/26752-tri-ubeditelnyh-varianta-dlya-avtomatizatsii-proizvodstvennogo-protssesa>.
4. **Davydov V. V.** 20 ideas for the development of Russia. Part 16. Unmanned vehicles (in Russian), available at: <https://20idei.ru/ru/ideas/16>.
5. **Space** robots / Site'Kid.ru. Online Encyclopedia (in Russian), available at: https://sitekid.ru/izobretenija_i_tekhnika/roboty/kosmicheskie_roboty.html.
6. **Boyko A.** Catalog of autonomous agricultural robots for work in the field, in the garden or greenhouse, *Robotrends* (in Russian), available at: https://sitekid.ru/izobreteniya_i_tekhnika/roboty/kosmicheskie_roboty.html.
7. **Povnyiy A.** Household robots — an overview of robots for various purposes, *online journal "Electric Info"*, 25 oct. 2016 (in Russian), available at: <http://elektrik.info/obzor/1182-bytovye-roboty-obzor-robotov-razlichnogo-naznacheniya.html>.
8. **Automatic** supply vehicles for soldiers on the battlefield (in Russian), available at: http://www.army-guide.com/rus/article/article_1573.html.
9. **Boyko A.** Catalog of fire-fighting robots / *RoboTrends* (in Russian), available at: <https://robotrends.ru/roboedia/katalog-pozharnyh-robotov>.
10. **Ryzhkov E.** Mars rovers of the past, present and future (in Russian), available at: <https://novosti-kosmonavтики.ru/articles/75355.html>.
11. **Social** Robotics. *Proc. of 13th International Conference, ICSR 2021*, Singapur, 10—13 Nov. 2021, Springer International Publishing, available at: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-90525-5>.
12. **Electric** wheel chair / EVER Monaco 2006 fair for mobility with renewable energy. Fair report part I: general and special vehicles, available at: <https://car.pege.org/2006-ever-monaco/wheel-chair.htm>.
13. **Campion G., Bastin G., D'Andrea-Novel B.** Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of

wheeled mobile robots, *IEEE Transactions on robotics and automation*, 1996, vol. 12, no. 1, pp. 47—62.

14. **Grabowiecki J.** Vehicle Wheel. USPatent 1103535. Patented June, 1919.

15. **Blumrith J. F.** USPatent 3789947. Int. Cl. B60b 19.003. Omnidirectional wheel. Issued 1974-02-05.

16. **McKinnon P. R.** USPatent № 8556289. Oct. 15, 2013, available at: <https://patentimages.storage.googleapis.com/3e/64/f9/8b93a5202becad/US8556279.pdf>.

17. **Malysenko A. M.** Maneuverability of controlled dynamical systems and its qualimetry, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2005, no. 5, pp. 2—6 (in Russian), available at: <http://novtex.ru/mech/mech2005/annot05.htm>.

18. **Bradbury H. M.** Omni-Direktional Transport Device. USPatent No. 4 223753, 1980, available at: <https://patents.google.com/patent/US4223753A/en>

19. **Ilon B. E.** Wheels for a course stable selfpropelling vehicle movable in any desired direction of the ground or some other base. USPatent 3876255, B60b 19/00. Apr. 8, 1975.

20. **Diegel O.** Apama Badve, Johan Potgieter, Selvester Tlale. Improved Mecanum Wheel Design for Omni-directional Robots, *Proc. 2002 Australasian Conference on Robotics and Automation*, Auckland, 27—29 November 2002, pp. 117—121, available at: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?sessionid=35B5E34901A0B49C9A5B7F75CBFAECD7?doi=10.1.1.227.5044&rep=rep1&type=pdf>.

21. **Antonov A.** Wheel types of mobile robots Robotosha, 2004, Nov. 27 (in Russian), 2004, available at: <http://robotosha.ru/robotics/wheel-types-mobile-robots.html>.

22. **Shimanchuk D. V.** Theoretical mechanics. Kinematics of the system of bodies (manipulator). SPb.: Sankt-Petersburg state university, 2020 (in Russian), available at: http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/shimanchuk/files/g_kinematics_rbsystem.pdf.

23. **Handbook** of robotics. Sciliano B., Khatib O. (Editors), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008, 1611 p.

24. **Sciliano B., Sciacivico L., Villani L., Oriolo G.** Robotics: Modelling, Planning and Control, Springer, 2009, 632 p.

25. **John J. Uicker Jr., Pennock G. R., Shigley J. E.** Theory of Machines and Mechanisms (McGraw-Hill series in mechanical engineering), Oxford University Press, USA, 2016, 976 p.

26. **Streits V.** The state space method in the theory of discrete linear control systems. Moscow, Nauka, 1986 (in Russian), available at: https://www.studmed.ru/streyc-v-metod-prostranstva-sostoyaniy-v-teorii-diskretnykh-lineynykh-sistem-upravleniya_a222690b497.html.