

ДИНАМИКА, БАЛЛИСТИКА, УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

УДК 681.5

DOI: 10.17587/mau.23.376-383

В. Н. Шашихин, д-р техн. наук, проф., shashihin@bk.ru,

К. Д. Мерзляков, магистрант, x-sive2016@yandex.ru,

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург

Синтез стабилизирующего управления квадрокоптером на основе линейных матричных неравенств

Актуальность представленной работы обусловлена широким внедрением беспилотных летательных аппаратов, включая и квадрокоптеры, в различные сферы как гражданского, так и военного применения. Выполнен обзор различных методов управления квадрокоптерами с учетом их особенностей как нелинейных объектов высокой размерности. Работа посвящена стабилизации квадрокоптера на сложной траектории, заданной функциональными зависимостями координат в трехмерном пространстве. Построена нелинейная динамическая модель квадрокоптера в связанной системе координат. Управление квадрокоптером строится в виде комбинации двух управляющих воздействий. При решении обратной задачи динамики находится программное управление, реализующее движение по заданной траектории. Стабилизация движения вдоль требуемой траектории обеспечивается обратной связью по фазовым координатам. Коэффициенты стабилизирующего регулятора находятся методом модального управления на основе решения линейного матричного неравенства с использованием линеаризованной модели. Найденные коэффициенты обратной связи позволяют достичь требуемую степень устойчивости замкнутой системы, которая обеспечивает рабочесть квадрокоптера по отношению к параметрическим возмущениям. Правомочность такого подхода к синтезу управления нелинейной системой обосновывается теоремой о топологической эквивалентности нелинейной системы и линеаризованной модели в части того, что нелинейная система имеет устойчивое или неустойчивое многообразия, которые являются аналогами устойчивых или неустойчивых пространств линеаризованной системы. Приведены результаты вычислительных экспериментов для оценки погрешности воспроизведения заданной траектории квадрокоптера. Для подтверждения эффективности синтезированного стабилизирующего управления и оптимального управления на основе принципа максимума Понtryгина выполнено имитационное моделирование поведения квадрокоптера и вычислена погрешность воспроизведения траектории. По данному критерию более эффективным для квадрокоптера является стабилизирующее управление, синтезированное на основе линейных матричных неравенств. Вычислительные эксперименты выполнены с использованием пакета прикладных программ MATLAB.

Ключевые слова: нелинейная модель квадрокоптера, траекторное управление, стабилизирующее управление, линейные матричные неравенства, моделирование

Введение

В настоящее время исследованию беспилотных летательных аппаратов, к которым относится и квадрокоптеры, уделяется большое внимание в связи с широкими возможностями их использования в различных сферах гражданского и военного применения [1, 2]. Обеспечение устойчивости квадрокоптера во время движения по заданной траектории является сложной теоретической и практической проблемой, привлекающей пристальное внимание разработчиков систем управления квадрокоптерами [3, 4].

Решение задачи управления квадрокоптером осуществляется с привлечением как традиционных подходов классической теории автоматического управления с использованием пропорционально-интегрально-дифференци-

альных регуляторов, так и с использованием различных адаптивных регуляторов [2, 5], методов H_∞ теории управления [6], регуляторов, построенных на основе синергетического подхода [7] и нейронных сетей [8]. Однако использование таких методов управления приводит к усложнению регуляторов и, как следствие, к увеличению стоимости и уменьшению надежности квадрокоптеров.

В статье для стабилизации движения квадрокоптера на заданной траектории предлагается использовать метод модального управления на основе решения линейного матричного неравенства [9].

Постановка задачи

Квадрокоптер является беспилотным летательным аппаратом (БЛА), представляющим

платформу с четырьмя роторами. Одна пара роторов вращается по часовой стрелке, другая — против часовой стрелки. По сравнению с БЛА вертолетного типа квадрокоптеры обладают рядом преимуществ, таких как: надежность и простота конструкции, большая стабильность, компактность и маневренность, малая взлетная масса при существенной массе полезной нагрузки.

Нелинейная математическая модель квадрокоптера. Стабилизация движения квадрокоптера по заданной траектории проводится на основе нелинейной математической модели, представленной в работе [10]:

$$\ddot{x} = \frac{k}{m} (\cos \psi \sin \theta \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi) \times \\ \times (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) - \frac{A_x}{m} \dot{x}; \quad (1a)$$

$$\ddot{y} = \frac{k}{m} (\sin \psi \sin \theta \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi) \times \\ \times (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) - \frac{A_y}{m} \dot{y}; \quad (1b)$$

$$\ddot{z} = \frac{k}{m} \cos \theta \cos \varphi (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) - \\ - \frac{A_z}{m} \dot{z} - g; \quad (1c)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{I_y - I_z}{I_x} \dot{\theta} \dot{\psi} + \frac{kl}{I_x} (\omega_4^2 - \omega_2^2); \quad (1d)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{I_z - I_x}{I_y} \dot{\phi} \dot{\psi} + \frac{kl}{I_y} (\omega_3^2 - \omega_1^2); \quad (1e)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{I_x - I_y}{I_z} \dot{\phi} \dot{\theta} + \frac{b}{I_z} (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2), \quad (1e)$$

где x, y, z — координаты центра масс квадрокоптера в земной системе координат; φ, θ, ψ — углы Эйлера (углы тангажа, крена и рыскания); ω_i — угловая скорость вращения винта i -го мотора квадрокоптера; A_x, A_y, A_z — коэффициенты аэродинамического сопротивления; l — расстояние от центра масс квадрокоптера до моторов; I_x, I_y, I_z — моменты инерции квадрокоптера; b — коэффициент крутящего момента моторов; m — масса квадрокоптера; k — коэффициент тяги моторов; g — ускорение свободного падения.

Параметры модели:

$$m = 2, k = 3 \cdot 10^{-6}, \\ I_{xx} = I_{yy} = 5 \cdot 10^{-3}, I_{zz} = 0,01, \quad (2a)$$

$$l = 0,4, A_x = A_y = A_z = 0,25, b = 7 \cdot 10^{-8}. \quad (26)$$

Нелинейная математическая модель квадрокоптера (1) может быть представлена в векторном виде

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (3)$$

где $\dot{\mathbf{x}}(t)$ — производная по времени; $\mathbf{x}(t) \in R^{n=12}$ — фазовый вектор, определяющий состояние квадрокоптера; $\mathbf{u}(t) \in R^{m=4}$ — управляющее воздействие со следующими компонентами соответственно:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= (x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = y, \\ x_4 &= \dot{y}, x_5 = z, x_6 = \dot{z}, x_7 = \varphi, x_8 = \dot{\varphi}, x_9 = \theta, \\ x_{10} &= \dot{\theta}, x_{11} = \psi, x_{12} = \dot{\psi})^T \in R^{12}, \\ \mathbf{u}(t) &= (u_1 = \omega_1^2, u_2 = \omega_2^2, u_3 = \omega_3^2, u_4 = \omega_4^2)^T \in R^4. \end{aligned} \quad (4)$$

Линеаризация исходной модели. Пусть функция

$$F(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = (f_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)))_{i=1}^n,$$

в окрестности Ω частных решений x^S , соответствующих управляющим воздействиям u^S ,

$$\Omega = \{(x^s, u^s) \mid \|x^s\| + \|u^s\| < \varphi,$$

$$\varphi = \text{const} > 0\} \subset R^n \otimes R^m$$

удовлетворяет условиям существования производных по векторным аргументам $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{u}(t)$, определенным в (4):

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{dF(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{d\mathbf{x}(t)} = \\ &= \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \dots & \partial f_1 / \partial x_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial f_n / \partial x_1 & \dots & \partial f_n / \partial x_n \end{bmatrix}_{\substack{x(t)=x^S \\ u(t)=u^S}}; \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{dF(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{d\mathbf{u}(t)} = \\ &= \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial u_1 & \dots & \partial f_1 / \partial u_m \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial f_n / \partial u_1 & \dots & \partial f_n / \partial u_m \end{bmatrix}_{\substack{x(t)=x^S \\ u(t)=u^S}}. \end{aligned} \quad (5b)$$

При использовании формулы Тейлора уравнение (3) может быть преобразовано к квазилинейному виду

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(x^s, u^s)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(x^s, u^s)\mathbf{u}(t) + \phi(x^s, u^s), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть для всех

$$\begin{aligned} \xi^S &\in S(x^S, u^S, \rho) = \{(x^S, u^S) : \\ &: \|x - x^S\| + \|u - u^S\| \leq \rho, \rho > 0\} \subset R^n \otimes R^m \end{aligned}$$

выполняются оценки

$$\|\phi(x^S, u^S)\| \leq q \|(x^S, u^S)\|. \quad (7)$$

Если матрица Якоби вычислена по формуле (5а) и выполнено условие (7), тогда уравнение (6) будет определять уравнение первого приближения

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{Aw}(t) + \mathbf{Bv}(t), \quad (8)$$

где $\mathbf{w}(t) \in R^n$ — вектор состояния; $\mathbf{v}(t) \in R^m$ — вектор управления.

Система (8) может быть использована для синтеза управления, стабилизирующего систему (3), в окрестности частного решения. Для гиперболических систем (матрица Якоби не имеет чисто мнимых собственных значений) в соответствии с теоремой о топологической эквивалентности [10, 11] вид устойчивости нелинейной системы (3) совпадает с видом устойчивости системы первого приближения (8) независимо от характера нелинейных членов. Таким образом, вид траекторий системы (8) определяет геометрическую картину поведения траекторий исходной нелинейной системы (3).

Задача синтеза стабилизирующего управления. Вид траекторий нелинейной системы (3) определяется характеристическими показателями Ляпунова [12]. Характеристическим показателем функции $\mathbf{x}(t)$ называется величина (которая может иметь конечное значение или значение $\pm\infty$), определенная как

$$\lambda(x) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} (t^{-1} \ln \|\mathbf{x}(t)\|).$$

Характеристический показатель Ляпунова функции $\mathbf{x}(t)$ есть результат сравнения скорости роста $\mathbf{x}(t)$ при $t \rightarrow \infty$ с экспонентой $\exp\{\alpha t\}$, для которой характеристический показатель равен α . Среди всего набора характеристических показателей Ляпунова важен наибольший (старший) показатель $\lambda_1 = \lambda_{\max}$. Набор показателей Ляпунова характеризует устойчивость траекторий нелинейной системы (3). Если $\lambda_1 < 0$, то траектория нелинейной системы асимптотически устойчива; если $\lambda_1 > 0$ — неустойчива. Набор характеристических показателей, упорядоченных по убыванию $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$,

является спектром нелинейной динамической системы.

Для системы (3) необходимо найти стабилизирующий регулятор в виде обратной связи по фазовому вектору

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (9)$$

такой, чтобы спектр характеристических показателей Ляпунова замкнутой системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F(\mathbf{x}(t), \mathbf{K}\mathbf{x}(t)) \quad (10)$$

принадлежал левой полуплоскости, а система (10) была асимптотически устойчива со степенью устойчивости μ , которая определяется старшим характеристическим показателем Ляпунова.

Синтез стабилизирующего управления квадрокоптером на основе линейного матричного неравенства

Задача стабилизации по состоянию системы (8) состоит в выборе закона управления (9) из класса линейных обратных связей по фазовому вектору, при котором замкнутая система является асимптотически устойчивой.

Для синтеза стабилизирующих управлений квадрокоптером рассмотрим метод модального управления, основанный на применении линейных матричных неравенств [9]. Уравнение линеаризованной системы, замкнутой стабилизирующим управлением, имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}}(t) &= \mathbf{Aw}(t) + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{w}(t) = \\ &= (\mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{w}(t) = \mathbf{A}_c\mathbf{w}(t). \end{aligned} \quad (11)$$

В соответствии со вторым методом Ляпунова система (11) будет асимптотически устойчивой, если у нее существует положительно определенная функция Ляпунова

$$V(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^T \mathbf{P} \mathbf{w} \text{ с } \mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0,$$

производная которой в силу системы (11) является отрицательно определенной функцией

$$\dot{V} = \mathbf{w}^T (\mathbf{A}_c^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_c) \mathbf{w} < 0, \quad \forall \mathbf{w} \neq 0. \quad (12)$$

С учетом (11) неравенство (12) имеет вид

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{K} < 0,$$

умножая которое слева и справа на матрицу \mathbf{P}^{-1} и обозначая $\mathbf{G} = \mathbf{P}^{-1}$, имеем

$$\mathbf{G}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{G} + \mathbf{GK}^T\mathbf{B}^T + \mathbf{BK}\mathbf{G} < 0, \quad \mathbf{G} > 0. \quad (13)$$

Таким образом, синтез стабилизирующего управления сводится к вычислению пары матриц (\mathbf{G} , \mathbf{K}), удовлетворяющих матричным неравенствам (13). Введем новую матричную переменную $\mathbf{L} = \mathbf{KG}$ и запишем неравенства (13) в виде

$$\mathbf{GA}^T + \mathbf{AG} + \mathbf{L}^T\mathbf{B}^T + \mathbf{BL} < 0, \quad \mathbf{G} > 0. \quad (14)$$

Параметры искомой обратной связи вычисляются по формуле

$$\mathbf{K} = \mathbf{LG}^{-1}. \quad (15)$$

Для выполнения дополнительного условия на степень устойчивости μ область корней характеристического уравнения замкнутой системы на комплексной плоскости должна ограничиваться областью, расположенной строго левее вертикальной линии, которая отстоит от мнимой оси на расстоянии $-\mu$. Это требование будет выполнено, если полная производная квадратичной функции Ляпунова удовлетворяет условию

$$\dot{V} = \mathbf{w}^T(\mathbf{A}_c^T\mathbf{P} + \mathbf{PA}_c)\mathbf{w} < -2\mu\mathbf{w}^T\mathbf{P}\mathbf{w}, \quad \forall \mathbf{w} \neq 0,$$

из которого следует необходимость выполнения условия

$$\mathbf{GA}^T + \mathbf{AG} + \mathbf{L}^T\mathbf{B}^T + \mathbf{BL} + 2\mu\mathbf{G} < 0, \quad \mathbf{G} > 0.$$

Параметры обратной связи также вычисляются по формуле (15).

Исследование стабилизации движения квадрокоптера на заданной траектории

Вычислительный эксперимент по стабилизации квадрокоптера проводился с использованием нелинейной модели (3). Для оценки эффективности системы стабилизации приведены результаты имитационного моделирования с использованием регуляторов, синтезированных на основе решения линейных

матричных неравенств и линейно-квадратичной оптимизации. Параметры обратной связи вычислялись по линеаризованной модели (8), в которой матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} определены выражением (5а), (5б) и равны

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9,81 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,125 & 0 & 0 & -9,81 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,5 \cdot 10^{-6} & 1,5 \cdot 10^{-6} & 1,5 \cdot 10^{-6} & 1,5 \cdot 10^{-6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2,4 \cdot 10^{-4} & 0 & 2,4 \cdot 10^{-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2,4 \cdot 10^{-4} & 0 & 2,4 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7,0 \cdot 10^{-6} & 7,0 \cdot 10^{-6} & 7,0 \cdot 10^{-6} & 7,0 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}.$$

Элементы матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} вычислены при значениях параметров (2) нелинейной модели квадрокоптера (1) в нулевой особой точке. Траектория движения квадрокоптера задается следующим образом:

$$\mathbf{x}_{\text{уст}}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) = x(t) = 2 \sin 0,5t \\ x_3(t) = y(t) = 2 \cos 0,5t \\ x_5(t) = z(t) = 0,2 \sin 0,5t \end{bmatrix}.$$

Движение по заданной траектории обеспечивается управлением

$$\mathbf{u}_{\text{уст}}(t) = -(\mathbf{CA}_3^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{x}_{\text{уст}}(t),$$

где $\mathbf{A}_3 = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}$ и

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сравнение двух методов управления — модального и оптимального — проводилось с использованием погрешности реализации траекторий по следующей методике. Пусть $\mathbf{y}(x)$ — заданная траектория, координаты которой определяются для системы равноотстоящих точек $x_i = x_0 + ih$, ($i = 0, 1, 2$). Обозначим $\tilde{y}_i(x_i)$ — последовательные значения реализованной траектории. Тогда оценка абсолютной погрешности воспроизведения траектории определяется неравенством [14]

$$E_i \geq |y_i - \tilde{y}_i|. \quad (16)$$

Погрешность вычисляется с использованием евклидова расстояния по следующему алгоритму.

1. Для некоторой точки реализованной траектории определяется расстояние до каждой точки заданной траектории.

2. Находится минимум из расстояний, определенных на шаге 1.

3. Повторяются шаги 1 и 2 до тех пор, пока не закончатся все точки полученной траектории.

4. Находится максимум из всех ранее вычисленных на шаге 2 минимумов.

Полученное значение максимума и является оценкой погрешности реализации заданной траектории.

Исследование стабилизирующего модально-го управления. Матрица коэффициентов обратной связи, вычисленная по формуле (15) с учетом линейного матричного неравенства (14), равна

$$\mathbf{K} \approx 10^5 \begin{bmatrix} 0,08 & 0,06 & 0 & 0 & -2,18 & -1,32 & 0 & 0 & 0,74 & 0,09 & -0,47 & -0,33 \\ 0 & 0 & -0,077 & -0,06 & -2,18 & -1,32 & 0,74 & 0,09 & 0 & 0 & 0,47 & 0,33 \\ -0,08 & -0,06 & 0 & 0 & -2,18 & -1,32 & 0 & 0 & -0,74 & -0,09 & -0,47 & -0,33 \\ 0 & 0 & 0,08 & 0,06 & -2,18 & -1,32 & -0,74 & -0,09 & 0 & 0 & 0,47 & 0,33 \end{bmatrix}.$$

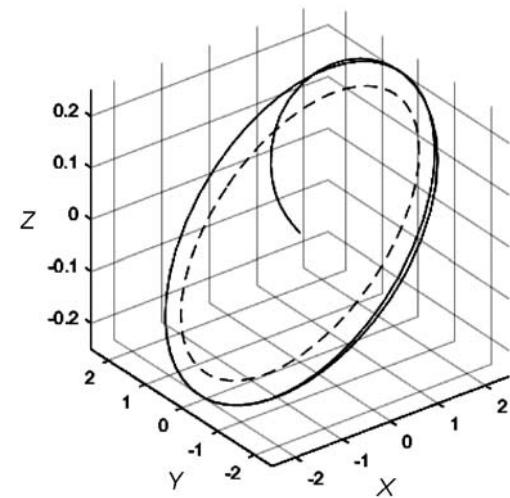


Рис. 1. Траектории системы, замкнутой стабилизирующим управлением

Fig. 1. Trajectories of the system closed by stabilizing control

Траектории замкнутой системы (заданная — штриховая линия, реализованная — сплошная линия) при стабилизирующем управлении представлены на рис. 1.

Спектр характеристических показателей Ляпунова нелинейной системы (3), замкнутой синтезированным стабилизирующим управлением (15), равен

$$\lambda\{F(\mathbf{x}(t), \mathbf{Kx}(t))\} = [\lambda_1 = -0,4862 \quad \lambda_2 = -0,4902 \\ \lambda_3 = -0,4862 \quad \lambda_4 = -0,4902 \quad \lambda_5 = -0,4548 \\ \lambda_6 = -0,4613 \quad \lambda_7 = -0,6228 \quad \lambda_8 = -0,6476 \\ \lambda_9 = -1,7233 \quad \lambda_{10} = -1,7608 \quad \lambda_{11} = -1,5666 \\ \lambda_{12} = -1,5957].$$

Исследование оптимального управления.

Для системы (8) с обратной связью (9) решение задачи линейно-квадратичной оптимизации состоит в минимизации функционала

$$J(x, u) = \int_0^\infty [\mathbf{w}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{w}(t) + \mathbf{v}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{v}(t)]dt$$

при ограничениях в виде уравнений динамики с матрицами $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > 0$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T > 0$, которые задаются таким образом, чтобы регулятор

удовлетворял в наибольшей степени динамике квадрокоптера [13].

Матрица регулятора в обратной связи определяется формулой

$$\mathbf{K} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}, \quad (17)$$

где \mathbf{P} — решение матричного уравнения Риккати:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{PA} - \mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0.$$

Матрица параметров оптимального регулятора (17) равна

$$\mathbf{K} \approx 10^6 \begin{bmatrix} -2 & -2,77 & 0 & 0 & 1,41 & 1,55 & 0 & 0 & -10,64 & -2,01 & 1,41 & 1,45 \\ 0 & 0 & 2 & 2,77 & 1,41 & 1,55 & -10,64 & -2,01 & 0 & 0 & -1,41 & -1,45 \\ 2 & 2,77 & 0 & 0 & 1,41 & 1,55 & 0 & 0 & 10,64 & 2,01 & 1,41 & 1,45 \\ 0 & 0 & -2 & -2,77 & 1,41 & 1,55 & 10,64 & 2,01 & 0 & 0 & -1,41 & -1,45 \end{bmatrix}.$$

Траектории замкнутой системы (заданная — штриховая линия, реализованная — сплошная линия) при оптимальном управлении представлены на рис. 2.

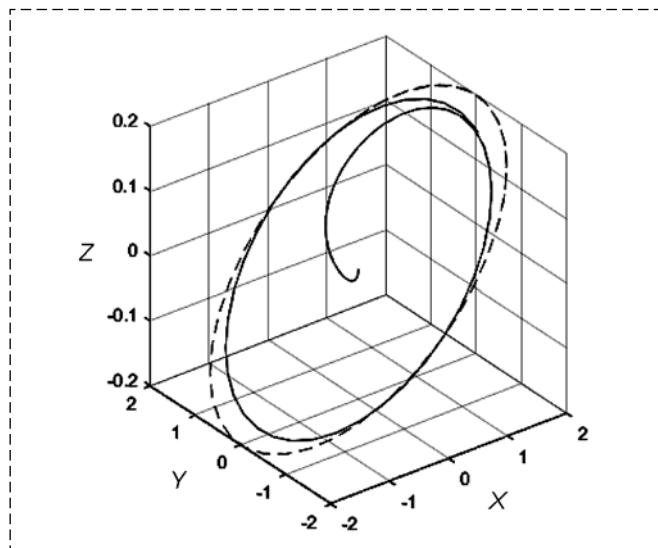


Рис. 2. Траектории системы, замкнутой оптимальным управлением

Fig. 2. Trajectories of the system closed by optimal control

Оценка погрешности

Error estimation

Управление	Погрешность воспроизведения траектории
Стабилизирующее	$E = 0,2596$
Оптимальное	$E = 0,9791$

Спектр характеристических показателей Ляпунова нелинейной системы (3), замкнутой синтезированным оптимальным управлением (17), равен

$$\lambda\{F(\mathbf{x}(t), \mathbf{Kx}(t))\} = [\lambda_1 = -0,9918 \quad \lambda_2 = -1,3861 \\ \lambda_3 = -1,0219 \quad \lambda_4 = -1,2798 \quad \lambda_5 = -1,8531 \\ \lambda_6 = -2,2558 \quad \lambda_7 = -2,2096 \quad \lambda_8 = -2,8395 \\ \lambda_9 = -7,8741 \quad \lambda_{10} = -40,2311 \\ \lambda_{11} = -959,3377 \quad \lambda_{12} = -959,6001].$$

Оценки погрешности, вычисленные по формуле (16), для стабилизирующего и оптимального управления представлены в таблице.

Как видно из таблицы, меньшую оценку погрешности имеет стабилизирующее управление. Спектры характеристических показателей Ляпунова при стабилизирующем и оптимальном управлении обеспечивают асимптотическую устойчивость замкнутой нелинейной системы.

Заключение

В работе синтезирована обратная связь, обеспечивающая стабилизацию движения квадрокоптера по заданной траектории. Вычисление коэффициентов обратной связи проводилось методом модального управления на основе использования линейных матричных неравенств. При синтезированном стабилизирующем управлении спектр характеристических показателей Ляпунова, расположенный в левой полуплоскости, свидетельствует об устойчивости замкнутой нелинейной системы. Проведена серия вычислительных экспериментов в целях определения оценки погрешности воспроизведения траектории квадрокоптера с использованием стабилизирующей обратной связи, синтезированной методом модального управления на основе решения линейного матричного неравенства и оптимального управления, полученного в результате решения задачи линейно-квадратичной оптимизации.

Результаты вычислительных экспериментов подтверждают эффективность по данному критерию стабилизирующего управления по сравнению с оптимальным управлением.

Список литературы

1. Красовский А. Н. Алгоритм автоматического программного управления полетом дрона-квадрокоптера до цели и обратно // Актуальные исследования. 2020. Т. 2, № 5. С. 1–19.
2. Cao C. L1 adaptive output feedback controller for systems of unknown dimension // IEEE Transactions on Automatic Control. 2008. Vol. 53, N. 3. P. 815–821.
3. Белоконь А. И., Золотухин Ю. Н., Котов К. Ю., Мальцев А. С., Несторов А. А. Управление параметрами полета квадрокоптера при движении по заданной траектории // Автометрия. 2013. № 4. С. 32–42.
4. Zuo Z. Trajectory tracing control design with command-filtered compensation for a quadrotor // IET Control Theory Application. 2010. Vol. 4, N. 11. P. 2343–2355.
5. Беляевский А. О., Томашевич С. И. Синтез адаптивной системы управления квадрокоптером методом пассивификации // Управление большими системами. 2016. № 63. С. 155–181.
6. Raffo G. V., Ortega M. G., Rubio F. R. An integral predictive nonlinear H_∞ control structure for a quadrotor helicopter // Automatica. 2010. Vol. 46, N. 1. P. 29–39.
7. Веселов Г. Е., Скляров А. А., Скляров С. А. Синергетический подход к управлению траекторным движением мобильных роботов в среде с препятствиями // Мехатроника. 2013. № 7. С. 20–25.
8. Nikol C., Machab C. J. B., Ramirez-Serrano A. Robust neural network control of a quadrotor helicopter // Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering. 2008. P. 1233–1237.
9. Баландин Д. В., Коган М. М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007. 208 с.
10. Luukkonen N. Modelling and control of quadcopter // Independent research project in applied mathematics, Espoo, Finland. 2011. P. 2–23.
11. Гробман Д. Гомеоморфизм систем дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1959. Т. 128, № 5. С. 880–881.
12. Оморов Р. О. Метод топологической грубости динамических систем // Материаловедение. 2017. Т. 24, № 4. С. 77–83.
13. Шашихин В. Н. Управление крупномасштабными динамическими системами. СПб.: ПОЛИТЕХПРЕСС, 2020. 308 с.
14. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. М.: Наука, 1966. 368 с.
15. Козлов В. Н., Куприянов В. Е., Шашихин В. Н. Теория автоматического управления: Учебное пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. 127 с.

Synthesis of Stabilizing Control of a Quadcopter Based on Linear Matrix Inequalities

V. N. Shashikhin, shashihin@bk.ru, K. D. Merzlyakov, x-sive2016@yandex.ru,

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint-Petersburg, 195251, Russian Federation

Corresponding author: Shashihin Vladimir N., Dr. of Tech. Sc., Professor,
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint-Petersburg, 195251, Russian Federation,
e-mail: shashihin@bk.ru

Accepted on March 24, 2022

Abstract

The relevance of the work is due to the widespread introduction of unmanned aerial vehicles, including quadcopters, in various areas of both civil and military applications. A review of various methods of controlling quadcopters, considering their features as nonlinear objects of high dimensionality, is performed. The work is devoted to stabilizing a quadcopter on a complex trajectory defined by functional coordinate relationships in 3D space. A nonlinear dynamic model of the quadcopter in a coupled coordinate system is constructed. The quadcopter control is based on a combination of two control actions. When solving the inverse dynamics problem, program control provides motion along a given trajectory. Stabilization of motion along the desired trajectory is provided by phase coordinate feedback. The stabilizing regulator ratios are found by the modal control method based on the solution of a linear matrix inequality using a linearized model. The found feedback ratios provide the required degree of stability of the closed-loop system, ensuring the quadcopter robustness to parametric perturbations. The legitimacy of this approach to the synthesis of control of a nonlinear system is substantiated by the topological equivalence theorem for the nonlinear system and the linearized model in that the nonlinear system has stable or unstable manifolds, which are analogs of the stable or unstable spaces of the linearized system. The results of computational experiments to estimate the error in reproducing a given quadcopter trajectory are presented. A simulation of the quadcopter behavior was performed, and the trajectory reproduction error was calculated to confirm the effectiveness of the synthesized stabilizing control and the optimal control based on the Pontryagin maximum principle. According to this criterion, the stabilizing control synthesized based on linear matrix inequalities is more effective for the quadcopter. Computational experiments were performed using the MATLAB application software package.

Keywords: nonlinear quadcopter model, trajectory control, stabilizing control, linear matrix inequalities, modeling

For citation:

Shashikhin V. N., Merzlyakov K. D. Synthesis of Stabilizing Control of a Quadcopter Based on Linear Matrix Inequalities, *Mekhanika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 7, pp. 376–383.

DOI: 10.17587/mau.23.376-383

References

1. Krasovsky A. N. Algorithm for automatic program control of the drone-quadcopter flight to the target and back, *Aktualnye issledovaniya*, 2020, vol. 2, no. 5. p. 1–19 (in Russian).
2. Cao C. L1 adaptive output feedback controller for systems of unknown dimension, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, vol. 53, no. 3, p. 815–821.
3. Belokon A. I., Zolotukhin Yu. N., Kotov K. Yu., Maltsev A. S., Nesterov A. A. Control of flight parameters of a quadrocopter when moving along a given trajectory, *Avtometriya*, 2013, no. 4, p. 32–42 (in Russian).
4. Zuo Z. Trajectory tracing control design with command-filtered compensation for a quadrocopter, *IET Control Theory Application*, 2010, vol. 4, no. 11, p. 2343–2355.
5. Belyavsky A. O., Tomashevich S. I. Synthesis of an adaptive quadrocopter control system by the passification method, *Upravlenie Bolshimi Sistemami*, 2016, no. 63, p. 155–181 (in Russian).
6. Raffo G. V., Ortega M. G., Rubio F. R. An integral predictive nonlinear control structure for a quadrocopter helicopter, *Automatica*, 2010, vol. 46, no. 1, p. 29–39.
7. Veselov G. E., Sklyarov A. A., Sklyarov S. A. Synergetic approach to the control of trajectory motion of mobile robots in an environment with obstacles, *Mekhanika*, 2013, no. 7, p. 20–25 (in Russian).
8. Nikol C., Machab C. J. B., Ramirez-Serrano A. Robust neural network control of a quadrotor helicopter, *Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*, 2008, p. 1233–1237.
9. Balandin D. V., Kogan M. M. Synthesis of control laws based on linear matrix inequalities, Moscow, Fizmatlit, 2007, 208 p. (in Russian).
10. Luukonen N. Modelling and control of quadcopter, *Independent research project in applied mathematics*, Espoo, Finland, 2011, pp. 2–23.
11. Grobman D. Homeomorphism of systems of differential equations, *Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, 1959, vol. 128, no. 5, p. 880–881.
12. Omorov R. O. Method of topological roughness of dynamical systems, *Materials Science*, 2017, vol. 24, no. 4, p. 77–83.
13. Shashikhin V. N. Control of large-scale dynamical systems, St. Petersburg, POLYTECHPRESS, 2020, 308 p. (in Russian)
14. Demidovich B. P., Maron I. A., Shuvalova E. Z. Numerical methods of analysis: approximation of functions, differential and integral equations, Moscow, Nauka, 1966, 368 p. (in Russian).
15. Kozlov V. N., Kupriyanov V. E., Shashikhin V. N. Theory of automatic control, St. Petersburg, Publishing house of the Polytechnic University, 2009, 127 p. (in Russian).



4–6 октября 2022 г. в Санкт-Петербурге на базе АО "Концерн" ЦНИИ "Электроприбор" состоится **15-я мультиконференция по проблемам управления (МКПУ-2022)**

Председатель президиума мультиконференции —
академик РАН В. Г. Пешехонов

Мультиконференция включает пять локальных конференций:

- **XXXIII конференция памяти выдающегося конструктора гирроскопических приборов Н.Н. Острякова**

Председатель программного комитета — акад. РАН В. Г. Пешехонов

- **Конференция "Информационные технологии в управлении" (ИТУ-2022)**

Сопредседатели программного комитета: член-корр. РАН В. Н. Васильев, д.т.н. проф. В. Н. Шелудько, член-корр. РАН Р. М. Юсупов

- **Конференция "Математическая теория управления и ее приложения" (МТУиП-2022)**

Сопредседатели программного комитета: член-корр. РАН Д. А. Новиков и д.ф.-м.н. проф. Н. В. Кузнецов

- **Конференция "Управление в аэрокосмических системах" имени академика Е. А. Микрина (УАКС-2022)**

Сопредседатели программного комитета: акад. РАН С. Ю. Желтов, член-корр. РАН В. А. Соловьев, член-корр. РАН М. В. Сильников

- **Конференция "Управление в морских системах" (УМС-2022)**

Сопредседатели программного комитета: акад. РАН Е. И. Якушенко, акад. РАН С. Н. Васильев, член-корр. РАН А. Ф. Щербатюк

В рамках мультиконференции пройдет Семинар по закрытой тематике

Информация для связи:

ГНЦ РФ АО "Концерн" ЦНИИ "Электроприбор",
Тел.: +7 (812) 499-82-10 — Истомина Елена Анатольевна
+7 (812) 499 82 67 — Тарановский Дмитрий Олегович
Факс: +7 (812) 232 33 76 E-mail: icins@eprib.ru