

С. А. Дубовик<sup>1</sup>, д-р техн. наук, проф., duboviksa@gmail.com,  
А. А. Кабанов<sup>1, 2</sup>, канд. техн. наук, доц., kabanovaleksey@gmail.com,  
<sup>1</sup> Севастопольский государственный университет, г. Севастополь,  
<sup>2</sup> ФИЦ "Информатика и управление" РАН, г. Москва

## Асимптотический метод прогнозирования рисков в задачах стохастического контроля и управления\*

*Рассмотрена проблема стабилизации состояния равновесия в нелинейной системе в присутствии шумов, для чего недостаточно решить локальную задачу стабилизации, а необходимо также обеспечить непрерывный мониторинг возможного события перехода в критическое состояние, ведущее к отказу системы. Для организации такого мониторинга мы используем принцип больших уклонений в применении к динамическим системам с малыми возмущениями. Для целей мониторинга имеет значение оптимальный путь, который назван нами А-профилем критического состояния. А-профиль используется для построения ситуационного прогноза в задаче управления рисками многоагентной системы. Кроме нелинейного механизма внутренней стабилизации уровня  $h$  для каждого из агентов существуют силы взаимодействия среднего поля между агентами. Слабый предел в этой модели с числом агентов, стремящимся к бесконечности, описывается уравнением Фокера—Планка—Колмогорова, но использование приближения с точностью до  $O(h^2)$  приводит к конечномерной схеме Вентцеля—Фрейдлина. Согласно этой схеме мы получаем в явном виде А-профиль как решение вырожденного уравнения Абеля второго рода. В то же время аппроксимация по  $h$  позволяет разработать метод последовательных приближений для построения А-профиля. В настоящей работе А-профиль синтезируется в результате решения задачи оптимального управления с обратной связью, где используется метод уравнения Риккати, зависящего от состояния, и метод аппроксимирующей последовательности уравнений Риккати. Каждый из этих методов имеет свои преимущества и недостатки. В статье эти методы применяются и сравниваются в рамках задачи управления рисками.*

**Ключевые слова:** большие уклонения, ситуационный прогноз, стохастическая система, прогнозирование риска

### Введение

Настоящая работа посвящена эффективности управления в системах, длительно функционирующих в условиях возмущений. Впервые эта проблема обозначилась, по-видимому, в задачах управления подвижными объектами приблизительно в 60—70-х годах прошлого столетия и, что важно, уже после появления и освоения в приложениях результатов Р. Калмана по стохастическому линейно-квадратическому управлению. Иными словами, дело оказалось не столько в наличии шума как такового, сколько в том, что разработанных к тому времени средств борьбы с этим оказалось явно недостаточно: при длительном функционировании шумы и малые неучтенные факторы модели могли приводить к нештатному поведению объекта.

\*Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 21-11-00202).

Среди первых альтернативных подходов можно отметить ситуационное управление [1], которое, впрочем, так и не получило распространения в практике управления динамическими системами. Тем не менее, идея последовательного прогнозирования и управления была воспринята и затем воплощена в схеме управления с прогнозирующей моделью (Model predictive Control, MPC-управление). Вместе с тем, в MPC трудно установить связь с критическими состояниями (КС), описывающими редкие отклонения от штатного поведения в динамических системах, которые и составляют основную проблему неучтенного действия шума.

В данной статье предполагается процедуру последовательного анализа соединить с принципом больших уклонений (БУ), который дает адекватный стохастический аппарат для контроля КС [2—4]. Согласно этому подходу ситуации управления представляются в виде условий принадлежности выходных координат объекта некоторым заданным подмножествам (эксплуа-

тационными областями) пространства состояний. При этом задача сводится к прогнозированию событий выхода координат на границы указанных областей (критических состояний), а проблема выхода из области — это задача анализа БУ [2], которая решается методами оптимального управления (задача Лагранжа). Каждая задача Лагранжа, связанная с определенным КС в качестве конечного условия и начальной точкой в текущем состоянии, имеет решением экстремаль, названную профилем КС. В том случае, когда система стабилизирована, можно говорить о некотором профиле, ведущем из аттрактора. Такой профиль, ведущий из аттрактора в КС, назовем *A-профилем* [4]. На основе вычисления *A-профилей* можно реализовать алгоритмы ситуационного управления в реальном времени по измерениям параметров движения системы.

Чтобы понять, как БУ позволяют решить задачу управления в условиях неопределенности, в частности ситуационного управления, целесообразно ввести конструкцию ситуационного прогноза, что мы и сделаем в разделе 1 данной статьи. Но уже здесь приведем некоторые наводящие соображения.

Обозначим знаком приблизительного равенства  $X \cong x$  для случайной величины  $X$  со значениями  $x$  эквивалент включению  $X \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ . Для случайной последовательности  $\{\xi_k(t_k)\} = \{\xi_k\}$ , полагая  $\xi_k$  независимыми, введем счетное разбиение вещественной оси  $R_+ = \bigcup_{i=0}^{\infty} [i\tau, (i+1)\tau]$  на отрезки длиной  $\tau$  (шаги). Тогда выход процесса  $\xi(t)$  на критические значения (например, выход из области  $D$ ) обнаруживается в виде последовательности  $\{x_j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , (единственной с точностью до  $\varepsilon$ ) и соответствующих вероятностей  $p_j = P(\xi_j \cong x_j)$  таких, что для любого  $k$ ,  $0 \leq k \leq N$ , вероятность кризиса через  $N - k$  шагов равна  $P_{k,N} = \prod_{j=k}^N p_j$ . Тем самым обеспечивается возможность мониторинга ситуации с вероятным переходом из штатного режима в кризисный по *A-профилю*  $\{x_j\}$ .

Развитие методов определения *A-профилей* является одной из задач, решение которой необходимо для реализации ситуационного управления на основе анализа БУ. Для линейных задач и стабилизированных систем *A-профиль* оказывается асимптотой для всех профилей КС точно так же, как все решения невозмущенной системы сходятся к аттрактору. Соответствующие оценки

были получены для линейных систем в работах [5, 6]. Вопросы разработки методов анализа БУ для нелинейных систем на основе решения соответствующих задач оптимального управления рассматривались в работах [7–9].

Нелинейные задачи оптимального управления из-за присущей им сложности часто решаются в рамках упрощенных схем, где выполняется некоторая форма приближения. Примером таких приближенных методов являются метод уравнения Риккати, зависящего от состояния, (SDRE) [10, 11] и метод аппроксимирующей последовательности уравнений Риккати (ASRE) [11, 12]. Каждый из этих методов имеет преимущества и недостатки, а их применимость зависит от различных факторов, таких как сложность реализации, производительность и оптимальность. В настоящей работе эти методы используются для вычисления *A-профиля*.

Один из типичных примеров — миссия беспилотного аппарата, которая может быть связана с выполнением совокупности операций по мере движения вдоль заранее заданного или выбираемого в процессе движения маршрута, когда подобная процедура мониторинга позволяет контролировать штатное прохождение всех этапов движения и, тем самым, повышать надежность миссии. Примеры такого рода можно найти в работах [5–7].

Вместе с тем, рассматриваемая проблематика актуальна также для приложений совсем иного рода, когда нужно прогнозировать риски в системах с коллективной динамикой. Это направление берет свое начало от статьи [13], и сеть финансовых агентов [14] является одним из его характерных и популярных примеров. Настоящая работа прежде всего ориентирована на задачи именно такого типа, когда нужно искать компромисс между индивидуальным и коллективным рисками. В разделе 2 рассматривается задача управления рисками в коллективных системах. Для нас она интересна и как тестовый пример в последующих разработках, связанных с задачей управления рисками и БУ. Приводятся результаты асимптотического анализа задачи БУ, явные решения для *A-профиля*, а также численные решения на основе методов SDRE и ASRE. Кроме указанных методов для вычисления *A-профиля* также используется предложенный авторами модифицированный алгоритм SDRE на основе двухэтапной процедуры.

# 1. Ситуационный прогноз в стохастических системах

Рассмотрим стохастическую систему для  $\mathbf{X}^\varepsilon(t) \in R^n$ :

$$\dot{\mathbf{X}}^\varepsilon = \mathbf{a}(\mathbf{X}^\varepsilon) + \varepsilon \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}^\varepsilon) \dot{\mathbf{w}}, \mathbf{X}^\varepsilon(t_0) = \mathbf{x} \in D, \quad (1)$$

где  $\dot{\mathbf{w}}$  —  $k$ -вектор "белого шума";  $\mathbf{a}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  — гладкие матричные функции;  $\varepsilon > 0$  — малый параметр. Будем считать, что невозмущенная система (получается из (1) при  $\varepsilon = 0$ ):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}), \quad (2)$$

имеет в области  $D$  единственный аттрактор  $\chi = 0$ . Система (2), таким образом, приближенно описывает некоторый штатный процесс стабилизации в системе (1), соответствующий "типовому" поведению возмущений. И это может быть достаточным, если указанный процесс жестко ограничен по времени. В противном случае оказывается возможным некоторое критическое событие, связанное с выходом  $\mathbf{X}^\varepsilon(t)$  на границу  $\partial D$  области  $D$ . Устранение такой возможности требует организации прогноза, обеспечивающего достаточное для антикризисного маневра время. Представим это в виде последовательности задач выбора между двумя гипотезами:  $H_0 = H_0(t, t_f)$  — штатное и  $H_1 = H_1(t, t_f)$  — критическое развитие процесса от момента  $t$ , в который делается прогноз, до момента  $t_f$  — горизонта прогноза,  $t < t_f$ .

Чтобы описать процедуру прогнозирования детально, необходимо ввести ряд величин и соотношений, которые проиллюстрируем рис. 1

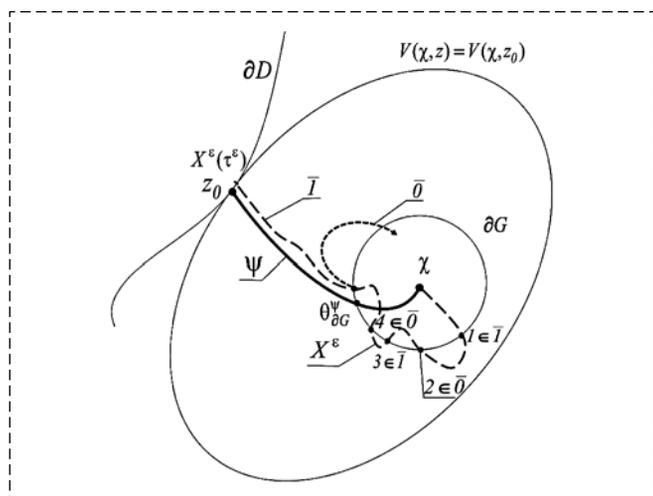


Рис. 1. К определению ситуационного прогноза  
Fig. 1. To the definition of a situational forecast

для одномерного случая. Заметим, что почти все элементы этого описания можно найти в одном из результатов работы [2] (гл. 4, теорема 2.3).

Пусть  $G$  — окрестность аттрактора  $\chi = 0$ , имеющая гладкую границу  $\partial G$ , и задана непрерывная кривая  $\psi(t)$ , ведущая из  $\chi$  до границы  $\partial D$  и далее во внутренность  $R^n \setminus D$ , причем граница  $\partial D$  достигается в момент  $t = t_f$ . Ясно, что отрезок кривой  $\psi(t)$  от  $\chi$  до границы  $\partial D$  определен на  $(-\infty, t_f]$ . Кривая  $\psi(t)$  обязательно пересечет  $\partial G$  хотя бы в одной точке. Обозначим  $\theta_{\partial G} \in (-\infty, t_f]$  — последний из этих моментов:

$$\theta_{\partial G}(\psi) = \sup_{-\infty < t \leq t_f} \{t : \psi(t) \in \partial G\}, \quad (3)$$

причем будем считать, что  $\psi(t)$  выходит из  $G$  неособым образом, если существует  $\alpha > 0$  такое, что  $\psi(t)$  принимает значения внутри  $G$  при  $t \in [\theta_{\partial G}(\psi) - \alpha, \theta_{\partial G}(\psi)]$ .

Возвращаясь к (1), по аналогии с (3) обозначим последний момент пребывания траектории  $\mathbf{X}^\varepsilon(t)$  на  $\partial G$ :

$$\theta_{\partial G}^\varepsilon = \theta_{\partial G}^\varepsilon(\mathbf{X}^\varepsilon) = \max\{t < \tau^\varepsilon : \mathbf{X}^\varepsilon(t) \in \partial G\}, \quad (4)$$

где  $\tau^\varepsilon = \inf\{t : \mathbf{X}^\varepsilon(t) \in \partial D\}$  — момент первого выхода  $\mathbf{X}^\varepsilon(t)$  на границу  $\partial D$ . Принимая во внимание, что моменты (3) и (4) необходимо привести к одной шкале времени, например к независимой переменной (1), нужно определить  $\psi(t)$  со сдвигом по времени:

$$\vartheta_{\partial G}^\varepsilon = \theta_{\partial G}^\varepsilon - \theta_{\partial G}(\psi). \quad (5)$$

Под ситуационным прогнозом (СП) для системы (1) будем понимать возможность формирования кривой  $\psi(t)$  с представленными свойствами, обеспечивающей  $\forall \delta > 0$  и  $\mathbf{x} \in D$  асимптотическое равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_x \{ \max_{\theta_{\partial G}^\varepsilon \leq t \leq \tau^\varepsilon} |\mathbf{X}^\varepsilon(t) - \psi(t - \vartheta_{\partial G}^\varepsilon)| < \delta \} = 1, \quad (6)$$

где  $P_x$  — вероятностная мера на траекториях (1), исходящих из  $\mathbf{x} \in D$ .

Упомянутая выше теорема из работы [2] дает решение задачи СП в виде единственного образа квазипотенциала [7]. Для того чтобы привести это решение здесь, наряду с уравнениями (1), (2) стохастической и невозмущенной систем приведем детерминированное (и возмущенное, т. е. неоднородное) уравнение системы путей:

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{a}(\boldsymbol{\varphi}) + \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varphi})\mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{x}, \quad (7)$$

где  $\boldsymbol{\varphi} \in R^n$  — вектор состояния системы путей;  $\mathbf{v}$  — суммируемая функция, для которой в (2) определен функционал действия [2–4] (ФД)

$$S_{t_0 t_f}(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{v}^\top \mathbf{v} dt, \quad (8)$$

конечный для абсолютно непрерывных  $\boldsymbol{\varphi}$  на  $[t_0, t_f]$ . Границу  $\partial G$  представим соотношением

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}(t_f) - \mathbf{y} = 0, \quad (9)$$

где  $\mathbf{y} \in R^r$ ,  $r \leq n$ ,  $\mathbf{C}$  — матрица полного ранга.

Вероятностный смысл задачи на минимум (8) при ограничениях (7), (9) (задача БУ (7)–(9)) и ее связь с диффузионным процессом (1) заключены в *принципе больших уклонений* [2–4]:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln P\{\mathbf{X}^\varepsilon(t) \in R^n \setminus D\} = \\ = -\min_{\boldsymbol{\varphi} \in F} S_{t_0 t_f}(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v}) = -\widehat{S}_{t_0 t_f}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$F = \{\boldsymbol{\varphi} \in C_{t_0 t_f}(R^n) : \boldsymbol{\varphi}_{t_0} \in D, \boldsymbol{\varphi}_{t_f} \in R^n \setminus D\}.$$

Существенную роль в задаче выхода из области играет квазипотенциал [2] системы (7) относительно аттрактора (2), определяемый как

$$V(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{x}) = \inf\{S_{t_0 t_f}(\boldsymbol{\varphi}) : \boldsymbol{\varphi} \in C_{t_0 t_f}(R^n) : \boldsymbol{\varphi}_{t_0} = \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\varphi}_{t_f} = \mathbf{x}\}.$$

Квазипотенциал позволяет локализовать окрестность на  $\partial D$  (рис. 1), где с вероятностью, стремящейся к единице при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , происходит выход траектории  $\mathbf{X}^\varepsilon(t)$  из области  $D$ : в работе [2] (гл. 4, теорема 2.1) показано, что если существует единственная точка  $\mathbf{z}_0 \in \partial D$ , для которой

$$V(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{z}_0) = \min_{\mathbf{z} \in \partial D} V(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{z}),$$

то  $\forall \delta > 0$  и  $\mathbf{x} \in D$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_{\mathbf{x}}\{|\mathbf{X}^\varepsilon(\tau^\varepsilon) - \mathbf{z}_0| < \delta\} = 1. \quad (11)$$

Квазипотенциал  $V(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{x}) = V_{\boldsymbol{\chi}}(\mathbf{x})$  есть отображение

$$V_{\boldsymbol{\chi}} : C_{t_0 t_f}(R^n) \rightarrow R_+,$$

связанное с задачей (7)–(9), причем прообраз  $V(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{z}_0)$  (А-профиль (7), (9) [4]) существует только при  $t_0 = -\infty$ ; обозначим его  $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}$ . Этот А-профиль  $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}$ , ведущий от  $\boldsymbol{\chi}$  до  $\mathbf{z}_0$ , и только он, может быть использован в СП в качестве кривой  $\psi$ .

Если на рис. 1 положить  $t = \theta_{\partial G}(\psi)$  после совмещения моментов пересечения  $\partial G$  траекториями  $\psi(s) = \widehat{\boldsymbol{\varphi}}(s)$  и  $\mathbf{X}^\varepsilon(s)$  подходящим сдвигом (5) по времени, то этим рисунком можно проиллюстрировать процедуру выбора в момент  $s = t$  между гипотезами  $H_0 = H_0(t, t_f)$  и  $H_1 = H_1(t, t_f)$ : сообразуясь с рис. 1, для  $\mathbf{X}^\varepsilon$  в момент  $t = \theta_{\partial G}(\widehat{\boldsymbol{\varphi}})$  возможен выбор между  $H_1 = \bar{1}$  — критическое событие выхода траектории  $\mathbf{X}^\varepsilon$  на  $\partial D$  (и тогда  $\theta_{\partial G}^\varepsilon$  — действительно последний момент пребывания траектории  $\mathbf{X}^\varepsilon(t)$  на  $\partial G$ ) и  $H_0 = \bar{0}$  — возврат траектории  $\mathbf{X}^\varepsilon$  внутрь  $G$ , т. е. к штатному режиму движения (и тогда последний момент пребывания траектории  $\mathbf{X}^\varepsilon(t)$  на  $\partial G$  не достигнут к моменту  $s = t$ , но возможен при  $s > t$ ).

*Замечание 1.* Из (6) при  $\psi(s) = \widehat{\boldsymbol{\varphi}}(s)$  и (10) следует, что

$$P\{\mathbf{X}^\varepsilon(t) \in R^n \setminus D\} \cong e^{-\widehat{S}_{t_f}/\varepsilon^2}. \quad (12)$$

*Замечание 2.* Так же, как и в обычной задаче проверки статистических гипотез, в задаче СП можно вводить ошибки первого рода  $\alpha = P(H_1/H_0)$  ("вероятность ложной тревоги") и второго рода  $\beta = P(H_0/H_1)$ . Мы этого делать не будем. Особенность задачи СП состоит в том, что важнее иметь зависимость вероятности (12) от времени, чтобы при ее росте, превышающем некоторый порог, оперативно откорректировать процесс. Именно эту информацию дает А-профиль КС, вдоль которого для (12) имеем

$$\widehat{S}_{t_f} = V(0, \widehat{\boldsymbol{\varphi}}(t)) - V(0, \mathbf{z}_0). \quad (13)$$

*Замечание 3.* Характеристическое свойство А-профиля состоит в том, что вероятность ложной тревоги  $\alpha$  входит в число возможных параметризаций  $\psi(s)$ , т. е. существует такая функция  $\widetilde{\Psi}(s)$ , что  $\boldsymbol{\psi}(s) = \widetilde{\Psi}(\alpha)$ .

Учитывая особую роль А-профиля, важно отметить те случаи, когда его вычисление существенно упрощается. Одна такая возможность появляется при линейности (1), а значит и (7). Не останавливаясь на этом, укажем только на работы [4, 6, 7].

Другой случай упрощения возникает при  $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{\sigma}$  и разложении для векторного поля  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ ,

в котором основным элементом является потенциальная компонента [2] (гл. 4, теорема 3.1). Именно такой случай, именуемый здесь потенциальным, рассматривается далее; изложение опирается на работу [14], но нас интересует, в первую очередь, возможность мониторинга ситуации в реальном времени исходя из СП. В связи с этим мы также рассматриваем различные варианты построения А-профиля.

## 2. Задача управления рисками в коллективных системах

Пусть  $x_j(t)$  — состояние риска  $j$ -го агента,  $x_j \in R$  удовлетворяет уравнению

$$dx_j(t) = -h\nabla U(x_j(t))dt + \theta(\bar{x}(t) - x_j(t))dt + \sigma dw_j, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (14)$$

Здесь  $-h\nabla U(x_j(t))$  — восстанавливающая сила;  $U(y) = y^4/4 - y^2/2$  — потенциал, имеющий два стабильных состояния  $y_s = \pm 1$ ;  $w_j(t)$  — независимые "белые шумы"; коэффициенты:  $h$  — внутренней стабилизации,  $\theta$  — кооперации (скорости возврата к среднему),  $\sigma$  — внешних возмущений;  $\bar{x}(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j(t)$  — эмпирическое среднее.

Пусть  $M_1(R)$  — пространство вероятностных мер, наделенное слабой топологией, и пусть  $C([0, t_f], M_1(R))$  — пространство непрерывных  $M_1(R)$ -значных процессов на  $[0, t_f]$  с соответствующей слабой топологией. Определим процесс эмпирической вероятностной меры

$$X_N(t, dy) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{x_j(t)}(dy)$$

принадлежащей  $C([0, t_f], M_1(R))$ .

В наших предположениях для (14), дополненных условием слабой сходимости  $X_N(0, \cdot)$  к вероятностной мере  $\nu_0$ , имеет место теорема Доусона [13, 14], утверждающая при этом слабую сходимость  $X_N$  по распределению к процессу с плотностью  $u(t, y)dy \in C([0, t_f], M_1(R))$ , которая является единственным слабым решением уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова

$$u_t = L_u^* u + hM^* u, \quad (15)$$

где в записи правой части использованы операторы

$$L_u^* = \frac{1}{2} \sigma^2 \varphi_{yy} + \theta \frac{\partial}{\partial y} \{ [y - \int y \psi(t, y) dy] \},$$

$$M^* = \frac{\partial}{\partial y} [\nabla U(y) \varphi].$$

Явных решений уравнения (15) нет, но можно искать установившиеся, равновесные решения. Предполагая, что

$$\xi = \lim_{t \rightarrow \infty} \int y u(t, y) dy,$$

для равновесного решения  $u_\xi^e$  имеем из (15):

$$h \frac{d}{dy} [(y^3 - y) u_\xi^e] - \theta \frac{d}{dy} [(\xi - y) u_\xi^e] + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{d^2}{dy^2} u_\xi^e = 0$$

и для самого решения ( $Z_\xi$  — константа нормализации)

$$u_\xi^e(y) = \frac{1}{Z_\xi \sqrt{\pi \sigma^2 / \theta}} e^{-\frac{(y-\xi)^2}{\sigma^2/\theta} - 2hU(y)/\sigma^2}. \quad (16)$$

Теперь  $\xi$  должно удовлетворять условию совместимости

$$\xi = m(\xi) = \int y u_\xi^e(y) dy. \quad (17)$$

Для выбранного здесь потенциала, как и в работе [14], и в соответствии с результатами работы [13] кроме нулевого существуют еще два решения (17)  $\pm \xi_b$ , если и только если имеет место неравенство

$$m_\xi(0) = \left. \frac{dm(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0} > 1,$$

а для заданных  $h$  и  $\theta$  существует критическая величина  $\sigma_c(h, \theta) > 0$  такая, что  $m_\xi(0) > 1$  тогда и только тогда, когда  $\sigma < \sigma_c(h, \theta)$ .

Объяснение этой бифуркации аттрактора [14] в том, что при  $\sigma \leq \sigma_c$  внешняя случайность доминирует во взаимодействии компонентов системы, т. е.  $\theta(\bar{x}(t) - x_j(t))$  пренебрежимо мала. В этом случае система ведет себя как  $N$  независимых диффузий и, следовательно, по причине симметрии  $U(y)$  примерно поровну разделяются их группировки в окрестностях  $-1$  и  $+1$ , что дает для среднего близкое к нулю значение. Если же  $\sigma < \sigma_c$  то сила кооперативного взаимодействия существенно больше, а  $\sigma dw_j$  менее важна. Следовательно, все агенты группируются в одном и том же месте (в  $-\xi_b$  или в  $+\xi_b$ ), и равновесие с нулевым средним нестабильно.

**Вывод:** для моделирования явлений системного риска на базе (14) нужно полагать  $\sigma < \sigma_c$ , рассматривая  $-\xi_b$  как нормальное состояние ("штатно"), а  $+\xi_b$  — как "отказ" ("кризис").

Принцип БУ позволяет оценивать вероятности переходов между этими двумя состояниями [14, 15]: учитывая конечный временной горизонт  $[0, t_f]$  и условия существования двух равновесий, будем оценивать вероятность

$$P_{0t_f} = P[\bar{x}(0) = -\xi_b, \bar{x}(t_f) = \xi_b] \quad (18)$$

при большом  $N$  и как функцию параметров  $(h, \theta, \sigma)$  в (14).

В работе [14] для этой цели ФД формируется следующим образом:

$$I_h(\varphi) = \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^T \sup_{f: \langle \varphi, f_y^2 \rangle \neq 0} J_h(\varphi, f) dt, \quad (19)$$

где

$$J_h(\varphi, f) = \langle \varphi_t - L_\varphi^* \varphi - hM^* \varphi, f \rangle^2 / \langle \varphi, f_y^2 \rangle, \\ \langle \varphi, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \varphi(dy),$$

если  $\varphi(t)$  абсолютно непрерывна на  $[0, t_f]$  и  $I_h(\varphi) = \infty$  — в противном случае.

### 3. Результаты асимптотического анализа задачи больших уклонений

Если  $\varphi$  — функция плотности, такая что  $\varphi(t, y)$  — гладкая, быстро убывающая по  $y \in R$  для каждого  $t \in [0, t_f]$  и абсолютно непрерывна по  $t \in [0, t_f]$  для каждого  $y \in R$ , тогда пусть  $g(t, y)$  удовлетворяет уравнению

$$\varphi_t - L_\varphi^* \varphi - hM^* \varphi = (\varphi g)_y. \quad (20)$$

В указанном случае ФД (19) упрощается ([14], предложение 5.3):

$$I_h(\varphi) = \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^T \langle \varphi, g^2 \rangle dt.$$

Тем не менее, задача остается нелинейной, бесконечномерной и трудной для анализа. Следуя работе [14] (разделы 6 и 7), воспользуемся ее асимптотическим анализом по малому параметру внутренней стабилизации  $h$ . Сначала приведем решение для  $h = 0$ , когда

$$u_{\pm\xi_b}^e = u_{\pm\xi_0}^e,$$

где

$$u_{\pm\xi_0}^e(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2/\theta}} e^{-\frac{(y - (\pm\xi_0))^2}{\sigma^2/\theta}}, \quad \xi_0 = \sqrt{1 - 3\frac{\sigma^2}{2\theta}}. \quad (21)$$

При  $h > 0$  представим решение в виде

$$\varphi = p + hq^{(1)} + h^2q^{(2)} + \dots, \quad (22)$$

где

$$p(t, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2/\theta}} e^{-\frac{(y-a(t))^2}{\sigma^2/\theta}}, \quad a(t) = \langle \varphi, y \rangle.$$

Ограничиваясь в (22) точностью до  $O(h^2)$ , получим [14] для минимального значения ФД:

$$\inf_{\varphi \in F} I_h(\varphi) \approx \\ \approx \inf_{\substack{a(t): 0 \leq t \leq T \\ a(0) = -\xi_b \\ a(T) = \xi_b}} \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^T \left( \frac{d}{dt} a + h \left( a^3 + 3\frac{\sigma^2}{2\theta} a - a \right) \right)^2 dt,$$

а также в контексте вывода в предыдущем пункте:

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2\theta}{3}} + O(h) \quad (23)$$

для малых  $h$ .

Как определено выше, здесь  $a(t) = \langle \varphi, y \rangle$ , а значит,  $a(t) = \bar{x}(t)$ . Эту вариационную задачу можно представить как задачу БУ (7)–(9) для уравнения (1), которое в данном случае имеет вид

$$\frac{d}{dt} \bar{x}(t) = -h \left[ \bar{x}^3(t) - \left( 1 - \frac{3\sigma^2}{2\theta} \right) \bar{x}(t) \right] + \varepsilon \sigma dw(t). \quad (24)$$

ФД (8) задан на уравнении путей (7), в котором

$$a(\varphi) = -h \left[ \varphi^3 - \left( 1 - \frac{3\sigma^2}{2\theta} \right) \varphi \right], \quad \sigma(\varphi) = \sigma,$$

где компонента  $a(\varphi)$  является потенциальной, а значит, в качестве укороченной задачи БУ (УЗБУ) мы имеем задачу первого порядка (а не второго, как в работе [14]), которую и рассмотрим далее.

#### 4. Потенциальный случай задачи и явные решения для А-профиля

Учитывая (23) и принимая  $\sigma_c = \sqrt{\frac{2\theta}{3}}$ , имеем уравнение путей

$$\dot{\phi} = a(\phi) + \sigma v, \quad (25)$$

где

$$a(\phi) = -h[\phi^3 - \rho^2\phi] = -\nabla U_\rho(\phi), \quad \rho^2 = 1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_c}\right)^2. \quad (26)$$

Так как функция  $a(\phi) = -h[\phi^3 - \rho^2\phi]$  дважды непрерывно дифференцируема, то в силу работы [2] (гл. 4, теорема 3.1) квазипотенциал  $V_\chi(x)$  динамической системы  $\dot{x}_t = a(x_t)$  относительно точки  $\chi$  совпадает с

$$2U_\rho(x) = 2h[x^4/4 - \rho^2x^2/2] = h[x^4/2 - \rho^2x^2]$$

во всех точках  $x \in D \cup \partial D$ , для которых  $U_\rho(x) \leq U_\rho^* = \min_{y \in \partial D} U_\rho(y)$ , а единственная экстремаль функционала (8) на множестве функций, ведущих из  $\chi$  в  $x$ , задается уравнением для А-профиля:

$$\dot{\hat{\phi}}_s = -a(\hat{\phi}_s), \quad s \in (-\infty, T]. \quad (27)$$

Это уравнение Абеля первого рода [16] (с. 21, п. 1.1.84), которое в общем случае имеет вид

$$\dot{y}_s = \psi_3(s)y^3 + \psi_2(s)y^2 + \psi_1(s)y. \quad (28)$$

С учетом этого и (26) в уравнении (27) имеем

$$\psi_1(s) = -h\rho^2, \quad \psi_2(s) = 0, \quad \psi_3(s) = h. \quad (29)$$

Подстановкой  $y = 1/u$  (28) приводится к уравнению Абеля второго рода [16] (п. 1.1.86). В результате, с учетом (29) получим

$$u\dot{y}_s = -\psi_3(s) - \psi_1(s)u^2 = h(\rho^2u^2 - 1). \quad (30)$$

В свою очередь, подставляя

$$u = w/E, \quad E = e^{\int \psi_1 dt} \quad (31)$$

в (30), имеем

$$\begin{aligned} u\dot{y}_s + \psi_1(s)u^2 &= \\ &= we^{-\int \psi_1 dt} \frac{d}{dt} [we^{-\int \psi_1 dt}] + \psi_1(s)u^2 = \\ &= w\dot{w}e^{-2\int \psi_1 dt} - ww e^{-2\int \psi_1 dt} \psi_1 + \psi_1 w^2 e^{-2\int \psi_1 dt} = \\ &= w\dot{w}e^{-2\int \psi_1 dt} = w\dot{w}e^{2h\rho^2 t}. \end{aligned}$$

Поэтому после подстановки (31) в (30) получим для  $w$  уравнение

$$w\dot{w} = -he^{-2h\rho^2 t},$$

или, после интегрирования от  $\tau < 0$  до 0,

$$\begin{aligned} [w^2(0) - w^2(\tau)]/2 &= -h \int_\tau^0 e^{-2h\rho^2 t} dt = \\ &= (1 - e^{-2h\rho^2 \tau})/(2\rho^2), \end{aligned}$$

и, далее,

$$w^2(\tau) = w^2(0) - (1 - e^{-2h\rho^2 \tau})/\rho^2.$$

В силу (31)

$$u(\tau) = \{[w^2(0) - (1 - e^{-2h\rho^2 \tau})/\rho^2]e^{2h\rho^2 \tau}\}^{1/2}$$

или

$$u(\tau) = [(w^2(0) - 1/\rho^2)e^{2h\rho^2 \tau} + 1/\rho^2]^{1/2}.$$

Вспоминая теперь, что  $y = 1/u$ , окончательно получаем явный вид А-профиля:

$$\hat{\phi}(s) = y(s) = [(w^2(0) - 1/\rho^2)e^{2h\rho^2 s} + 1/\rho^2]^{-1/2}. \quad (32)$$

То, что в нашей задаче мы располагаем таким решением, позволяет рассматривать эту задачу управления рисками как хороший тестовый пример для отработки численных решений. Некоторые из этих схем, представленные далее, имеют целью разработку методик ситуационного прогнозирования на базе БУ, в том числе для более сложных задач управления рисками, чем рассмотренная здесь.

#### 5. Численное моделирование для построения А-профиля по схеме обратной связи, вопросы вычислительной устойчивости

Для численного нахождения А-профиля на основе приближенных методов представим систему путей (7) в форме системы с коэффициентами, зависящими от состояния:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \mathbf{A}(\phi)\phi + \mathbf{B}(\phi)v, \quad \phi(t_0) = \phi_0, \\ \mathbf{a}(\phi) &= \mathbf{A}(\phi)\phi, \quad \mathbf{B}(\phi) = \sigma(\phi), \end{aligned} \quad (33)$$

где  $\mathbf{A}(\phi)$ ,  $\mathbf{B}(\phi)$  — матрицы соответствующих размерностей, с коэффициентами, зависящими от состояния.

Соответствующая поиску А-профиля задача оптимального управления на конечном интервале времени с заданным конечным состоянием заключается в минимизации критерия качества

$$J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{v}^T \mathbf{v} dt \quad (34)$$

на движениях системы (33) при условии

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}(t_f) - \mathbf{y} = 0. \quad (35)$$

Решение задачи (33)—(35) методом ASRE состоит из нескольких этапов. Первая итерация состоит в решении задачи 0, определенной в виде:

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(0)} = \mathbf{A}^{(0)}\boldsymbol{\Phi}^{(0)} + \mathbf{B}^{(0)}\mathbf{v}^{(0)}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}^{(0)}(t_f), \quad (36)$$

$$J^{(0)}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{v}^{(0)T} \mathbf{v}^{(0)} dt,$$

где  $\mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\Phi}_0)$ ,  $\mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{B}(\boldsymbol{\Phi}_0)$ .

Задача (36) является линейной, все аргументы матриц заданы и являются постоянными. Решение этой задачи имеет вид

$$\mathbf{v}^{(0)} = -\mathbf{B}^T \mathbf{W}^T \mathbf{C}^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{C} \mathbf{W} \boldsymbol{\Phi}^{(0)} - \mathbf{y}), \quad (37)$$

где

$$\dot{\mathbf{W}} = -\mathbf{W} \mathbf{A}^{(0)}, \quad \mathbf{W}(t_f) = \mathbf{I}, \quad (38)$$

$$\dot{\mathbf{M}} = -\mathbf{C} \mathbf{W} \mathbf{B}^{(0)} (\mathbf{B}^{(0)})^T \mathbf{W}^T \mathbf{C}^T, \quad \mathbf{M}(t_f) = \mathbf{0}. \quad (39)$$

Задача (38), (39) имеет аналитическое решение [8]:

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}^{(0)}(t_f-t)}, \quad \mathbf{M}(t) = \mathbf{C}(\mathbf{W}(t)\mathbf{D}\mathbf{W}^T(t) - \mathbf{D})\mathbf{C}^T, \quad (40)$$

где матрица  $\mathbf{D}$  является решением алгебраического уравнения Ляпунова

$$\mathbf{A}^{(0)}\mathbf{D} + \mathbf{D}(\mathbf{A}^{(0)})^T - \mathbf{B}^{(0)}(\mathbf{B}^{(0)})^T = \mathbf{0}. \quad (41)$$

В общем случае для некоторой итерации  $k$  задача формулируется следующим образом:

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(k)} = \mathbf{A}^{(k)}\boldsymbol{\Phi}^{(k)} + \mathbf{B}^{(k)}\mathbf{v}^{(k)}, \quad (42)$$

$$J^{(k)}(\mathbf{v}^{(k)}) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} ((\mathbf{v}^{(k)})^T \mathbf{v}^{(k)}) dt,$$

$$\mathbf{A}^{(k)} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\Phi}^{(k-1)}), \quad \mathbf{B}^{(k)} = \mathbf{B}(\boldsymbol{\Phi}^{(k-1)}).$$

По сути, (42) — это нестационарная линейная задача (где  $\boldsymbol{\Phi}^{(k-1)}$  и  $\mathbf{v}^{(k-1)}$  являются решениями задачи на шаге  $k - 1$ ). Ее решение имеет вид (37)—(39) с нестационарными матрицами состояния, известными на всем интервале времени, что позволяет выполнить интегрирование этих уравнений справа налево. Решая задачу  $k$ , получим  $\boldsymbol{\Phi}^{(k)}$  и  $\mathbf{v}^{(k)}$ .

Итерации продолжаются до тех пор, пока не будет выполнено условие сходимости. Сходимость достигается путем задания требуемой нормы ошибки между последовательностью решений:

$$\delta = \|\boldsymbol{\Phi}^{(k)}(t) - \boldsymbol{\Phi}^{(k-1)}(t)\| \leq \mu, \quad (43)$$

где  $\mu > 0$  — некоторая константа. В работе [18] показано, что последовательность решений  $\boldsymbol{\Phi}^{(k)}$ ,  $\mathbf{v}^{(k)}$  сходится к решению исходной задачи (1)—(3) при условии, что  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\Phi})$  и  $\mathbf{B}(\boldsymbol{\Phi})$  непрерывны по Липшицу по своим аргументам, пара  $(\mathbf{A}(\boldsymbol{\Phi}), \mathbf{B}(\boldsymbol{\Phi}))$  поточечно управляема  $\forall \boldsymbol{\Phi}(t), t \in [t_0, t_f]$ .

Результат моделирования А-профиля на основе решения методом ASRE показано на рис. 2. Здесь представлено пять итераций метода, видно, как решение сходится к оптимальному (явное решение (32)).

Решение задачи (33)—(35) в форме обратной связи на основе метода SDRE можно записать в виде (37)—(39) с соответствующей заменой матриц на  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\Phi})$ ,  $\mathbf{B}(\boldsymbol{\Phi})$  [8]. При этом для вычисления оптимального управления (37) необходимо выполнить интегрирование в обратном времени уравнений (38) и (39). Основная трудность при этом заключается в том, что значе-

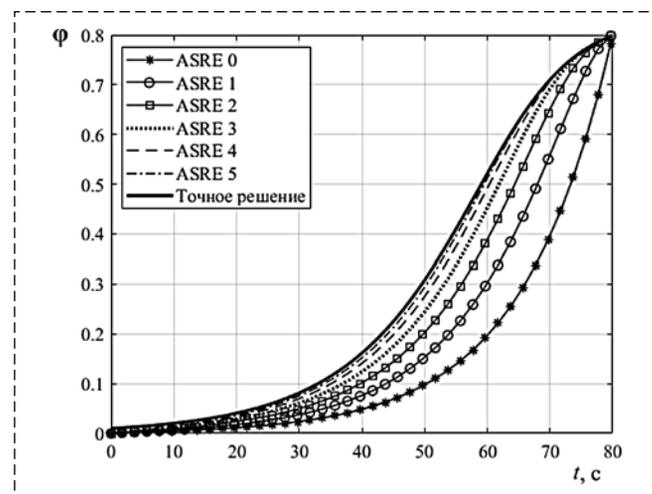


Рис. 2. Результат моделирования для метода ASRE  
Fig. 2. Simulation result for the ASRE method

ния матриц  $\mathbf{A}(\varphi)$ ,  $\mathbf{B}(\varphi)$  системы (33) неизвестны при интегрировании справа налево. Общепринятым здесь подходом стало применение гипотезы "замороженных" коэффициентов [17] и фиксации значений  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}(\varphi)$ ,  $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}(\varphi)$  для  $\forall \varphi(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ . Условие существования этого решения — поточечная управляемость пары  $(\mathbf{A}(\varphi), \mathbf{B}(\varphi)) \forall \varphi(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ .

На рис. 3 показано решение методом SDRE с замораживанием коэффициентов в сравнении с ASRE. Видно, что результат схож с нулевой итерацией метода ASRE, т. е. имеет достаточно большую ошибку в расчетах А-профиля.

Сравнивая методы ASRE и SDRE, можно заметить, что для данного класса задач на конечном интервале времени метод ASRE использовать предпочтительнее, поскольку он не имеет сложностей, связанных с неопределенностью матриц системы при обратном интегрировании, но при этом требует больших вычислительных затрат. В связи с этим возникает идея модификации метода SDRE, чтобы повысить точность и снять указанное ограничение путем предварительных вычислений матриц состояния системы. В этом смысле предлагаемая модификация метода SDRE предполагает некоторую предварительную нулевую итерацию по аналогии с методом ASRE, которая позволит при движении в обратном времени справа налево определить значение матриц  $\mathbf{A}(\varphi)$ ,  $\mathbf{B}(\varphi)$  и вычислить соответствующие значения матриц  $\mathbf{W}(\varphi)$ ,  $\mathbf{M}(\varphi)$ . Затем эти значения используются в прямом времени для формирования управления и моделирования А-профиля.

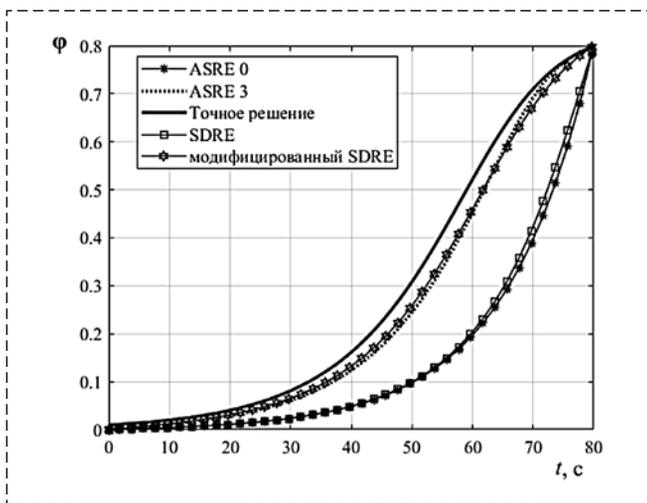


Рис. 3. Результат моделирования для стандартного метода SDRE и модифицированного SDRE

Fig. 3. Simulation result for standard SDRE method and modified SDRE

Предварительные вычисления предлагается выполнить через решение дополнительной задачи терминального управления для системы (32) при движении в обратном времени от точки  $\varphi(t_f) = \mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1}\mathbf{y}$  к  $\mathbf{y}_{pre} = \mathbf{C}\varphi(t_0)$ :

$$\dot{\varphi} = \mathbf{A}(\varphi)\varphi + \mathbf{B}(\varphi)\mathbf{v}, \quad \varphi(t_f) = \mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1}\mathbf{y},$$

$$J_{pre}(\mathbf{v}_{pre}) = \frac{1}{2} \int_{t_f}^{t_0} (\mathbf{v}_{pre}^T \mathbf{v}_{pre}) dt, \quad \mathbf{y}_{pre} = \mathbf{C}\varphi(t_0).$$

Результаты расчета А-профиля модифицированным методом SDRE с предварительным вычислением через дополнительную обратную задачу оптимального управления в сравнении со стандартным SDRE с замораживанием коэффициентов и ASRE-техникой показаны на рис. 3. Видно, что предложенный метод является более точным в сравнении со стандартным SDRE. Предложенный модифицированный алгоритм для SDRE-контроллера дает результат, близкий к третьей итерации метода ASRE, существенно повышая точность определения А-профиля при меньших затратах в сравнении с соответствующей по точности итерацией ASRE.

## Заключение

Рассмотрена возможность непрерывного мониторинга критических ситуаций в динамике стабилизированного движения. Для этого мы предлагаем конструкцию ситуационного прогноза, основанную на принципе БУ. Поскольку задача анализа БУ является вариационной либо задачей оптимального управления, то базовым элементом СП оказывается А-профиль — единственная экстремаль, связывающая состояние равновесия невозмущенной системы с КС. Технология вычисления А-профиля для нелинейных систем представлена на примере задачи управления рисками с использованием идеи укороченного принципа больших уклонений [14]. Применяется также метод последовательных приближений в рамках решения уравнения Риккати, зависящего от состояния. Все указанные вопросы предполагается продолжить в последующих работах.

## Список литературы

1. Поспелов Д. А. Ситуационное управление: теория и практика. М.: Наука, 1986.

2. Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
3. Пухальский А. А. Большие отклонения стохастических динамических систем. Теория и приложения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
4. Дубовик С. А. Асимптотическая семантизация данных в системах управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20, № 8. С. 461—471.
5. Дубовик С. А. Использование квазипотенциалов для контроля больших отклонений управляемых процессов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17, № 5. С. 301—307
6. Дубовик С. А., Кабанов А. А. Функционально устойчивые системы управления: асимптотические методы синтеза. М.: ИНФРА-М, 2019.
7. Дубовик С. А. Синтез "второй сигнальной системы" регулятора на основе принципа больших отклонений. С.-Пб.: Электроприбор, 2020.
8. Кабанов А. А., Dubovik S. A. Methods of modeling and probabilistic analysis of large deviations of dynamic systems // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1661. Paper no. 012044.
9. Кабанов А. А., Дубовик С. А. Численные методы контроля редких событий в нелинейных стохастических системах // Мехатроника, автоматизация, управление. 2021. Т. 22, № 6. С. 291—297.
10. Çimen T. Survey of state-dependent Riccati equation in nonlinear optimal feedback control synthesis // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2012. Vol. 35. P. 1025—1047.
11. Nekoo S. R. Tutorial and review on the state-dependent Riccati equation // Journal of Applied Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 8, N. 2. P. 109—166.
12. Toppoto F., Miani M., Bernelli-Zazzera F. Optimal selection of the coefficient matrix in state-dependent control methods // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2015. Vol. 38. P. 861—873.
13. Dawson D. Critical dynamics and fluctuations for a mean-field model of cooperative behavior // Journal of Statistical Physics. 1983. Vol. 31, N. 1. P. 29—85.
14. Garnier J., Papanicolaou G., Yang T.-W. Large deviations for a mean field model of systemic risk // SIAM Journal on Financial Mathematics. 2013. Vol. 4(1). P.151—184.
15. Dawson D. A., Gärtner J. Large deviations from the McKean-Vlasov limit for weakly interacting diffusions // Stochastics. 1987. Vol. 20. P. 247—308.
16. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям: приложения к механике, точные решения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1993. 464 с.
17. Heydari A., Balakrishnan S. N. Closed-form solution to finite-horizon suboptimal control of nonlinear systems // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2014. Vol. 25. P. 2687—2704.
18. Çimen T., Banks S. P. Global optimal feedback control for general nonlinear systems with nonquadratic performance criteria // Systems & Control Letters. 2004. Vol. 53. P. 327—346

## An Asymptotic Method for Predicting Risks in Problems of Stochastic Monitoring and Control

S. A. Dubovik<sup>1</sup>, duboviksa@gmail.com, A. A. Kabanov<sup>1,2</sup>, kabanovaleksey@gmail.com,

<sup>1</sup>Sevastopol State University, Sevastopol, 299053, Russian Federation,

<sup>2</sup>Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119333, Russian Federation

Corresponding author: Kabanov Aleksey A., Ph.D., Associate Professor,  
Sevastopol State University, 299053, Sevastopol, Russian Federation,  
e-mail: kabanovaleksey@gmail.com

Accepted on May 11, 2022

### Abstract

To ensure the stabilization of the equilibrium state in a nonlinear system in the presence of noise, it is not enough to solve the local stabilization problem, it is also necessary to ensure continuous monitoring of a possible transition to a critical state leading to system failure. To organize such monitoring, we use the large deviations principle applied to dynamical systems with small perturbations. For the purposes of monitoring, the optimal path that we call the *A*-profile is important. We use the *A*-profile to build a situational forecast in the risk control problem for a multi-agent system. In addition to the nonlinear mechanism of internal stabilization of the level  $h$  for each of the agents, there are forces of mean field interaction between the agents. The weak limit in this model with the number of agents tending to infinity is described by the Fokker-Planck-Kolmogorov equation, but the use of approximation up to  $O(h^2)$  leads to a finite-dimensional Wentzel-Freidlin scheme. According to the scheme, we obtain an explicit *A*-profile as a solution of the degenerate Abel equation of the second kind. At the same time, the approximation in  $h$  makes it possible to develop a method of successive approximations for the *A*-profile. In this paper, the *A*-profile is synthesized as a solution of the optimal control problem, where the state-dependent Riccati equation method and the method of the approximating sequence of Riccati equations are used. In the article, these methods are applied and compared within the framework of the risk control problem.

**Keywords:** large deviations, situational forecast, stochastic system, risk prediction

For citation:

Dubovik S. A., Kabanov A. A. An Asymptotic Method for Predicting Risks in Problems of Stochastic Monitoring and Control, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 8, pp. 395—405.

DOI: 10.17587/mau.23.395-405

## References

1. **Pospelov D. A.** Situational control: theory and practice, Moscow, Nauka, 1986 (in Russian).
2. **Wentzel A. D., Freidlin M. I.** Fluctuations in dynamical systems under the action of small random perturbations, Moscow, Nauka, 1979 (in Russian).
3. **Puhalsky A. A.** Large deviations of stochastic dynamical systems. Theory and applications, Moscow, FIZMATLIT, 2005 (in Russian).
4. **Dubovik S. A.** Asymptotic semantization of data in control systems, *Mekhatronika Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 8, pp. 461–471 (in Russian).
5. **Dubovik S. A.** Use of quasipotentials for monitoring of large deviations in the control processes, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 5, pp. 301–307 (in Russian).
6. **Dubovik S. A., Kabanov A. A.** Functionally stable control systems: asymptotic methods of synthesis, Moscow, INFRA-M, 2019 (in Russian).
7. **Dubovik S. A.** Synthesis of the "second signal system" of the regulator based on the principle of large deviations, SPb, Elektropribor, 2020 (in Russian).
8. **Kabanov A. A., Dubovik S. A.** Methods of modeling and probabilistic analysis of large deviations of dynamic systems, *Journal of Physics: Conference Series*. 2020, vol. 1661, paper no. 012044.
9. **Kabanov A. A., Dubovik S. A.** Numerical methods for monitoring rare events in nonlinear stochastic systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 6, pp. 291–297 (in Russian).
10. **Çimen T.** Survey of state-dependent Riccati equation in nonlinear optimal feedback control synthesis, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2012, vol. 35, pp. 1025–1047.
11. **Nekoo S. R.** Tutorial and review on the state-dependent Riccati equation, *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 8, no. 2, pp. 109–166.
12. **Toppoto F., Miani M., Bernelli-Zazzera F.** Optimal selection of the coefficient matrix in state-dependent control methods, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2015, vol. 38, pp. 861–873.
13. **Dawson D.** Critical dynamics and fluctuations for a mean-field model of cooperative behavior, *Journal of Statistical Physics*, 1983, vol. 31, no. 1, pp. 29–85.
14. **Garnier J., Papanicolaou G., Yang T.-W.** Large deviations for a mean field model of systemic risk, *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 2013, vol. 4(1), pp. 151–184.
15. **Dawson D. A., Gartner J.** Large deviations from the McKean-Vlasov limit for weakly interacting diffusions, *Stochastics*, 1987, vol. 20, pp. 247–308.
16. **Zaitsev V. F., Polyaniy A. D.** Handbook of nonlinear differential equations: applications to mechanics, exact solutions, Moscow, FIZMATLIT, 1993, 464 p. (in Russian).
17. **Heydari A., Balakrishnan S. N.** Closed-form solution to finite-horizon suboptimal control of nonlinear systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014, vol. 25, pp. 2687–2704.
18. **Çimen T., Banks S. P.** Global optimal feedback control for general nonlinear systems with nonquadratic performance criteria, *Systems & Control Letters*, 2004, vol. 53, pp. 327–346.

29 ноября 2022 г. в ГК ИЗМАЙЛОВО (г. Москва) состоится

## XIII Межотраслевая конференция

### "АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВА-2022",

посвященная автоматизации и метрологическому обеспечению предприятий энергетики, металлургии, машиностроения, нефтегазовой, цементной и других отраслей промышленности, внедрению информационных технологий, АСУТП, АСУ, АСКУЭ, ПАЗ, SCADA, ERP-систем, современных газоанализаторов, расходомеров, датчиков температуры и давления, пылемеров и другой контрольно-измерительной техники, систем вибродиагностики и экологического мониторинга, решений для диспетчирования, учета и контроля различных технологических процессов

**Организатор конференции – ООО "ИНТЕХЭКО" при поддержке отраслевых СМИ.**

#### **Темы докладов Межотраслевой конференции "АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВА"**

- Актуальные задачи автоматизации и контроля промышленных предприятий.
- Информационно-управляющие системы промышленной автоматизации: АСУТП, АСУ, CRM, ERP, MES, АСКУЭ, АИСКУЭ, ПАЗ, РЗА, АСОДУ, SCADA и смежные направления.
- Практический опыт автоматизации предприятий энергетики, металлургии, машиностроения, нефтегазовой, химической, оборонной и других отраслей промышленности.
- Внедрение информационных технологий, приборов КИП и систем управления для повышения надежности и эффективности заводов, комбинатов, водоканалов и электростанций.
- Системы диспетчеризации, мониторинга, учета и контроля технологических процессов.
- Системы экологического мониторинга. Автоматизированные системы контроля выбросов.
- Отечественные и зарубежные контрольно-измерительные приборы: расходомеры, газоанализаторы, пылемеры, уровнемеры, дефектоскопы, толщиномеры, пирометры, датчики давления и температуры, спектрометры и другие приборы.
- Системы виброконтроля и вибродиагностики.
- Лабораторное оборудование.
- Автоматизация электроснабжения предприятий. Системы энергоменеджмента.
- Программные средства поддержки проектирования, измерений и испытаний.
- Теория и практика управления информационной безопасностью.

**Подробная информация на сайте [www.intecheco.ru](http://www.intecheco.ru)**