

Н. Н. Карабутов, д-р техн. наук, проф., kn22@yandex.ru,
МИРЭА — Российский технологический университет, г. Москва

Идентифицируемость и обнаруживаемость показателей Ляпунова линейных динамических систем

Характеристические показатели Ляпунова являются одним из действенных инструментов анализа качественных характеристик динамических систем. Вопросы идентифицируемости, восстанавливаемости и обнаруживаемости характеристических показателей Ляпунова не рассматривались. Эта проблема является актуальной. В работе предложен подход для проверки указанных характеристик линейной динамической системы при оценке характеристических показателей. Он основан на анализе геометрических структур, зависящих от коэффициента структурности системы. Коэффициент структурности отражает изменение характеристических показателей Ляпунова, а геометрические структуры позволяют принять решение о типе показателей. Получены условия полностью обнаруживаемых показателей Ляпунова, что соответствует определению полного множества показателей, а также σ -обнаруживаемости с уровнем ν -невосстанавливаемости, если система содержит невосстанавливаемые линеалы. Предложен способ проверки адекватности получаемого множества характеристических показателей Ляпунова. Получена допустимая граница подвижности старшего показателя Ляпунова.

Ключевые слова: динамическая система, характеристический показатель Ляпунова, идентифицируемость, восстанавливаемость, обнаруживаемость, линеал, почти периодическая функция, робот, структура, коэффициент структурности

Введение

Для анализа качественного поведения динамических систем широко используют характеристические показатели Ляпунова (ХПЛ). Они применяются для оценки поведения траекторий различных объектов в физике [1], медицине [2], экономике [3], астрономии [4]. Чаще всего ХПЛ оценивают на основе анализа временных рядов. Предполагается, что известна априорная информация о структуре системы. В статье [5] приведен обзор вычисления наибольшего ХПЛ для различных классов систем. В работе [6] предложен алгоритм оценки характеристических показателей Ляпунова неизвестной динамической системы. Алгоритм позволяет оценить все ХПЛ. Он основан на применении сетей с многомерным упреждением, в качестве базиса сети используются монотонные сигмоидальные функции. Задача сведена к подбору параметров функций, аппроксимирующих временной ряд по квадратичному критерию.

Существует несколько подходов к оценке ХПЛ (см. например, работы [7, 8]). В дальнейшем эти подходы были модифицированы [9, 10]. Большинство предложенных алгорит-

мов и процедур основано на реконструкции аттрактора системы и анализе временного ряда. Такой подход базируется на теореме Такеенса [11]. Близкие идеи реализованы в работе [9]. Обзор других процедур и алгоритмов представлен в работе [12]. В статье [13] дана модификация алгоритма Бенетти для вычисления наибольшего показателя Ляпунова. Предлагаемый подход развивает методы реконструкции аттрактора системы. Он основан на динамическом изменении периода временной задержки.

Большинство предлагаемых подходов и методов оценки ХПЛ разработано для систем, не содержащих входных воздействий. Как правило, предложены способы оценки максимального (наибольшего) показателя Ляпунова. Это объясняется классом исследуемых объектов и трудностями оценки всего спектра характеристических показателей Ляпунова.

Заметим, что в большинстве публикаций применение ХПЛ ограничено исследованием качественного поведения системы и не затрагивает другие вопросы теории идентификации. Естественной является попытка на основе анализа характеристик ХПЛ покрыть более широкий спектр задач идентификации. К ним можно

отнести и задачу структурной идентификации. Анализ публикаций показывает, что с таких позиций исследования не проводились. Не рассматривались вопросы, отражающие связь идентифицируемости системы и обнаруживаемости характеристических показателей Ляпунова.

С учетом этого ниже предлагается подход к оценке идентифицируемости системы и принятию на ее основе решения об обнаруживаемости характеристических показателей Ляпунова в условиях априорной неопределенности. В качестве исходных данных используется экспериментальная информация о работе системы в условиях нормальной эксплуатации. Для вычисления всего спектра ХПЛ используется подход, предложенный в работах [14, 15]. Он основан на анализе свойств специального класса геометрических структур, описывающих динамику изменения характеристических показателей Ляпунова. Рассмотрен случай стационарных и периодических систем.

Постановка задачи

Рассматривается динамическая система

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + Bu, \\ y &= C^T X,\end{aligned}\quad (1)$$

где $X \in R^m$ — вектор состояния; $u \in R$, $y \in R$ — вход и выход системы; $A \in R^{m \times m}$, $B \in R^m$, $C \in R^m$.

Матрица A является матрицей Гурвица. Для системы (1) известна измерительная информация

$$I_o = \{Y(t), U(t), t \in J = [t_0, t_1]\}. \quad (2)$$

Решение системы (1) запишем в виде

$$X(t) = \chi(t_0, u, t), \quad (3)$$

где χ — оператор, однозначно определяемый матрицами A , B и начальными условиями $X(t_0)$.

При $X_0 = X(t_0)$ решение системы (1) имеет вид

$$X(t) = X_g(t) + X_q(t), \quad (4)$$

где $X_q(t)$ — частное решение (1) с $U \in I_o$; $X_g(t)$ — общее решение (1) с $u(t) = 0$ при неизвестном $X_0 \in I_o$.

Обозначим $X_g(X_0, t)$ — общее решение системы (1) с $X_0 = X_0(Y_0) \in I_o$.

Задача состоит в нахождении оценки решения $X_g(t) = X_g(X_q, X_0, t)$ на множестве I_o и

получении условий идентифицируемости и обнаруживаемости спектра собственных чисел и порядка системы (1) по $X_g(t)$.

Способ получения оценки решения $X_g(t) = X_g(X_q, X_0, t)$ на основе обработки множества измерений (2) описан в работе [14]. Поэтому в дальнейшем считаем, что имеется оценка решения $X_g(t) = X_g(X_q, X_0, t)$.

Восстанавливаемость и обнаруживаемость системы

Приведем ряд понятий из общей теории систем [16]. Вопросы восстанавливаемости и обнаруживаемости тесно взаимосвязаны между собой. Вычисление ХПЛ основано на получении оценок переменных состояния системы. Возможность их определения связана с проблемой восстанавливаемости системы (1) на основе $y(t)$.

Определение 1. Пусть $y(t, t_0, X_0, u)$ описывает изменение выходной переменной $y(t)$ линейной системы

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= A(t)X(t) + Bu(t), \\ y(t) &= C^T X(t),\end{aligned}\quad (5)$$

из начального состояния $X_0 = X(t_0)$. Тогда система называется *полностью восстанавливаемой*, если для всех t_1 существует такой момент $t_0 \in (-\infty, t_1)$, что из равенства

$$y(t, t_0, X_0, u) = y(t, t_0, X'_0, u) \quad (6)$$

$\forall u(t)$ и $t_0 \in [t_0, t_1]$ следует $X_0 = X'_0$.

Из определения 1 следует, что если система является полностью восстанавливаемой, и выходная переменная наблюдается до произвольного момента t_1 , то существует момент $t_0 < t_1$, при котором состояние системы может быть определено единственным образом. Если $X(t_0)$ известно, то значение $X(t_1)$ также может быть определено.

Теорема 1. Система (5) является полностью восстанавливаемой в том и только том случае, если для всех t_1 существует такой момент $t_0 \in (-\infty, t_1)$, что из равенства

$$y(t, t_0, X_0, 0) = 0 \quad (7)$$

следует $X_0 = 0$.

Определение 2. Пусть A , C — матрицы размерности $n \times n$ и $l \times n$ соответственно. Тогда пара (A, C) называется *полностью восстанавливаемой*, если система

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= A(t)X(t) + Bu(t), \\ y(t) &= CX(t)\end{aligned}\quad (8)$$

является полностью восстанавливаемой.

Может возникнуть ситуация, когда состояние системы является не полностью восстанавливаемым, что затрудняет оценку текущего состояния системы.

Определение 3. Пространство невозстанавливаемых состояний $\mathcal{PN}_n$ линейной системы (1) с постоянными параметрами является *линейным подпространством состояний* X_0 , для которых

$$y(t, t_0, X_0, 0) = 0, \quad t \geq t_0.$$

Теорема 2. Подпространство невозстанавливаемых состояний $\mathcal{PN}_n$ n -мерной линейной системы (1) является нуль-пространством матрицы восстанавливаемости $D = (C \ SA \ SA^2 \ \dots \ SA^{n-1})^T$.

Любое состояние, принадлежащее подпространству невозстанавливаемых состояний, обладает тем свойством, что движение системы из этого состояния при нулевом входном сигнале сходится к нулю. Это соответствует случаю, когда любое состояние, принадлежащее подпространству невозстанавливаемых состояний, принадлежит также подпространству устойчивых состояний системы. Из устойчивости системы следует, что выбор невозстанавливаемой компоненты состояния не приводит к возрастанию ошибки. Систему, обладающую таким свойством, будем называть *обнаруживаемой*.

Определение 4. Линейная система (1) с постоянными параметрами является *обнаруживаемой*, если ее подпространство невозстанавливаемых состояний содержится в подпространстве устойчивых состояний.

Определение 5. Пара (A, C) является *обнаруживаемой*, если система

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t), \\ y(t) = CX(t) \end{cases}\quad (9)$$

является обнаруживаемой.

Теорема 3. Любая асимптотически устойчивая система вида (1) является обнаруживаемой. Любая полностью восстанавливаемая система вида (1) является обнаруживаемой.

Рассмотрим систему (8) и соответствующую ей переходную матрицу $\Phi(t, t_0)$. Тогда система (8) является полностью восстанавливаемой в том и только том случае, если

$$\begin{aligned}M(t, t_1) &= \int_{t_1}^t \Phi(\tau, t) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau > 0 \\ (\forall t_1) \ \& \ (-\infty < t_0 < t_1).\end{aligned}\quad (10)$$

Если

$$\alpha_0 I \leq M(t_1 - \sigma, t_1) \leq \alpha_1 I \quad \forall t_1,$$

$$\beta_0 I \leq \Phi^T(t_1 - \sigma, t_1) M(t_1 - \sigma, t_1) \Phi(t_1 - \sigma, t_1) \leq \alpha_1 I \quad \forall t_1, \\ (\alpha_0, \alpha_1, \beta_0) > 0,$$

то система (8) является равномерно полностью восстанавливаемой.

Равномерная восстанавливаемость гарантирует, что идентификация состояния всегда возможна приблизительно в пределах одинакового интервала времени. Для системы (1) равномерная полная восстанавливаемость следует из полной восстанавливаемости.

Оценка $X_g(t)$

Для оценки ХПЛ сформируем множество $\{X_g(t)\}$, реализовав операцию $\{X(t)\} \setminus \{X_q(t)\}$. Применим для этого подход, предложенный в работах [14, 15].

Представим I_o в виде

$$I_o = I_o^q(J_q) \cup I_o^g(J_g), \quad (11)$$

где $J_q \cup J_g = J \subseteq R$; I_o^q, I_o^g — множества, содержащие информацию о X_q и X_g .

Утверждение 1 [14]. Для идентификации $X_q(t)$ на множестве I_o^q применима модель

$$\hat{X}_q(t) = \hat{A}_q W(t) \quad \forall t \in J_q, \quad (12)$$

где $\hat{A}_q \in R^{2 \times 2}$ — матрица параметров модели, $W = [u \ u']^T$.

На основе модели (12) определяем оценку частного решения $\hat{X}_q(t)$ системы на множестве I_o^q и далее находим оценку общего решения

$$\hat{X}_g(t) = X(t) - \hat{X}_q(t) \quad \forall t \in J_g, \quad (13)$$

где $\hat{X}_g(t) = [\hat{y}_g(t) \ \dot{\hat{y}}_g(t)]^T$.

ХПЛ. Коэффициент структурности системы

Для действительной функции $h(t)$ ХПЛ [17] определяется в виде

$$\chi[h] = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln|h(t)|}{t}, \quad (14)$$

где $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty}$ — верхний предел.

χ_i ($i = \overline{1, m}$) ненулевого решения стационарной системы (1) совпадают с действительными частями собственных чисел λ_i матрицы A . Пусть известна оценка общего решения $X_g(t)$, $\forall t \in J_g$, системы (1). Полагаем, что система является устойчивой и, следовательно, восстанавливаемой и обнаруживаемой. Применим (14) к $\hat{y}_g(t)$:

$$\chi[\hat{y}_g] = \overline{\lim}_{t \rightarrow \bar{t}} \frac{\ln|\hat{y}_g(t)|}{t}, \quad (15)$$

где $\bar{t} \in J_g$ — максимальное значение (верхняя грань) t на интервале $J_g \subset J$.

Предел (15) есть наибольший (максимальный) ХПЛ. Если предел (14) существует, то $\chi[\hat{y}_g]$ является оценкой максимального собственного числа матрицы A . Следовательно, $\chi[\hat{y}_g]$ характеризует степень устойчивости системы (1). Если $m = 2$, то для $\hat{y}_g$ получаем

$$\chi[\dot{\hat{y}}_g] = \overline{\lim}_{t \rightarrow \bar{t}} \frac{\ln|\dot{\hat{y}}_g(t)|}{t}. \quad (16)$$

Также применяется показатель Перрона [18]

$$\eta[h] = \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln|h(t)|}{t}, \quad (17)$$

где $\underline{\lim}_{t \rightarrow \infty}$ — нижний предел.

Идея применения ХПЛ в задачах идентификации изложена в работах [14, 19]. Предлагаемый подход основан на анализе коэффициента структурности (КС)

$$k_s(t, \rho) = \frac{\rho(\hat{y}_g)}{t}, \quad (18)$$

где $\rho(\hat{y}_g) = \rho_g = \ln|\hat{y}_g(t)| \forall t \in \bar{J}_g \subset J_g$, $\bar{J}_g = [t_0, \bar{t}]$ определяется в соответствии с выражением (15).

В отличие от подходов, рассмотренных во введении, излагаемый ниже подход к оценке ХПЛ основан на анализе специального класса структур.

Структуры для оценки ХПЛ

Рассмотрим множества

$$\begin{aligned} I_{k_s} &= \{k_s(t, \rho(\hat{y}_g(t))), t \in \bar{J}_g\}, \\ I_{k'_s} &= \{k_s(t, \rho(\dot{\hat{y}}_g(t))), t \in \bar{J}_g\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Определим на $I_{k_s}, I_{k'_s}$ отображение $S_{k_s, \rho} \rightarrow I_{k_s} \times I_{k'_s}$. Структура $S_{k_s, \rho}$ отражает динамику изменения показателей, зависящих от ХПЛ. На множестве $I_{k'_s}$ рассмотрим функцию, описывающую изменение первой разности КС $k_s(t, \rho(\hat{y}_g(t)))$:

$$\Delta k'_s(t) = k_s(t, \rho(\hat{y}_g(t + \tau))) - k_s(t, \rho(\hat{y}_g(t))), \quad (20)$$

где $\tau > 0$. Далее сформируем множество

$$I_{\Delta k'_s} = \{\Delta k_s(t, \rho(\dot{\hat{y}}_g(t))), t \in \bar{J}_g\} \quad (21)$$

и введем структуру $\mathcal{SK}_{\Delta k'_s, \rho} \rightarrow I_{k_s, \rho} \times I_{\Delta k'_s, \rho}$. Кроме структуры $\mathcal{SK}_{\Delta k'_s, \rho}$ рассмотрим соответствующее ей преобразование

$$\mathcal{L}\mathcal{SK}_{\Delta k'_s, \rho} \rightarrow I_{k_s, \rho} \times B(I_{\Delta k'_s, \rho}), \quad (22)$$

где $B(I_{\Delta k'_s, \rho}) \subset \{-1; 1\}$. Элементы бинарного множества $B(I_{\Delta k'_s, \rho})$ определим следующим образом:

$$b(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta k'_s(t) \geq 0, \\ -1, & \text{если } \Delta k'_s(t) < 0, \end{cases} \quad t \in \bar{J}_g. \quad (23)$$

Замечание 1. Для некоторого класса систем на основе изменения $S_{k_s, \rho}$ можно выбрать границы верхнего предела в выражении (15).

Замечание 2. Выбор области значений функции $b(t)$ определяем удобством ее графического анализа.

Рассмотрим структуры $\mathcal{SK}_{k_s^i} \rightarrow I_{k_s} \times I_{k_s^i}$ и $\mathcal{L}\mathcal{SK}_{\Delta k'_s, \rho}$, где i обозначает i -ую производную $\hat{y}_g(t)$,

$$I_{k_s^i} = \{k_s(t, \rho(\hat{y}_g^{(i)}(t))), t \in \bar{J}_g\}. \quad (24)$$

Наибольший показатель Ляпунова $\chi_l[\hat{y}_g]$ лежит в левой части структуры $\mathcal{SK}_{k_s^i}$. Все остальные показатели $\chi_i[\hat{y}_g]$ совпадают с нижними показателями Перрона $\eta_i[\hat{y}_g]$ и расположены правее от $\chi_l[\hat{y}_g]$. На $\mathcal{SK}_{k_s^i}$ показатели $\chi_i[\hat{y}_g]$ соответствуют локальным минимумам кривой, описывающей изменение $\mathcal{SK}_{k_s^i}$. Расположение минимумов на $\mathcal{SK}_{k_s^i}$ совпадает с изменением знака структуры $\mathcal{L}\mathcal{SK}_{\Delta k'_s, \rho}$. В результате получаем $\mathcal{M}_{LE}^m = \{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_m\}$, где $\hat{\lambda}_i$ есть оценка i -го собственного числа λ_i матрицы A системы (1). При полной $\mathcal{L}$ -обнаруживаемости системы (1) (см. следующий раздел) можно получить полный спектр ХПЛ, которому соответствует полное пространство линейных $\mathcal{L}^m(t)$.

Идентифицируемость и обнаруживаемость ХПЛ

Стационарная система

Рассмотрим вход $u \in \mathcal{PE}_\alpha$, где $\mathcal{PE}_\alpha$ — свойство постоянства возбуждения:

$$\mathcal{PE}_\alpha : u^2(t) \geq \alpha \quad (25)$$

справедливо для $\exists \alpha > 0$ и $\forall t \geq t_0$ на некотором интервале $T > 0$. При таком входе фазовый портрет системы является замкнутым, система (1) — идентифицируемой [15], а модель (10) — идентифицирующей.

Определение 6. Система (1) называется $\mathcal{L}$ -обнаруживаемой, если на основе линеалов можно обнаружить характеристические показатели Ляпунова.

Приведем модификацию теоремы 1 [14] для случая простых ХПЛ.

Теорема 4. *Характеристические показатели Ляпунова системы (1) являются $\mathcal{LP}$ -обнаруживаемыми или полностью обнаруживаемыми, а система (1) имеет порядок m , если функция $b(t)$ на интервале $[t_0, t^*] \subset \bar{J}_g$ ($t^* \leq \bar{t}$) меняет свой знак $(m - 1)$ раз.*

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим систему (1) с устойчивой матрицей состояния A . Пусть корни являются простыми действительными и упорядочены в виде $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_m$. Согласно [20] решение системы (1) является линеалом $\mathcal{L}^m(t)$, который является частью линейного пространства $\mathcal{L}^m(t)$. Так как система является линейной, то для $\mathcal{L}^i(t)$ справедливо вложение [20]

$$0 \equiv \mathcal{L}^0(t) \subset \mathcal{L}^1(t) \subset \dots \subset \mathcal{L}^n(t) \equiv \mathcal{L}^m(t), \quad (26)$$

которое будем называть пирамидой L^m , где l_i — размерность линеала $\mathcal{L}^i(t)$. Разность двух соседних линеалов

$$\mathcal{L}_k = \mathcal{L}^{l_0}(t) \subset \mathcal{L}^{l_k}(t) \setminus \mathcal{L}^{l_{k-1}}(t) \quad (27)$$

будем называть ступенью пирамиды. Ступень имеет вес $m_k = l_k - l_{k-1}$.

l_k соответствует числу базисных решений, которое содержит линеал $\mathcal{L}^{l_k}(t)$. На начальном интервале времени $\mathcal{L}^{l_1}(t)$ содержит показатель λ_m . При увеличении t решение переходит на ступень $\mathcal{L}^{l_2}(t)$ пирамиды. На $\mathcal{L}^{l_2}(t)$ доминирует показатель λ_{m-1} . Это вызывает изменение свойств функции $b(t)$. Далее применяем индукцию по

ступеням пирамиды, пока не получим все пространство $\mathcal{L}^m(t)$. ■

Следствие из теоремы 4. *Если число смен знаков функции $b(t)$ меньше $m - 1$, то пирамида L^m будет содержать ступени, которые являются необнаруживаемыми.*

Доказательство следствия из теоремы 4. Пусть число смен знака υ функции $b(t)$ $\upsilon < m - 1$. Это значит, что вложение (26) будет содержать линеалы $\mathcal{L}^{l_k}(t) = \mathcal{NL}_k(t)$, $k \geq 1$, которые в (26) присутствуют неявно из-за невозможности их обнаружения (вычисления). Но в силу устойчивости системы (1) эти множества $\{\mathcal{NL}_k\}$ существуют неявно. Следовательно, пирамида линеалов L^m будет иметь υ ступеней из-за необнаруживаемости линеалов $\mathcal{NL}_k$: $L_\upsilon = L^m \setminus \{\mathcal{NL}_k\}_{k>0}$. ■

Обозначим $\sigma = m - 1 - \upsilon$. Из следствия из теоремы 5 получаем:

Определение 7. Система (1) называется σ -обнаруживаемой с уровнем υ -невосстанавливаемости, если υ линеалов имеют уровень $\mathcal{NL}_k$, где $k > 0$.

Замечание 3. $\mathcal{LP}$ -обнаруживаемость и восстанавливаемость трактуется как возможность вычисления ХПЛ.

Замечание 4. При $\mathcal{LP}$ -обнаруживаемости системы (1) элементы множества $\mathcal{M}_{LE}^m$ соответствуют ступеням пирамиды L^m .

Теорема 5. *Если система (1) является устойчивой и восстанавливаемой, а структура $\mathcal{LSK}_{\Delta k'_{s,p}}$ меняет знак $m - 1$ раз, то характеристические показатели Ляпунова системы являются $\mathcal{LP}$ -обнаруживаемыми, а структура $\mathcal{SK}_{k'_{s,p}}$ содержит множество $\mathcal{M}_{LE}^m$ характеристических показателей Ляпунова, которое отражает структуру линеала L^m .*

Доказательство теоремы 6 аналогично доказательству теоремы 5 и следует из устойчивости и восстанавливаемости системы (1).

Следствие из теоремы 5. *Если число смен знаков структуры $\mathcal{LSK}_{\Delta k'_{s,p}}$ меньше $m - 1$, то пирамида L^m будет содержать ступени, которые являются необнаруживаемыми.*

Система с периодическими коэффициентами

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A(t)X + Bu, \\ y &= C^T X, \end{aligned} \quad (28)$$

где $X \in R^m$ — вектор состояния; $u \in R$, $y \in R$ — вход и выход системы; $A(t) \in R^{m \times m}$, $B \in R^m$, $C \in R^m$.

Пусть матрица $A(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

A1. $A(t)$ является непрерывной матрицей Фробениуса и ограниченной

$$\|A(t)\| \leq \alpha_A, \quad (29)$$

где $\alpha_A > 0$, $\|\cdot\|$ — норма матрицы.

A2. $A(t)$ является почти периодической, т. е. из любой последовательности [20]

$$A_i(t) = A_i(t - \tau_i) \quad (30)$$

можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся на всей оси к некоторой почти периодической матрице $\bar{A}(t)$.

A3. Матрица $A(t)$ является гурвицевой для почти всех $t \geq 0$.

Применим к системе (21) подход, изложенный в разделе "Оценка $X_g(t)$ ", и получим множество $\{X_g(t)\}$. Рассмотрим класс почти периодических функций по Бору [21].

Определение 8. Числовое множество $\Xi = \{\xi\}$ называется *относительно плотным* на действительной оси $-\infty < x < \infty$, если существует такое число $l > 0$, что каждый отрезок $a \leq x \leq a + l$ длины l содержит хотя бы один элемент Ξ , т. е. при любом a имеем

$$[a, a + l] \cap \Xi \neq \emptyset. \quad (31)$$

Определение 9. Число $T = T_f(\delta)$ называется *почти периодом* функции $f(x)$ с точностью до δ (или δ -почти периодом или δ -смещением), если неравенство

$$|f(x + T_f) - f(x)| < \delta, \quad \delta > 0 \quad (32)$$

имеет место для любого $x \in (-\infty, \infty)$.

Определение 10. Функция $f(x) \in (-\infty, \infty)$ называется *почти периодической в смысле Бора* ($\mathcal{BF}$ -функцией), если относительно плотное множество почти периодов T_f функции $f(x)$ с точностью до δ существует, т. е. существует такое положительное число $l = l(\delta)$, что любой отрезок $[a, a + l]$ содержит, по меньшей мере, одно число T_f , для которого справедливо

$$|f(x + T_f) - f(x)| < \delta \text{ при } x \in (-\infty, \infty). \quad (33)$$

Элементы множества $\{X_g(t)\}$, а следовательно, и $y_g(t)$ принадлежат к классу экспоненциально-синусоидальных функций, и условие (32) может не выполняться. Поэтому следует обеспечить принадлежность $\hat{y}_g(t)$ к классу $\mathcal{BF}$ -функций. Выполним следующие действия [22]. Рассмотрим

некоторую точку $t \in R$ и ее окрестность O_t . Определим среднее значение $\hat{y}_g(t) \quad \forall t \in O_t$:

$$\alpha = \bar{y}_{g, O_t} = \frac{1}{N_t} \sum_i \hat{y}_i, \quad (34)$$

где N_t — число точек на O_t , $t_i \in O_t$ — текущее покрытие интервала O_t с шагом τ .

Для $\forall t \in R$, принадлежащих окрестности $O_{t+T_{yg}}$, получим

$$\pi = \bar{y}_{g, O_{t+T_{yg}}} = \frac{1}{N_{t+T_{yg}}} \sum_i \hat{y}_i. \quad (35)$$

Определение 11 [22]. Функция $\hat{y}_g(t) \in (0, \infty)$ называется *ап-почти периодической* в смысле Бора функцией ($\mathcal{BF}_{\text{ап}}$ -функцией), если для любого $\delta > 0$ существует относительно плотное множество почти периодов T_f функции $\hat{y}_g(t)$ с точностью до δ , т. е. существует положительное число $l = l(\delta)$ такое, что любой отрезок $[a, a + l]$ содержит, по меньшей мере, одно число T_f для которого выполнено неравенство

$$\left| \frac{\hat{y}_g(t + T_f)}{\pi} - \frac{\hat{y}_g(t)}{\alpha} \right| < \delta \text{ при } t \in [0, \infty). \quad (36)$$

Рассмотрим структуру $\mathcal{SK}_{\Delta k'_{s,p}}$, определенную на $I_{k_{s,p}} \times I_{\Delta k'_{s,p}}$ и описываемую функцией $f_{sk}(t) : k_s \rightarrow \Delta k_s$. Функция $k_s(t)$ является $\mathcal{BF}_{\text{ап}}$ -функцией. Поэтому $f_{sk}(t)$ будет содержать области $\mathcal{D}_{sk}$, которые имеют резко изменяющуюся амплитуду.

Определение 12. [14]. Область $\mathcal{D}_{sk}$ функции f_{sk} называется *ап-областью* на интервале $J_{sk} = [t, t + T]$ ($T > 0$) изменения t , если она соответствует изменению $\mathcal{BF}_{\text{ап}}$ -функции $k_s(t)$ на этом интервале.

Теорема 6 [22]. Если система (28) является устойчивой и содержит простые собственные числа, то структуры $\mathcal{SK}_{k'_{s,p}}$, $i = \overline{1, m}$, содержат информацию о характеристических показателях Ляпунова.

Теорема 7 [22]. Если система (28) является устойчивой и восстанавливаемой, а функция $f_{sk}(t)$ на интервале $[t_0, t^*] \subset \bar{J}_g$ ($t^* \leq \bar{t}$) содержит не менее m областей $\mathcal{D}_{sk}$, то система (28) имеет порядок m и является $\mathcal{LP}$ -идентифицируемой ($\mathcal{LP}$ -обнаруживаемой).

Доказательство теоремы 7 следует из теоремы 6.

Так как система (28) является устойчивой и восстанавливаемой, то согласно теореме 7

она является идентифицируемой на множестве $\{SK_{k_{s,p}}^i\}$. В работе [22] показано, что расположение локальных минимумов на $SK_{k_{s,p}}^i$ совпадает с областями $\mathcal{D}_{sk}^i$ структуры $SK_{\Delta k_{s,p}}^i$. В результате анализа $\mathcal{D}_{sk}^i$ получаем множество $\mathcal{M}_{LE}$, содержащее оценки показателей системы (28). Мощность $\mathcal{M}_{LE}$ может не совпадать с числом характеристических показателей системы. $\mathcal{M}_{LE}$ характеризует доступное множество линеалов системы (28).

Обозначим κ_m верхнюю оценку наименьшего $\eta_i[\hat{y}_g]$.

Теорема 8. Если: а) для системы (28) выполняются предположения А1–А3, б) система (28) является восстанавливаемой, в) элементы множества $\{k_{s,p}^i(t)\}$ являются $\mathcal{WF}_{\alpha\pi}$ -функциями, г) структура $SK_{\Delta k_{s,p}}^i$ содержит точку, в которой изменяется знак производной, то показатель κ_m является обнаруживаемым.

Доказательство теоремы 8. Так как выполняются предположения А1–А3, то система является устойчивой и восстанавливаемой. Согласно теореме 6 система ХПЛ является идентифицируемой (обнаруживаемой) на структуре $SK_{k_{s,p}}^i$. $k_{s,p,j}^i(t) \in \{k_{s,p}^i(t)\}$ ($j > 0$) является $\mathcal{WF}_{\alpha\pi}$ -функцией, поэтому структура $SK_{k_{s,p}}^i$ будет содержать локальные минимумы, глобальный минимум которых будут являться верхней оценкой κ_m наименьшего $\eta_i[\hat{y}_g]$, что подтверждает обнаруживаемость $\eta_i[\hat{y}_g]$. ■

Замечание 5. Так как решение принимается на основе анализа нескольких структур $SK_{k_{s,p}}^i$ ($i \geq 1$), то в качестве κ_m выбираем верхнюю границу из $\kappa_{m,i}$.

Замечание 6. Подход, основанный на анализе $SK_{k_{s,p}}^i$, позволяет получить оценки наименьшего показателя Ляпунова $\eta_i[\hat{y}_g]$. Этим он отличается от процедур, предлагаемых в литературе. Если структура $SK_{\Delta k_{s,p}}^i$ содержит единичное резкое изменение значения, то это является признаком того, что $SK_{k_{s,p}}^i$ содержит оценку $\eta_m[\cdot]$. Так как $|\eta_m[\cdot]| > |\chi_i[\cdot]|$, где $i = \overline{1, m-1}$, то $\eta_m[\cdot]$ равен κ_m и называется верхней оценкой наименьшего ХПЛ. Связано это с тем, что соответствующий линеал $\mathcal{L}^m(t)$ имеет минимальную область определения. Функция $\hat{y}_g(t)$ на $\mathcal{L}^m(t)$ не является $\alpha\pi$ -почти периодической, так ее параметры α , π быстро убывают и, следовательно, условие (32) не выполняется. Поэтому линеал $\mathcal{L}^m(t)$ будет содержать только одно значение, которое соответствует κ_m .

Теорема 9. Пусть: 1) для системы (28) выполняются предположения А1–А3, 2) система (28) является восстанавливаемой, 3) элементы множества $\{k_{s,p}^i(t)\}$ являются $\mathcal{WF}_{\alpha\pi}$ -функциями, 4) структура $SK_{\Delta k_{s,p}}^i$ содержит не менее m областей $\mathcal{D}_{sk}^v$ ($v \leq m$), которым на структуре $SK_{k_{s,p}}^i$ соответствуют локальные минимумы. Тогда множество $\mathcal{M}_{LE}$ является $\mathcal{LP}$ -обнаруживаемым или полностью обнаруживаемым.

Доказательство теоремы 9. Система (28) является устойчивой и восстанавливаемой, а структура $SK_{\Delta k_{s,p}}^i$ содержит m областей $\mathcal{D}_{sk}^v$. $SK_{\Delta k_{s,p}}^i$ является производной от $SK_{k_{s,p}}^i$. Поэтому на $SK_{k_{s,p}}^i$ областям $\mathcal{D}_{sk}^v$ будут соответствовать локальные минимумы, отражающие положение ХПЛ. Это следует из теорем 7, 8. Следовательно, множество $\mathcal{M}_{LE}$ является идентифицируемым или $\mathcal{LP}$ -обнаруживаемым. ■

Замечание 7. Так как собственные числа $\lambda_i(t)$ матрицы A являются периодическими функциями времени, то линеалы $\mathcal{L}^i(t)$ и $\mathcal{L}^{i+1}(t)$ могут пересекаться [22]. Этот случай может приводить к бесконечному спектру характеристических показателей Ляпунова.

Система (28) является нестационарной, поэтому необходимо оценить область, которой принадлежит множество $\mathcal{M}_{LE}$. Это связано с тем, что множество $\mathcal{M}_{LE}$ может быть большим (см. замечание 7). Нетрудно заметить, что снизу эта область ограничена показателем κ_m .

Естественно, можно указать допустимую область для $\mathcal{M}_{LE}$ и число, определяющее подвижность старшего показателя Ляпунова. Снизу эта область ограничена показателем κ_m . При выборе данных параметров можно ограничиться временным диапазоном $[0, \bar{t}]$, где $\bar{t}$ выбирается согласно (15). Выбор области изменения χ_1 можно осуществить на основе анализа структуры $SK_{\Delta k_{s,p}}^i$. Так как индикатором наличия χ_1 является область $\mathcal{D}_{sk}^1 \subset SK_{\Delta k_{s,p}}^i$, то на $SK_{k_{s,p}}^i$ $\mathcal{D}_{sk}^1$ будет соответствовать фрагмент $\mathcal{V}_{k_{s,p}}^1$, который изменяется на интервале $J_{k_{s,p}}^1$. Следовательно, $\chi_1 \in J_{k_{s,p}}^1$. Тогда допустимая граница подвижности старшего показателя χ_1 определяется [22] как

$$\chi_1 \leq \sup_{k_{s,p}} J_{k_{s,p}}^1. \quad (37)$$

Итак, справедлива

Теорема 10. Пусть выполняются условия теоремы 9. Тогда допустимая граница подвижности старшего показателя χ_1 удовлетворяет условию (37).

В рамках рассматриваемого подхода встает вопрос о критерии оценки $\mathcal{LP}$ -обнаруживаемости системы (28). В условиях неопределенности адекватные показатели предложить сложно. Такие теоретические показатели [20], как прочность и достижимость, не поддаются проверке в условиях неопределенности. Так как результатом $\mathcal{LP}$ -обнаруживаемости являются множество $\mathcal{M}_{LE}$ и граница подвижности (37), то следует использовать результаты анализа специального класса структур. Для подтверждения обнаруживаемости множества $\mathcal{M}_{LE}$ применим подход, основанный на проверке χ -адекватности полученных оценок ХПЛ [22].

Рассмотрим структуру $S_{\hat{y}_g, \hat{y}_g}$, описываемую функцией $f_{\hat{y}_g, \hat{y}_g} : \hat{y}_g \rightarrow \hat{y}_g$ в пространстве $R_y = (\hat{y}_g, \hat{y}_g)$. Так система (28) удовлетворяет условиям А1-А3, то $S_{\hat{y}_g, \hat{y}_g}$ будет содержать области, которые отражают α -почти периодическое поведение системы. Далее рассмотрим структуры $SL_{\Delta k_{s,p}^i}$, $SL_{k_{s,p}^i}$, которые описываются функциями

$$f_{SL_{k_{s,p}^i}} : \hat{y} \rightarrow k_{s,p}^i, f_{SL_{\Delta k_{s,p}^i}} : \hat{y} \rightarrow \Delta k_{s,p}^i. \quad (38)$$

Определение 13. Оценки ХПЛ χ_i являются χ -адекватными в пространстве R , если области их определения совпадают с областями α -почти периодичности структуры $S_{\hat{y}_g, \hat{y}_g}$.

По аналогии с $\mathcal{D}_{sk} \subset SK_{\Delta k_{s,p}^i}$ введём фрагменты $\mathcal{D}_{sl}^j \subset SL_{\Delta k_{s,p}^i}$ ($j \geq 1$) в пространстве R_y . Обозначим $\text{dom } \mathcal{D}_{sl}^j$ — область определения $\mathcal{D}_{sl}^j$. Справедлива следующая модификация теоремы 3 [22].

Теорема 11. Пусть: 1) система (28) является устойчивой и восстанавливаемой, 2) множество $\mathcal{M}_{LE}$ является $\mathcal{LP}$ -обнаруживаемым, 3) области определения фрагментов $\mathcal{D}_{sl}^j$ структуры $SL_{\Delta k_{s,p}^i}$ совпадают с областями α -почти периодичности структуры $S_{\hat{y}_g, \hat{y}_g}$. Тогда оценки элементов множества $\mathcal{M}_{LE}$ являются χ -адекватными областям α -почти периодичности $S_{\hat{y}_g, \hat{y}_g}$.

Доказательство теоремы 11. Согласно теореме 7 функция $f_{sk}(t)$ содержит не менее m областей $\mathcal{D}_{sk}^j$. Структуры $SK_{\Delta k_{s,p}^i}$ и $SL_{\Delta k_{s,p}^i}$ имеют одинаковую область значений. Данное утверждение справедливо и для $\mathcal{D}_{sk}^j$, $\mathcal{D}_{sl}^j$. Области $\mathcal{D}_{sk}^j$, $\mathcal{D}_{sl}^j$ определяют изменение ХПЛ. Из равенства областей значений $\mathcal{D}_{sk}^j$, $\mathcal{D}_{sl}^j$ следует конгруэнтность областей значений $\mathcal{D}_{sk}^j$, $\mathcal{D}_{sl}^j$. Если области определения фрагмента $\mathcal{D}_{sl}^j$ структуры $SL_{\Delta k_{s,p}^i}$ и области α -почти периодичности $S_{\hat{y}_g, \hat{y}_g}$ совпадают,

то в силу наличия зависимости между функциями $f_{SL_{k_{s,p}^i}}$ и $f_{SL_{\Delta k_{s,p}^i}}$ получаем, что некоторая совокупность элементов множества $\mathcal{M}_{LE}$ покрывает соответствующую α -почти периодическую область $S_{\hat{y}_g, \hat{y}_g}$. Следовательно, оценки χ_i являются χ -адекватными в пространстве R_y . ■

Примеры

1. Рассмотрим систему, фазовый портрет которой показан на рис. 1. Известно информационное множество (4). Вход $u(t) = 5 + 2\sin(0,2\pi t)$. Из рис. 1 следует, что в системе присутствуют колебания.

Применение модели (12) на интервале $\hat{A}_q = [0,302; 0,189; -2,03]^T$ позволяет получить общее решение системы. Коэффициент детерминации модели равен 0,95. На основе модели (10) получены оценки $\hat{y}_g(t)$ и $\hat{y}_g(t)$. Вектор параметров модели для определения $\hat{y}_g(t)$ равен $[-0,17; -0,89; 0,27]^T$. Фазовый портрет системы показан на рис. 2 и подтверждает принадлежность к системе с периодическими коэффициентами.

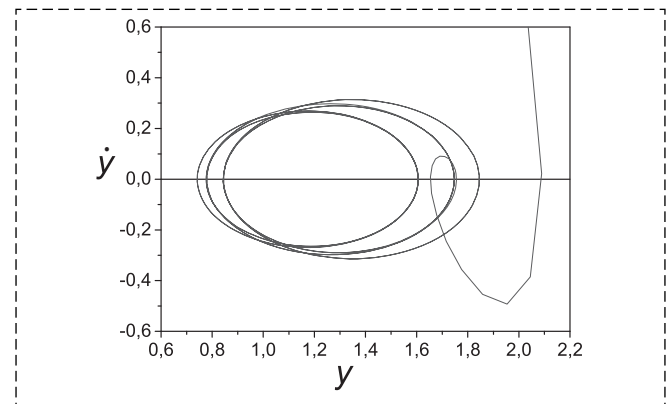


Рис. 1. Фазовый портрет системы

Fig. 1. Phase portrait of system

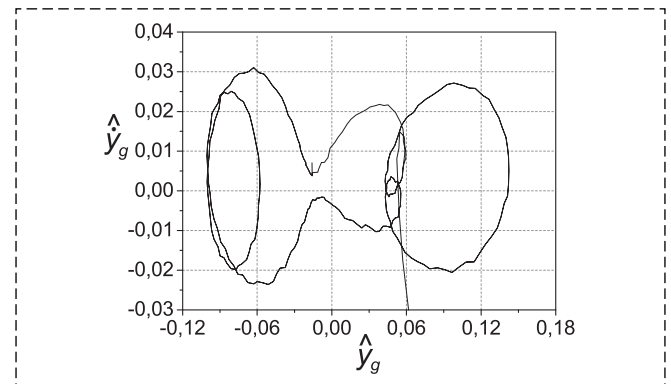


Рис. 2. Фазовый портрет системы в пространстве $R_y = (\hat{y}_g, \hat{y}_g)$

Fig. 2. System phase portrait in space $R_y = (\hat{y}_g, \hat{y}_g)$

Из рисунков следует, что система является устойчивой и восстанавливаемой. Следовательно, ее ХПЛ должны быть обнаруживаемые. Результаты, подтверждающие $\mathcal{LP}$ -обнаруживаемость ХПЛ, представлены на рис. 3 (см. вторую сторону обложки), где показаны структуры $\mathcal{SK}_{\Delta k_{s,p}^1}$ и $\mathcal{SK}_{\Delta k_s^1}$, Δk_s^1 имеет вид (17),

$$k_s^1(t, \rho) = \frac{\rho(\dot{y}_g(t))}{t}. \quad (39)$$

На основе анализа $\mathcal{SK}_{\Delta k_{s,p}^1}$ получаем $\mathcal{M}_{LE} = \{-1,8; [-1,21; -0,88]\}$. Применение теоремы 7 показывает, что порядок системы равен 2. Верхняя оценка для наименьшего ХПЛ $\kappa_m = -1,8$. Допустимая граница подвижности старшего показателя χ_1 равна $-0,8$. На интервале изменения $k_s \in [-0,2; -0,13]$ имеем еще одно наблюдаемое множество ХПЛ $\mathcal{M}_{LE}^1$, что подтверждает вывод, приведенный в замечании 7. Пример оценки χ -адекватности ХПЛ демонстрирует рис. 4 (см. вторую сторону обложки).

Вернемся к исходной системе (28). Рассматривалась система второго порядка с матрицей

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1(t) & a_2(t) \end{bmatrix}, \quad (40)$$

$$a_1(t) = -3 + 0,2 \sin(0,02\pi t),$$

$$a_2(t) = -4 + 0,3 \sin(0,04\pi t).$$

Собственные числа матрицы A изменялись в диапазоне $\lambda_1(t) \in [-1,325; -0,819]$, $\lambda_2(t) \in [-2,37; -3,48]$. Результаты моделирования подтверждают обнаруживаемость ХПЛ системы (28).

2. На рис. 5 (см. вторую сторону обложки) показаны результаты моделирования для системы (1) с матрицей A и спектром

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad \sigma(A) = (-1; -2; -3). \quad (41)$$

С помощью подхода, предложенного в разделе "Оценка $X_g(t)$ ", получено множество $\{y_g(t), 0 \leq t \leq 16 \text{ с}\}$. Сформированы множества $I_{\Delta k_s^1}$, $I_{k_s^1}$, $I_{k_i^1}$, $i = 1, 2$, на основе обработки $\hat{y}_g(t)$. На рис. 5 (см. вторую сторону обложки) показаны результаты оценки порядка системы и $\mathcal{LP}$ -обнаруживаемости ХПЛ на основе теоремы 4, где используются следующие обозначения:

$$k_s = k_s(t, \rho),$$

$$k_s^1 = k_s(t, \rho(\hat{y}_g(t))), k_s^2 = k_s(t, \rho(\ddot{y}_g(t))).$$

Цифрами 1, 2, 3 на рис. 5 (см. вторую сторону обложки) обозначены оценки ХПЛ (собственных чисел λ_i , $i = 1, 2, 3$). Результаты, представленные на рисунке, показывают, что ХПЛ являются обнаруживаемыми, а система идентифицируемой и восстанавливаемой.

3. Рассмотрим модель однозвенного роботоманипулятора с гибким шарниром, описываемого системой уравнений [23]

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{J_m} & -\frac{b}{J_m} & \frac{k}{J_m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{J_l} & 0 & -\frac{k}{J_l} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k_\tau}{J_m} u \\ 0 \\ -\frac{mgh}{J_l} \sin x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (42)$$

где x_1 и x_2 — угловые положения вала двигателя и звена; u — управляющий крутящий момент двигателя; J_m , J_l — моменты инерции двигателя и звена; k — постоянная упругости; b — коэффициент вязкого трения; k_τ — коэффициент усиления усилителя; m — масса звена; h — центр масс и g — ускорение свободного падения. Система (42) учитывает влияние вязкого трения и упругой деформации гибкого соединения. Вектор $Y = [x_1, x_3]^T$ доступен для измерения. Параметры системы: $J_m = 0,037 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $J_l = 0,093 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $\kappa = 0,18 \text{ Н} \cdot \text{м/рад}$, $B = 0,0083 \text{ Н} \cdot \text{м/рад}$, $m = 0,21 \text{ кг}$, $g = 9,81 \text{ м/с}^2$, $h = 0,15 \text{ м}$, $k_\tau = 0,18 \text{ Н} \cdot \text{м/В}$.

На рис. 6 представлен фазовый портрет системы по каналу x_1 — x_2 . Вход $u(t)$ не удовлетворяет условию постоянства возбуждения. Но несмотря на это в системе возникают затухающие колебания. Система является устойчивой и, следовательно, восстанавливаемой. Поэтому, несмотря на не замкнутость фазового портрета (условие h -идентифицируемости), внутренние колебания в системе позволяют говорить об идентифицируемости системы.

Структуры $\mathcal{SK}_{k_{s,p}^1, k_{s,p}^2}$, $\mathcal{LSK}_{\Delta k_{s,p}^2}$ для оценки характеристических показателей Ляпунова показаны на рис. 7 (см. вторую сторону обложки). Здесь $\hat{y}_1$ — оценка x_2 ,

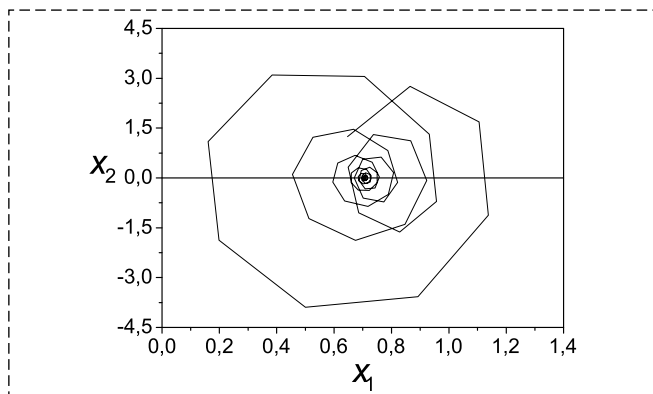


Рис. 6. Фазовый портрет системы по каналу " x_1-x_2 "
Fig. 6. System (42) phase portrait " x_1-x_2 "

$$k_s^1(t, \rho) = \frac{\rho(y_1(t))}{t}, k_s^2(t, \rho) = \frac{\rho(\hat{y}_1(t))}{t}, \quad (43)$$

$$LSK_{\Delta k_{s,p}^2} \rightarrow I_{k_{s,p}^1} \times B(I_{\Delta k_{s,p}^2}).$$

Так как система является устойчивой, то рассматриваются только отрицательные ХПЛ. Наличие колебаний отражает изменение функции $b(t)$, которая на рис. 7 (см. вторую сторону обложки) представлена структурой $LSK_{\Delta k_{s,p}^2}$, описываемой функцией $LSK_{\Delta k_{s,p}^2} \rightarrow I_{k_{s,p}^2} \times B(I_{\Delta k_{s,p}^2})$. Переменные состояния системы являются $\mathcal{BF}_{\text{оп}}$ -функциями. Применим теорему 8. Из рис. 7 следует, что порядок системы равен 4, известна оценка показателя Перрона (наименьшего ХПЛ, которому соответствует значение $-0,7$). Область, которой принадлежит наибольший ХПЛ $\chi_1[x_2]$, обозначена эллипсом $\mathcal{B}_\chi$. Согласно работе [15] $\mathcal{B}_\chi$ соответствует наличию комплексного корня. Что касается третьего $\chi_3[x_2]$, то он лежит между $\eta[x_2]$ и областью $\mathcal{B}_\chi$. Он принадлежит области, приближающейся снизу к значению $k_s^2 = 0$. Ли-неал, соответствующий $\chi_l[x_2]$, является линейным зависимым, и поэтому система является σ -обнаруживаемой с уровнем $\nu = 1$. Спектр корней системы $\sigma(\lambda) = [-0,65 \ 0 \ \pm 0,8 \ +8,16i]$. Система (42) является чувствительной к входным воздействиям.

Рассмотрим линеаризованную систему (42). Результаты оценки идентифицируемости и обнаруживаемости ХПЛ представлены на рис. 8 и рис. 9 (см. вторую сторону обложки). Фазовый портрет системы показан на рис. 8 в пространстве $(x_{l,1}, x_{l,2})$, где $x_{l,1}, x_{l,2}$ — переменные состояния линеаризованной системы. Аналогичный вид фазовый портрет имеет и в пространстве $(x_{l,3}, x_{l,4})$. Система является устойчивой, и в ней возникают затухающие колебания. Следовательно, система является

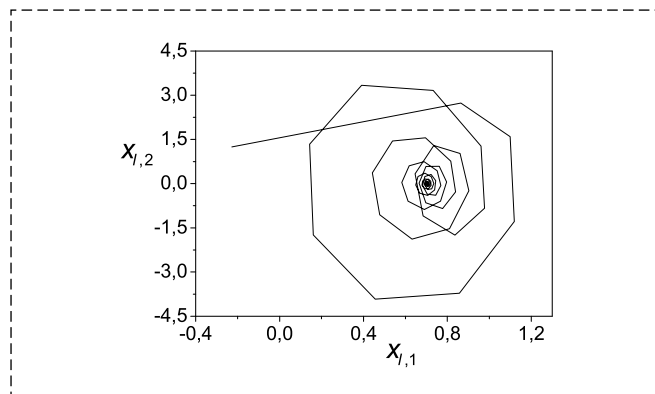


Рис. 8. Фазовый портрет линеаризованной системы (42)
Fig. 8. Phase portrait of linearized system (42)

идентифицируемой, а переменные состояния являются $\mathcal{BF}_{\text{оп}}$ -функциями. На рис. 9 (см. вторую сторону обложки) представлены структуры $SL_{k_{s,p}^1, k_{s,p}^2}$, $LSK_{\Delta k_{s,p}^2}$, подтверждающие обнаруживаемость ХПЛ:

$$SL_{k_{s,p}^1, k_{s,p}^2} \rightarrow I_{k_{s,p}^1} \times I_{k_{s,p}^2},$$

$$LSK_{\Delta k_{s,p}^2} \rightarrow I_{k_{s,p}^1} \times B(I_{\Delta k_{s,p}^2}), \quad (44)$$

где

$$k_s^{1,l}(t, \rho) = \frac{\rho(x_{l,1}(t))}{t}, k_s^{2,l}(t, \rho) = \frac{\rho(x_{l,2}(t))}{t}. \quad (45)$$

Из рис. 9 следует, что линеаризованная система (29) содержит пару комплексных показателей $\chi_l[x_{l,2}]$, а порядок системы равен 4. Действительные части этих показателей близки. Итак, линеаризованная система (42) является идентифицируемой, множество ХПЛ обнаруживаемо. Следует отметить, что линеаризация изменяет расположение спектра ХПЛ и влияет на степень устойчивости. Но при этом исключается показатель, лежащий на границе устойчивости. Еще раз отмечаем, что система является очень чувствительной к изменению параметров.

Закключение

Рассмотрена проблема идентифицируемости, восстанавливаемости и обнаруживаемости ХПЛ. Приведены условия, позволяющие оценить возможность вычисления ХПЛ. Они основаны на анализе свойств геометрических структур, отражающих динамику изменения характеристических показателей. Получены условия σ -обнаруживаемости с уровнем ν -невосстанавливаемости и $\mathcal{LP}$ -обнаруживаемости ХПЛ стационарной системы. Рассмотрен случай линейной системы с периодическими

коэффициентами и получены условия обнаруживаемости ее ХПЛ. Показано, что для некоторого класса нелинейных систем линеаризация может приводить к существенному изменению распределения ХПЛ.

Список литературы

1. **Thamilmaran K., Senthilkumar D. V., Venkatesan A., Lakshmanan M.** // Experimental realization of strange nonchaotic attractors in a quasiperiodically forced electronic circuit. E. 2006. Vol. 74, N. 9. 036205.
2. **Porcher R., Thomas G.** Estimating Lyapunov exponents in biomedical time series // Physical Review E. 2001. Vol. 64, N. 1. 010902(R).
3. **Holyst J. A., Urbanowicz K.** Chaos control in economical model by time-delayed feedback method // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2000. Vol. 287, Iss. 3–4. P. 587–598.
4. **Macek W. M., Redaelli S.** Estimation of the entropy of the solar wind flow // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62, N. 5. P. 6496–6504.
5. **Skokos Ch.** The Lyapunov Characteristic Exponents and Their Computation // Lect. Notes Phys. 2010. Vol. 790. P. 63–135.
6. **Gencay R., Dechert W. D.** An algorithm for the n Lyapunov exponents of an n-dimensional unknown dynamical system // Physica D 59. 1992. P. 142–157. North-Holland.
7. **Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A.** Determining Lyapunov exponents from a time series // Phys. D Nonlinear Phenomena. 1985. Vol. 16, N. 3. P. 285–317. doi: 10.1016/0167-2789(85)90011-9.
8. **Sano M., Sawada Y.** Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series // Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 55, N. 10. P. 1082–1085.
9. **Rosenstein M. T., Collins J. J., De Luca C. J.** A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets // Phys. 1993. Vol. 65, N. 1–2. P. 117–134.
10. **Balcerzak M., Pikunov D., Dabrowski A.** The fastest, simplified method of Lyapunov exponents spectrum estimation for con-

tinuous-time dynamical systems // Nonlinear Dyn. 2018. Vol. 94. P. 3053–3065.

11. **Takens F.** Detecting strange attractors in turbulence. Springer, Coventry, England, 1981.
12. **Soloviev V., Bielinskiy A., Serdyuk O., Solovieva V., Semerikov S.** Lyapunov exponents as indicators of the stock market crashes. 2020. URL: <http://ds.knu.edu.ua/jspui/handle/123456789/3080>.
13. **Глызин Д. С., Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.** Метод динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. № 2. С. 268–273.
14. **Karabutov N.** Structural methods of estimation Lyapunov exponents linear dynamic system // International journal of intelligent systems and applications. 2015. Vol. 7, N. 10. P. 1–11.
15. **Карабутов Н. Н.** Структуры в задачах идентификации: Построение и анализ. М.: Ленанд, 2018. 312 с.
16. **Квакернаак Х., Сиван Р.** Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977, 650 с.
17. **Ляпунов А. М.** Общая задача об устойчивости движения. М.: Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1950. 471 с.
18. **Изобов Н. А.** Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск: БГУ, 2006. 319 с.
19. **Карабутов Н. Н.** Структурная идентификация систем: анализ информационных структур. М.: УРСС/ Книжный дом "Либроком", 2009. 176 с.
20. **Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.** Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.
21. **Демидович Б. П.** Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
22. **Karabutov N.** About Lyapunov exponents identification for systems with periodic coefficients // International journal of intelligent systems and applications. 2018. Vol. 10, N. 11. P. 1–10.
23. **Veluvolu K., Soh Y.** Fault reconstruction and state estimation with sliding mode observers for lipschitz non-linear systems // IET Control Theory & Applications. 2011. Vol. 5(11). P. 1255–1263.

Identifiability and Detectability of Lyapunov Exponents for Linear Dynamical Systems

N. N. Karabutov, kn22@yandex.ru,

MIREA — Russian Technological University, Moscow, 119454, Russian Federation

Corresponding author: **Karabutov Nikolay N.**, DTS, Professor, MIREA — Russian Technological University Moscow, 119454, Russian Federation, e-mail: kn22@yande.ru

Accepted on February 24, 2022

Abstract

Lyapunov exponents (LE) are an effective tool for analyzing the qualitative characteristics of dynamic systems. Identifiability, recoverability and detectability problem of Lyapunov exponents not studied. This problem is actual. We propose an approach for verifying identifiability, recoverability and detectability. The approach bases on the analysis of geometric frameworks depending on the structural properties coefficient of the system. The structural properties coefficient reflects the change in Lyapunov exponents, and geometric frameworks are a source for deciding on the type of indicators. We obtain conditions for the complete detectability of Lyapunov exponents. These conditions guarantee the receipt of indicators set. We propose a criterion of σ -detectability with a level of ψ -non-recoverability and give a method to evaluate it. We propose the method for verifying the adequacy of the Lyapunov exponents set. The permissible mobility border of the largest Lyapunov exponent obtains.

Keywords: dynamic system, Lyapunov exponent, identifiability, recoverability, detectability, lineal, almost periodic function, robot, structure, structural properties coefficient.

For citation:

Karabutov N. N. Identifiability and Detectability of Lyapunov Exponents for Linear Dynamical Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 7, pp. 339–350.

DOI: 10.17587/mau.23.339-350

References

1. **Thamilmaran K., Senthilkumar D. V., Venkatesan A., Lakshmanan M.** Experimental realization of strange nonchaotic attractors in a quasiperiodically forced electronic circuit, *Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys*, 2006, vol. 74(3 Pt 2):036205.
2. **Porcher R., Thomas G.** Estimating Lyapunov exponents in biomedical time series, *Physical Review E*, 2001, vol. 64, no. 1, 010902(R).
3. **Holyst J. A., Urbanowicz K.** Chaos control in economical model by time-delayed feedback method, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2000, vol. 287, iss. 3–4, pp. 587–598.
4. **Macek W. M., Redaelli S.** Estimation of the entropy of the solar wind flow, *Phys. Rev. E*, 2000, vol. 62, no. 5, pp. 6496–6504.
5. **Skokos Ch.** The Lyapunov Characteristic Exponents and Their Computation, *Lect. Notes Phys.*, 2010, vol. 790, pp. 63–135.
6. **Gencay R., Dechert W. D.** An algorithm for the n Lyapunov exponents of an n-dimensional unknown dynamical system, *Physica D59*, 1992, pp. 142–157.
7. **Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A.** Determining Lyapunov exponents from a time series, *Phys. D Nonlinear Phenomena*, 1985, vol.16, no. 3, pp. 285–317, doi: 10.1016/0167-2789(85)90011-9.
8. **Sano M., Sawada Y.** Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series, *Phys. Rev. Lett*, 1985, vol. 55, no. 10, pp. 1082–1085.
9. **Rosenstein M. T., Collins J. J., De Luca C. J.** A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets, *Physica D65*, 1993, vol. 65, no. 1–2, pp. 117–134.
10. **Balcerzak M., Pikunov D., Dabrowski A.** The fastest, simplified method of Lyapunov exponents spectrum estimation for continuous-time dynamical systems, *Nonlinear Dyn.*, 2018, vol. 94, pp. 3053–3065.
11. **Takens F.** Detecting strange attractors in turbulence, Springer, Coventry, England, 1981.
12. **Soloviev V., Bielinskyi A., Serdyuk O., Solovieva V., Semerikov S.** Lyapunov exponents as indicators of the stock market crashes, 2020, available at: <http://ds.knu.edu.ua/jspui/handle/123456789/3080>.
13. **Glyzin D. S., Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.** The Dynamic Renormalization Method for Finding the Maximum Lyapunov Exponent of a Chaotic Attractor, *Differential Equations*, 2005, vol. 41, pp. 284–289.
14. **Karabutov N.** Structural methods of estimation Lyapunov exponents linear dynamic system, *International journal of intelligent systems and applications*, 2015, vol. 7, no. 10, pp.1–11.
15. **Karabutov N. N.** Frameworks in identification problems: Construction and analysis, Moscow, Lenand, 2018, 312 p.
16. **Kwakernaak H., Sivan R.** Linear optimal control systems, Wiley-Interscience, A division of John Wiley & SONS, INC, New York, 1972, 576 p.
17. **Lyapunov A. M.** General Problem of the Stability of Motion, Taylor & Francis, London, Washington, DC, 1992.
18. **Izobov N. A.** Introduction in theory of Lyapunov indexes, Minsk BGU, 2006, 319 p.
19. **Karabutov N. N.** Structural Identification of Systems. Analysis of Information Structures, Moscow, URSS/ Librokom, 2009, 176 p.
20. **Bylov B. E., Vinograd R. E., Grobman D. M., Nemytsky V. V.** Theory of Lyapunov indexes and its application to stability problems, Moscow, Nauka, 1966, 576 p.
21. **Demidovich B. P.** Lektion on mathematical stability, Moscow, Nauka, 1967, 472 p.
22. **Karabutov N.** About Lyapunov exponents identification for systems with periodic coefficients, *International journal of intelligent systems and applications*, 2018, vol. 10, no. 11, pp.1–10.
23. **Veluvolu K., Soh Y.** Fault reconstruction and state estimation with sliding mode observers for lipschitz non-linear systems, *IET Control Theory & Applications*, 2011, vol. 5(11), pp. 1255–1263.



**KAZAN
DIGITAL
WEEK 2022**
21–24 СЕНТЯБРЯ

Кабинет Министров Республики Татарстан
под эгидой правительства Российской Федерации
21–24 сентября 2022 года
в столице Республики Татарстан г. Казани проводит

Международный форум KAZAN DIGITAL WEEK – 2022 (KDW–2022)

ТЕМАТИЧЕСКИЕ НАПРАВЛЕНИЯ KDW–2022:

- интеллектуальные транспортные системы;
- цифровые технологии в сфере государственного и муниципального управления;
- цифровая индустрия 4.0;
- кибербезопасность нового времени;
- экосистема финтех;
- инновации, интегрированные в бизнес;
- цифровые технологии в здравоохранении и медицине;
- цифровые технологии в образовании;
- цифровые технологии в культуре;
- цифровые технологии в сфере сельского хозяйства.

Информация об условиях участия в различных мероприятиях форума, алгоритм регистрации, информация о публикации научных статей и презентаций, а также полный архив материалов KDW–2021 представлены на сайте kazandigitalweek.ru/kazandigitalweek.com.

ПРИГЛАШАЕМ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЕЙ

Статьи принимаются в строгом соответствии с тематическими направлениями. Автор должен указать тематическое направление статьи. Все статьи проходят проверку программой "Антиплагиат" и двустороннее слепое рецензирование. После отбора экспертной группой статьи будут опубликованы в сборнике материалов форума. Возможна публикация в журналах, включенных в международную реферативную базу данных Scopus и рецензируемых ВАК, индексируемых в РИНЦ. Статьи принимаются до 1 июня 2022 года на электронный адрес: org@kazandigitalweek.ru.

Запрос об условиях участия в выставке направлять на электронный адрес: Artem.Safin@tatar.ru