

А. В. Елисеев, канд. техн. наук, доц., eavsh@ya.ru,
А. П. Хоменко, д-р техн. наук, проф., homenko_ap@irgups.ru,
Иркутский государственный университет путей сообщения

Проблема гашения колебаний в механических системах: системный анализ, моделирование, управление

Развиваются системные подходы в задачах динамики машин транспортного и технологического назначения, связанных с обеспечением режимов динамического гашения колебаний и выявлением ряда специфических эффектов, характерных для технических объектов с рабочими органами, представляющих собой твердые тела. Используются методы структурного математического моделирования, в рамках которых механической колебательной системе, рассматриваемой в качестве расчетной схемы технического объекта, сопоставляется структурная схема эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления. В качестве модельной расчетной схемы используется механическая колебательная система с сосредоточенными параметрами.

Показано, что режимы динамического гашения реализуются через фиксацию неподвижных точек, названных центрами вращения (или колебаний). Предложена методика аналитической оценки возможностей формирования динамических состояний на основе использования передаточных функций обобщенной обратной связи, коэффициентов связности движений по координатам, форм динамического взаимодействия элементов системы при одновременном действии двух периодических возмущений.

В рамках рассматриваемой интерпретации ключевой характеристикой механической колебательной системы является характеристическое частотное уравнение и его преобразования. Характеристическое уравнение в зависимости от выбранных координат определяет возможность введения понятий приведенной жесткости, связности движений элементов или структурных образований в режиме свободных колебаний системы или с учетом внешних воздействий силового или кинематического характера.

Наряду с понятием динамического состояния, которое реализуется на определенной частоте и связано с обнулением амплитуды колебаний или достижением потенциально бесконечных значений по амплитуде, предложено развитие представлений о форме динамических взаимодействий элементов механической колебательной системы. Понятие формы обобщает представления о направлениях изменения во времени координаты элемента системы по отношению к изменению внешней силы или кинематического возмущения. В рамках структурного формализма предложена методология отображения совокупности динамических состояний и форм динамических взаимодействий элементов механической колебательной системы на основе ориентированных графов.

Ключевые слова: механические колебательные системы, центр вращения, колебание твердого тела, связность внешних возмущений, динамическое гашение колебаний, обратные связи, формы динамических взаимодействий

Введение

Обеспечение безопасности эксплуатации технических объектов транспортного и технологического назначения, а также разработка способов и средств повышения надежности работы узлов, агрегатов, приборов и аппаратуры, функционирующих в условиях интенсивных вибрационных воздействий, относятся к числу актуальных научно-технических проблем [1].

Значительное внимание в работах отечественных и зарубежных специалистов уделяется задачам динамики машин и оборудования при условии вибрационного нагружения. Подходы к разработке способов и средств оценки и контроля характеристик движения для формирования динамических состояний технических объектов отличаются большим разнообразием. Современные направления в решении задач теории и практики виброзащиты и виброизоляции от действия периодических

внешних возмущений во многих случаях опираются на использование методов математического моделирования [2–5].

Особенностью технических объектов, осуществляющих рабочие функции в условиях интенсивных динамических нагружений, является сложность их расчетных схем в виде механических колебательных систем со многими степенями свободы и связями вибрационных взаимодействий элементов систем, например, при рассмотрении в динамике подвижного состава железнодорожного транспорта, а также в задачах формирования динамических состояний машин, реализующих вибрационные технологические процессы [6–7].

В задачах транспортной динамики, при эксплуатации вибрационных технологических машин, в различных производствах строительной индустрии, химической и горной промышленности используется достаточно широкий арсенал технических средств в виде

амортизаторов, демпферов, успокоителей как пассивного типа, так и управляемых с применением внешних источников энергии [8].

Динамические гасители колебаний вибрационных процессов технических объектов широко используются в различных ситуациях, где внешние воздействия обладают достаточно узкополосным частотным спектром. Такие гасители, как правило, настраиваются на определенные частоты, создают условия динамического уравнивания в системах с несколькими степенями свободы. Эффекты динамического гашения колебаний активно изучаются математическими методами на основе моделей в виде дифференциальных уравнений движения механических колебательных систем с несколькими степенями свободы [9–11].

В последнее время определенное развитие получили системные подходы, в качестве основы своей методологической базы использующие метод исследования, при котором механической колебательной системе с одной и более степенями свободы, рассматриваемой в качестве расчетной схемы технических объектов, сопоставляются структурные математические модели в виде структурных схем, эквивалентных в динамическом отношении, систем автоматического управления [12–17].

Целью предлагаемой работы является развитие научно-методологического базиса системного анализа в решении задач динамического гашения колебаний технических объектов различного назначения, отображаемых расчетными схемами в виде механических колебательных систем с двумя степенями свободы с объектом защиты в виде твердого тела, обладающего массой и моментом инерции в плоском движении с учетом двух упругих опор.

1. Общие положения. Математическая модель

Технические объекты, осуществляющие рабочие функции в условиях интенсивного динамического нагружения, представленные расчетными схемами в виде механических колебательных систем с двумя степенями свободы, образованных твердым телом, опирающимся на упругие опоры в соединении с вибрирующей поверхностью, характерны для транспортных средств, находящихся под воздействием внешних периодических возмущений кинематической природы со стороны опорных поверхностей.

Объекты технологического назначения также во многих случаях могут быть представлены твердыми телами на упругих опорах, но с возмущениями, которые формируются специальными устройствами (вибраторами), располагаемыми и закрепленными на поверхности твердого тела (рабочего органа); к числу таких объектов относятся вибрационные столы, вибропитатели, вибротранспортеры и другие устройства.

1. На рис. 1, а представлена обобщенная плоская модель технического объекта в виде расчетной схемы с твердым телом на упругих опорах при наличии как внешних силовых, так и кинематических возмущений.

Предполагается, что твердое тело массой M и моментом инерции J совершает вызванные кинематическими и силовыми возмущениями малые колебания с учетом нулевых начальных условий относительно положения статического равновесия. Рассматриваются две системы координат y_1, y_2 и y_0, φ , связанные с неподвижным базисом. В характерных точках A_1, B_1 и A_2, B_2 закреплены упругие элементы с коэффициентами жесткости k_1 и k_2 соответственно; центр тяжести системы расположен в точке O на расстоянии $l_1 = B_1O, l_2 = B_2O$. Система обладает линейными свойствами.

Система внешних сил представлена внешними воздействиями $Q_1(t), Q_2(t)$, приложенными в точках B_1 и B_2 , а также кинематическими возмущениями $z_1(t), z_2(t)$, отнесенными к точкам

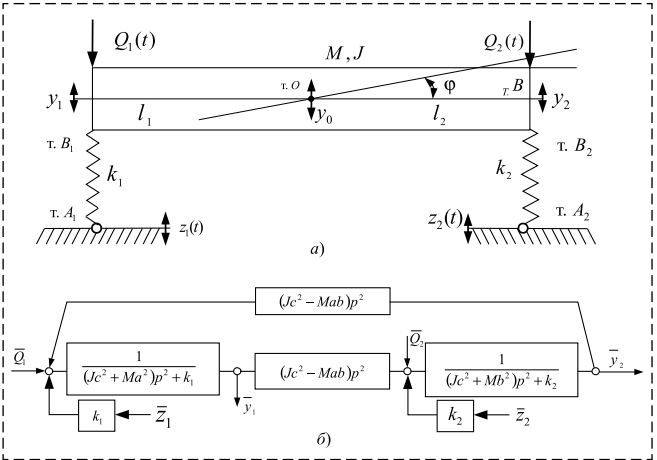


Рис. 1. Механическая колебательная система:
а — расчетная схема технического объекта с массоинерционными параметрами M, J и внешними воздействиями силовой (Q_1, Q_2) и кинематической (z_1, z_2) природы; б — структурная схема

Fig. 1. Mechanical oscillatory system:
а — design scheme of a technical object with mass-inertia parameters M, J and external influences of force (Q_1, Q_2) and kinematic (z_1, z_2) nature; б — block diagram

A_1 и A_2 . Предполагается, что внешние факторы являются синфазными гармоническими функциями одной частоты, но имеют разные амплитуды колебаний максимальных отклонений.

На основе известных подходов, например, рассмотренных в работах [18–20], математическая модель механической колебательной системы (рис. 1, а) может быть представлена системой обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами относительно искомых функций y_1 и y_2 с нулевыми начальными условиями:

$$(Ma^2 + Jc^2)\ddot{y}_1 + k_1 y_1 - (Jc^2 - Mab)\ddot{y}_2 = Q_1 + k_1 z_1; \quad (1)$$

$$(Mb^2 + Jc^2)\ddot{y}_2 + k_2 y_2 - (Jc^2 - Mab)\ddot{y}_1 = Q_2 + k_2 z_2, \quad (2)$$

где приняты следующие обозначения:

$$a = l_2/(l_1 + l_2), \quad b = l_1/(l_1 + l_2), \quad c = 1/(l_1 + l_2). \quad (3)$$

Используя интегральные преобразования Лапласа и с учетом нулевых начальных условий систему уравнений (1), (2) можно представить в виде алгебраической системы относительно изображений $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$:

$$[(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1]\bar{y}_1 - (Jc^2 - Mab)p^2\bar{y}_2 = \bar{Q}_1 + k_1\bar{z}_1; \quad (4)$$

$$[(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2]\bar{y}_2 - (Jc^2 - Mab)p^2\bar{y}_1 = \bar{Q}_2 + k_2\bar{z}_2, \quad (5)$$

где $p = j\omega$ — комплексная переменная ($j = \sqrt{-1}$); черта "—" над переменной означает ее изображение по Лапласу [21]; ω — частота внешнего воздействия.

2. На основе системы алгебраических уравнений (4), (5) может быть построена структурная математическая модель (рис. 1, б).

Особенности динамических свойств системы при различных формах динамического нагружения могут быть рассмотрены на основе использования совокупности передаточных функций.

3. Для оценки динамических состояний системы, вызванных силовым фактором $\bar{Q}_1$, запишем передаточные функции системы с учетом $\bar{Q}_1 \neq 0$, $\bar{Q}_2 = 0$, $\bar{z}_1 \neq 0$, $\bar{z}_2 = 0$:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} = \frac{(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2}{A(p)}; \quad (6)$$

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1} = \frac{(Jc^2 + Mab)p^2}{A(p)}, \quad (7)$$

где

$$A(p) = [(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1][(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2] - [(Jc^2 - Mab)p^2]^2 \quad (8)$$

— характеристическое частотное уравнение, определяющее для системы две частоты собственных колебаний.

Отметим, что в соответствии с (7), (8) исходная система (рис. 1, б) состоит из двух парциальных блоков $[(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1]$ и $[(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2]$, соединенных между собой звеном с передаточной функцией дифференцирования 2-го порядка. При определенных условиях эта связь может "обнулиться". В этом случае выполняется условие

$$Jc^2 - Mab = 0. \quad (9)$$

Условие (9) означает, что движение в парциальных блоках не влияет друг на друга.

Приложение возмущения $\bar{Q}_1$ в системе обеспечивает режим динамического гашения колебаний по координате $\bar{y}_1$ на частоте

$$(\omega_{1,dyn})^2 = \frac{k_2}{Mb^2 + Jc^2}. \quad (10)$$

Частота динамического гашения колебаний (10) совпадает с частотой парциального блока $[(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2]$, определяемой выражением

$$(n_2)^2 = \frac{k_2}{Mb^2 + Jc^2}. \quad (11)$$

Для детализации представлений об оценке динамических свойств системы (рис. 1, а) может быть введено понятие коэффициента связанности движений по координатам $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$, который имеет вид

$$i = \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = \frac{(Jc^2 - Mab)p^2}{(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2}. \quad (12)$$

При введении в выражение (12) значений частот динамического гашения (10) или парциальной частоты (11) коэффициент связанности координат движения можно рассматривать стремящимся к бесконечности $i \rightarrow \infty$, что соответствует признакам динамического гашения колебаний по координате $\bar{y}_1$.

4. При действии внешнего возмущения $\bar{Q}_2$ по координате $\bar{y}_2$ передаточная функция системы имеет вид

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_2} = \frac{(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1}{A(p)}. \quad (13)$$

При такой форме внешнего воздействия ($\bar{Q}_2 \neq 0$, $\bar{Q}_1 = 0$, $\bar{z}_1 = 0$, $\bar{z}_2 = 0$) режим динамического гашения колебаний по координате реализуется на частоте $(\omega_{2,dyn})^2$, определяемой выражением

$$(\omega_{2,dyn})^2 = \frac{k_1}{Ma^2 + Jc^2}. \quad (14)$$

По аналогии с выше представленным равенством между частотой (10) динамического гашения колебаний по координате $\bar{y}_1$ и частотой (11) парциального блока $[(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2]$ реализуется равенство между частотой (14) динамического гашения колебания $(\omega_{2,dyn})^2$ и частотой $(n_1)^2$ парциального блока $[(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1]$, представленной выражением

$$(n_1)^2 = \frac{k_1}{Ma^2 + Jc^2}. \quad (15)$$

Таким образом, при действии одного возмущающего фактора силовой природы возможно появление режима динамического гашения колебаний в точке приложения силового возмущения, в данном случае в точках B_1 и B_2 для силовых факторов $\bar{Q}_1$ и $\bar{Q}_2$ соответственно (рис. 1, а).

Характерной особенностью режима динамического гашения колебаний при действии одиночного силового фактора является то обстоятельство, что для твердого тела неподвижной становится одна точка (либо точка B_1 , либо точка B_2). Неподвижная точка может рассматриваться как центр угловых колебаний. Полагаем, что расстояние между точками B_1 и B_2 равно $l_1 + l_2$. Можно отметить, что при $\bar{y}_1 = 0$ координата $\bar{y}_2$ принимает конкретное значение, определяемое параметрами передаточной функции. Таким образом, между точкой, где $\bar{y}_1 = 0$, и точкой $\bar{y}_2 \neq 0$ устанавливается линейная форма распределения амплитуд колебаний, что предопределяет возможности вибрационного поля, создаваемого твердым телом (рабочим органом).

2. Особенности проявления режимов динамического гашения колебаний с учетом связности силовых возмущений

Рассматривается одновременное действие двух периодических внешних сил $\bar{Q}_1 \neq 0$, $\bar{Q}_2 \neq 0$ ($z_1 = 0$, $\bar{z}_1 \neq 0$) при наличии между ними связи, определяемой соотношением

$$\bar{Q}_2 = \alpha \bar{Q}_1. \quad (16)$$

1. Передаточные функции системы с учетом связи (16) изменяют свою первоначальную форму и принимают вид

$$W_1'(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} = \frac{[(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2] + \alpha(Jc^2 - Mab)p^2}{A(p)}, \quad (17)$$

$$W_2'(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1} = \frac{\alpha[(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1] + (Jc^2 - Mab)p^2}{A(p)}. \quad (18)$$

При одновременном действии двух сил в системе для каждой координаты $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ возможна реализация режима динамического гашения колебаний на соответствующих частотах:

$$(\omega'_{1,dyn})^2 = \frac{k_2}{Mb(b - \alpha a) + Jc^2(1 + \alpha)}; \quad (19)$$

$$(\omega'_{2,dyn})^2 = \frac{k_1 \alpha}{Ma(\alpha a - b) + Jc^2(1 + \alpha)}. \quad (20)$$

Отметим, что в рассматриваемом случае парциальные частоты уже не совпадают с частотами динамического гашения колебаний.

2. Новую информацию о структуре внешних силовых факторов $\bar{Q}_1$ и $\bar{Q}_2$ можно получить при введении коэффициента связанности i_1 движений по координатам $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$:

$$i_1 = \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = \frac{\alpha[(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1] + (Jc^2 - Mab)p^2}{[(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2] + \alpha(Jc^2 - Mab)p^2}. \quad (21)$$

Если при заданном α принять, что коэффициент связанности i_1 принимает некоторое значение, то из соотношения (21) можно получить соответствующее значение частоты, на которой $i_1 = \bar{y}_2/\bar{y}_1$ принимает некоторое значение; оно может быть нулевым, отрицательным или положительным; возможно рассмотрение предельного значения $i_1 \rightarrow \infty$ (стремящегося к бесконечности), что означает проявление режима динамического гашения по координате $\bar{y}_1$. В свою очередь, равенство $i_1 = 0$ означает, что реализуется режим динамического гашения колебаний по координате $\bar{y}_2$.

3. Для i_1 , принимающего отрицательные значения, "точка динамического гашения коле-

баний" — неподвижная точка (или центр) для угловых вращений — будет находиться между точками B_1 и B_2 . На рис. 2, а приведена схема расположения амплитуд колебаний точек B_1 и B_2 , когда i_1 является отрицательной величиной.

Положение точки O определяется центром тяжести ($l_1 = OB_1$, $l_2 = OB_2$). Величина l_0 определяет смещение точки C , представляющей собой центр углового (вращательного) колебательного движения твердого тела с нулевой координатой, относительно центра тяжести в точке O . Положение точки C на частоте, определяемой из выражения (21), при заданном значении i_1 можно найти из подобия треугольников по схеме на рис. 2, а, откуда следует, что

$$l_0 = (l_2 + l_1 i_1) / (1 - i_1). \quad (22)$$

Таким образом, зная i_1 , определяемое значением заданной частоты, можно получить представление о распределении амплитуд колебаний по длине твердого тела.

4. Если коэффициент связности движений $i_1 > 0$ имеет положительные значения, то схема распределения амплитуд колебаний принимает вид, показанный на рис. 2, б.

Используя свойства подобия треугольников, найдем, что

$$l_0 = (l_2 + i_1 l_1) / (1 - i_1). \quad (23)$$

Как следует из схемы на рис. 2, б, при заданной частоте амплитуды колебаний имеют одинаковые знаки, а не разнонаправленные, как в рассмотренном выше случае. Отметим,

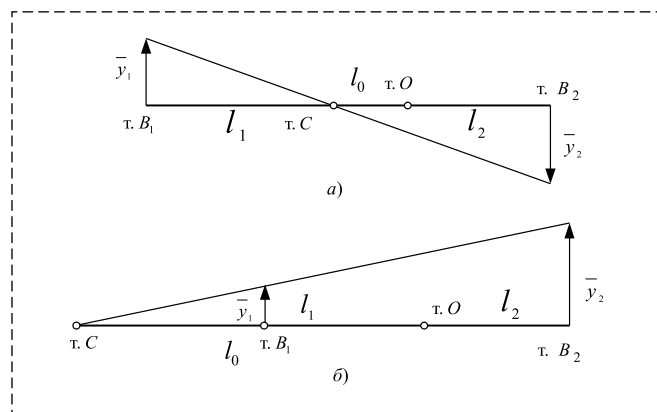


Рис. 2. Схема распределения амплитуд колебаний по длине твердого тела для режима динамического гашения колебаний: а — $i_1 < 0$; б — $i_1 > 0$ ($\bar{y}_2 > \bar{y}_1$)

Fig. 2. Scheme of distribution of oscillation amplitudes along the length of a solid body for the mode of dynamic vibration damping: а — $i_1 < 0$; б — $i_1 > 0$ ($\bar{y}_2 > \bar{y}_1$)

что при $i_1 > 0$ ($i_1 > 1$) центр вращения точка C (или центр колебания твердого тела) находится в левой части плоскости. При $i_1 > 0$ ($i_1 < 1$) центр вращения точка C или центр колебаний твердого тела будет находиться в правой части плоскости от твердого тела.

5. На основании вышесказанного можно полагать, что в координатах $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ в режимах динамического гашения твердое тело получает значение амплитуды колебания, равное нулю, только для одной точки твердого тела; относительно этой точки твердое тело в режиме динамического гашения колебаний реализует угловые колебания. Такая точка может быть названа центром вращения или центром колебаний, относительно которого твердое тело (M , J), совершает угловые колебания. Центр вращения в простейших случаях может совпадать с точками твердого тела, координаты которых фиксируются как $\bar{y}_1 = 0$ или $\bar{y}_2 = 0$.

Вместе с тем, центр вращения (или колебаний) может рассматриваться за пределами твердого тела при $i_1 > 1$ (точка C левее точки B_1) и $0 < i_1 < 1$ (точка C правее точки B_2). При отрицательных значениях $i_1 < 0$ эта точка располагается между точками B_1 и B_2 . При разных значениях параметров такая точка C может смещаться по длине твердого тела влево или вправо в границах, определенных точками B_1 и B_2 .

При рассмотрении случая, когда коэффициент связности движения по координатам $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ принимает значения $i_1 = 1$, изменение координат в виде $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$ обеспечивает только поступательные колебательные движения твердого тела без угловых колебаний. Такой вариант движения твердого тела может интерпретироваться как колебание относительно центра вращения (или колебаний), смещенного на бесконечно большое расстояние вправо или влево от центра тяжести твердого тела.

3. Режимы динамического гашения колебаний в системе с твердым телом в условиях возбуждения факторами кинематической природы

При использовании в механической колебательной системе массоинерционного объекта, обладающего массой и моментом инерции, рассматривались случаи одиночного или совместного действия силовых факторов при наличии связанности воздействия. Что касает-

ся действия внешних возмущений кинематической природы, что, в частности, характерно для динамики железнодорожных составов, то учет их особенностей требует внимания к конструкции рессорных подвесок, в которых могут использоваться не только упругие и диссипативные элементы, но и дополнительные связи, реализуемые различными механизмами и устройствами для преобразования движения.

Кинематические возмущения, действующие на технические объекты, в большой степени характерны для транспорта, в частности, для железнодорожного.

Приведенная на рис. 1 расчетная схема широко используется для оценки, разработки и формирования динамических состояний экипажей подвижного состава железнодорожного транспорта, для которого характерны внешние возмущения со стороны контактов "колесо—рельс", рассматриваемых в задачах динамики.

Полагая, что $\bar{z}_1 \neq 0$, $\bar{z}_2 \neq 0$ ($\bar{Q}_1 = 0$, $\bar{Q}_2 = 0$), запишем уравнение движения объекта по рис. 1, а в операторной форме, используя методы операционного исчисления:

$$[(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1]\bar{y}_1 - (Jc^2 - Mab)p^2\bar{y}_2 = k_1\bar{z}_1; \quad (24)$$

$$[(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2]\bar{y}_2 - (Jc^2 - Mab)p^2\bar{y}_1 = k_2\bar{z}_2. \quad (25)$$

Сопоставляя соотношения (24), (25) с ранее полученными уравнениями для оценки динамических свойств исходной системы (рис. 1) при действии силовых факторов $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$, можно отметить, что кинематические воздействия по форме $\bar{Q}'_1 = k_1\bar{z}_1$ и $\bar{Q}'_2 = k_2\bar{z}_2$, по существу, не отличаются друг от друга и в отношении оценки свойств и динамических состояний при использовании структурной математической модели системы с силовыми факторами $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$.

4. Структурные подходы в оценке особенностей механических колебательных систем с объектами в виде твердого тела, обладающего массой и моментом инерции

Полагаем, что исходная система (см. рис. 1, а) с типовыми упругими элементами с жесткостями k_1 и k_2 находится под действием силового фактора $\bar{Q}_1 \neq 0$ ($\bar{Q}_2 = 0$, $\bar{z}_1 = 0$, $\bar{z}_2 = 0$). Ряд новых подходов в задачах повышения эффективности защиты технических объектов при кинематических возмущениях получил отражение

в работах [3—5].

Структурная схема на рис. 1, б может быть преобразована к структурной схеме цепной механической колебательной системы, показанной на рис. 3.

Структурная схема на рис. 3 представляет собой обобщенную структурную схему в виде системы с одной степенью свободы (по координате $\bar{y}_1$).

Передаточная функция цепи обратной связи имеет вид дробно-рационального выражения

$$k_{red} = \frac{-(Jc^2 - Mab)p^2 + p^2[k_1(Mb^2 + Jc^2)] + k_1k_2}{(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2}. \quad (26)$$

Из анализа структурной схемы на рис. 3 следует, что на парциальной частоте

$$(n_2)^2 = \frac{k_2}{Mb^2 + Jc^2} \quad (27)$$

значение обратной отрицательной связи становится бесконечно большим, и объект с передаточной функцией $\frac{1}{(Mb^2 + Jc^2)p^2}$ становится неподвижным.

В этом случае реализуется режим динамического гашения колебаний по координате $\bar{y}_1$.

Вместе с тем, числитель выражения (26), который имеет форму биквадратного уравнения, может "обнулять" обратную связь на определенных частотах, являющихся корнями биквадратного уравнения. В этих случаях, когда обратная связь или приведенная жесткость системы становится нулевой, это означает, что объект $(Ma^2 + Jc^2)p^2$ будет иметь специфическое движение, определяемое параметрами приложенной силы $\bar{Q}_1$, отражающее так называемый "особый" режим движения по координате $\bar{y}_1$.

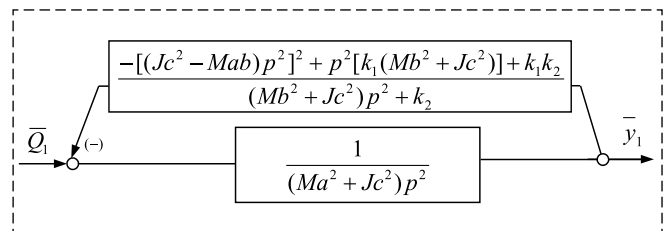


Рис. 3. Структурная схема системы с введением приведенной жесткости в цепи обратной связи

Fig. 3. Block diagram of the system with the introduction of reduced rigidity in the feedback circuit

5. Вычислительный эксперимент для оценки особенностей приложения внешних силовых факторов

Для проведения вычислительного эксперимента в рамках модельной задачи в качестве данных были использованы следующие значения параметров: $k_1 = 1$ Н/м, $k_2 = 1$ Н/м, $l_1 = 1$ м, $l_2 = 1$ м, $M = 1$ кг, $J = 2$ кг·м²; кинематические возмущения отсутствовали: $z_1(t) = 0$ м, $z_2(t) = 0$ м.

1. На рис. 4, а представлены графики амплитудно-частотных характеристик системы с учетом приложения силы Q_1 . Резонанс реализуется на частотах $\omega_{\text{лсб}} = 1$ рад/с и $\omega_{\text{лсб}} \approx 1,41$ рад/с в точках т. 2 и т. 4 соответственно. Режим динамического гашения колебаний по координате $\bar{y}_1$ отображен в точке т. 3 на частоте $\omega_{\text{лдин}} \approx 1,16$ рад/с. Формы колебаний координат определяются совпадением или несовпадением знаков амплитудно-частотных характеристик. На частотных интервалах $(0, \omega_{\text{лсб}})$, $(\omega_{\text{лсб}}, \omega_{\text{лдин}})$ движения разнонаправленны, а на интервалах $(\omega_{\text{лдин}}, \omega_{\text{лсб}})$ и $(\omega_{\text{лсб}}, \infty)$ — сонаправленны.

2. Графики амплитудно-частотных характеристик системы для варианта приложения силы Q_2 отображают формы динамических взаимодействий, проявляющихся в совпадении или несовпадении направленностей движения характерных точек твердого тела, в зависимости от частот динамического гашения колебаний и собственных частот (рис. 4, б). Резонанс

также реализуется на частотах $\omega_{\text{лсб}} = 1$ рад/с и $\omega_{\text{лсб}} \approx 1,41$ рад/с в точках т. 2 и т. 4 соответственно.

Режим динамического гашения колебаний по координате y_2 отображен в точке т. 3 на частоте $\omega_{\text{лдин}} \approx 1,16$ рад/с. В частотных интервалах $(0, \omega_{\text{лсб}})$, $(\omega_{\text{лсб}}, \omega_{\text{лдин}})$ движения координат разнонаправленны, а на интервалах $(\omega_{\text{лдин}}, \omega_{\text{лсб}})$ и $(\omega_{\text{лсб}}, \infty)$ — сонаправленны или "слитны". При "переходе" через собственные частоты и частоту динамического гашения колебаний движение координаты $\bar{y}_1$ изменяет направленность своего движения на противоположную. Координата $\bar{y}_2$ при переходе через частоту динамического гашения колебаний по координате $\bar{y}_1$ направленность своего движения не изменяет, уменьшая значение амплитуды колебания до положительного минимума.

Сонаправленность и разнонаправленность движений точек твердого тела (см. рис. 1), образующих форму движения системы в целом, сохраняются в частотных интервалах между характерными частотами, отражающих режимы динамического гашения, резонансы, режимы "запирания" (при неограниченном росте частоты внешнего силового воздействия), начальные состояния (нулевые начальные условия для координат y_1, y_2).

В предположении, что положительная или отрицательная направленность движения на интервале приписывается координате в за-

висимости от знака ее амплитудно-частотной характеристики (рис. 4), можно на каждом частотном интервале каждой координате сопоставить положительную (знак "+") или отрицательную (знак "-") направленности, в совокупности определяющие формы движений системы (см. рис. 1) в различных вариантах приложения силовых воздействий.

Совокупность форм движения системы определяется частотными интервалами (см. таблицу, строка I, столбцы 3, 5, 7, 9), образованными характерными частотами (столбцы 2, 4, 6, 8, 10), принимающими конкретные значения в рамках модельной задачи (строка II, столбцы 2—10).

Средства оценки динамических состояний, представленные

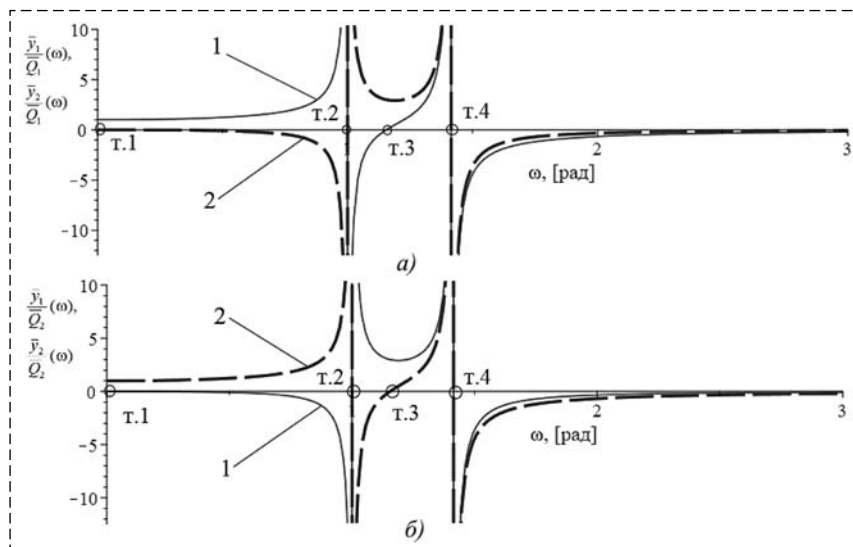


Рис. 4. Амплитудно-частотные характеристики системы:

а — $Q_1 \neq 0, Q_2 = 0$; 1 — $\bar{y}_1/\bar{Q}_1$; 2 — $\bar{y}_2/\bar{Q}_1$; б — $Q_2 \neq 0, Q_1 = 0$; 1 — $\bar{y}_1/\bar{Q}_2$; 2 — $\bar{y}_2/\bar{Q}_2$

Fig. 4. Amplitude-frequency characteristics of the system:

а — $Q_1 \neq 0, Q_2 = 0$; 1 — $\bar{y}_1/\bar{Q}_1$; 2 — $\bar{y}_2/\bar{Q}_1$; б — $Q_2 \neq 0, Q_1 = 0$; 1 — $\bar{y}_1/\bar{Q}_2$; 2 — $\bar{y}_2/\bar{Q}_2$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	Частотные интервалы и характерные частоты	[0]	$(0, \omega_{\text{коб}})$	$[\omega_{\text{коб}}]$	$(\omega_{\text{коб}}, \omega_{\text{дин}})$	$[\omega_{\text{дин}}]$	$(\omega_{\text{дин}}, \omega_{\text{коб}})$	$[\omega_{\text{коб}}]$	$(\omega_{\text{коб}}, \infty)$	$[\infty]$
II	Вычисленные значения	0	(0,1)	[1]	(1, 1.16)	[1.16]	(1.16, 1.41)	[1.41]	(1.41, ∞)	[∞]
III	$Q_1 \neq 0, Q_2 = 0$									
IV	$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{Q_1} = \frac{-3\omega^2 + 4}{2\omega^4 - 6\omega^2 + 4}$	0	+	∞	—	0	+	∞	—	0
V	$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{Q_1} = \frac{-\omega^2}{2\omega^4 - 6\omega^2 + 4}$	0	—	∞	+	+	+	∞	—	0
VI	$Q_1 = 0, Q_2 \neq 0$									
VII	$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{Q_2} = \frac{-\omega^2}{2\omega^4 - 6\omega^2 + 4}$	0	—	∞	+	+	+	∞	—	0
VIII	$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{Q_2} = \frac{-3\omega^2 + 4}{2\omega^4 - 6\omega^2 + 4}$	0	+	∞	—	0	+	∞	—	0

набором амплитудно-частотных характеристик системы (столбец 1, строки IV, V, VII, VIII), в частотных интервалах принимают положительные или отрицательные значения (строки IV, V, VII, VIII, столбцы 3, 5, 7, 9), интерпретируемые в качестве форм движения координат системы; в характерных частотах средства оценки принимают нулевые значения, отображающие режимы динамического гашения колебаний, конечные или бесконечные (отображающие резонанс).

Формы движения массоинерционных элементов системы определяются особенностями приложения силового возмущения.

Характерные особенности форм динамических взаимодействий, приведенные в таблице,

могут быть в представлении в виде графа форм динамических взаимодействий элементов механической системы, изображенного на рис. 5.

Динамические режимы механической колебательной системы представлены вершинами графа: r_1 — начальное состояние и предельный режим "запирания" механической колебательной системы объединены в одну вершину; r_2 — резонанс; r_3 — режим динамического гашения колебаний по координате y_2 ; r_4 — режим динамического гашения колебаний по координате y_1 ; дуги $a_1, \dots, a_4$ отображают формы динамических взаимодействий элементов системы для силового возмущения $Q_1 \neq 0$ по мере последовательного "перехода" через характерные динамические состояния механической колебательной системы в зависимости от частот внешнего воздействия, непрерывно принимающих значения от нуля до бесконечности; дуги $b_1, \dots, b_4$ отображают формы динамических взаимодействий элементов системы для силового возмущения $Q_1 = 0$, символьные обозначения дуг с использованием "плюса" и "минуса" отображают формы движения твердого тела; указанные в виде чисел 1; 0,16; 0,25 веса дуг указывают значения длин частотных интервалов.

Таким образом, перераспределение силового возмущения механической колебательной системы (см. рис. 1) приводит к перераспределению режимов динамического гашения колебаний, интерпретируемых как центры вращений (или колебаний) твердого тела, на координату приложения силы и к изменению форм движения. Вместе с тем, совместное одновременное приложение внешних силовых воздействий приводит

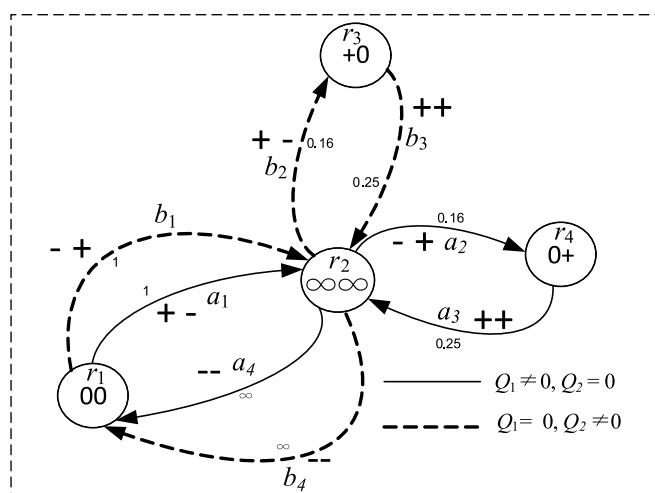


Рис. 5. Ориентированный граф форм динамических взаимодействий элементов механической колебательной системы на рис. 1
Fig. 5. The oriented graph of forms of dynamic interactions of elements of a mechanical oscillatory system in Fig. 1

к перемещению центра вращения (или колебаний) твердого тела и реализации более сложной структуры форм динамических взаимодействий элементов механической колебательной системы.

Заключение

1. Предложено развитие системных подходов в оценке динамических свойств механических колебательных систем с двумя степенями свободы, в которых объект (массоинерционный элемент) представлен в виде твердого тела, обладающего массой и моментом инерции.

2. Предложена методологическая основа построения структурных математических моделей, позволяющих ввести в рассмотрение особенности реализации в системе режимов динамического гашения колебаний.

3. Показано, что при объекте в виде твердого тела динамическое гашение колебаний реализуется путем создания некоторой неподвижной точки, которая при определенных условиях может перемещаться по длине твердого тела.

4. Показана возможность управлять параметрами вибрационного поля рабочего органа, трактуемого как распределение амплитуд колебаний точек твердого тела по его длине.

5. Предложена методика оценки динамических состояний рабочих органов на основе использования коэффициентов связности движений по используемым координатам, что позволяет ввести в рассмотрение новый способ формирования динамических состояний рабочих органов вибрационных технологических машин.

6. Предложена технология формирования необходимых динамических состояний рабочих органов в виде твердого тела при одновременном действии нескольких силовых факторов.

7. Показано, что необходимая информация о спектре динамических свойств системы с твердым телом может быть получена на основе использования приведенных жесткостей, когда ее структурная схема с двумя степенями свободы преобразуется к обобщенной структурной форме, состоящей из объекта, динамическое состояние которого оценивается (интегрирующее звено второго рода), охваченного отрицательной обратной связью; передаточная функция обратной связи соответствует приведенной к объекту жесткости. Передаточная функция обратной связи позволяет определять частоты реализации режимов динамического гашения, а также других форм взаимодействия элементов форм.

Список литературы

1. **Махутов Н. А.** Безопасность и риски: системные исследования и разработки. Новосибирск: Наука, 2017. 724 с.
2. **De Silva C. W.** Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton, London, New York, Washington, D. C.: CRC Press, 2000. 957 p.
3. **Harris C. M., Crede C. E.** Shock and Vibration Handbook. New York: McGraw — Hill Book Co, 2002. 1457 p.
4. **Iwnicki Simon.** Handbook of railway vehicle dynamics. CRC Press Taylor & Francis Group, 2006. 527 p.
5. **Rocard Y.** General Dynamics of Vibrations. Paris: Masson, 1949. 458 p.
6. **Блехман И. И.** Теория вибрационных процессов и устройств. Вибрационная механика и вибрационная техника. СПб.: ИД "Руда и Металлы", 2013. 640 с.
7. **Пановко Г. Я.** Динамика вибрационных технологических процессов. М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных технологий, 2006. 176 с.
8. **Галиев И. И., Нехаев В. А., Николаев В. А.** Методы и средства виброзащиты железнодорожных экипажей. М.: Изд-во Учебно-методический центр по образованию на ж.-д. транспорте, 2010. 340 с.
9. **Коловский М. З.** Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976. 320 с.
10. **Корнев Б. Г., Резников Л. М.** Динамические гасители колебаний. Теория и технические приложения. М.: Наука, 1988. 304 с.
11. **Karnovsky I. A., Lebed E.** Theory of Vibration Protection. Springer International Publishing, Switzerland, 2016. 708 p.
12. **Eliseev S. V., Lukyanov A. V., Reznik Yu. N., Khomenko A. P.** Dynamics of mechanical systems with additional ties. Irkutsk: Irkutsk State University, 2006. 315 p.
13. **Елисеев С. В., Резник Ю. Н., Хоменко А. П., Засядко А. А.** Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов. Иркутск: ИГУ, 2008. 523 с.
14. **Елисеев С. В., Резник Ю. Н., Хоменко А. П.** Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем. Новосибирск: Наука, 2011. 384 с.
15. **Белокобыльский С. В., Елисеев С. В., Кашуба В. Б.** Прикладные задачи структурной теории виброзащитных систем. СПб.: Политехника, 2013. 363 с.
16. **Елисеев С. В., Артюнин А. И.** Прикладная теория колебаний в задачах динамики линейных механических систем. Новосибирск: Наука, 2016. 459 с.
17. **Елисеев С. В.** Прикладной системный анализ и структурное математическое моделирование (динамика транспортных и технологических машин: связность движений, вибрационные взаимодействия, рычажные связи). Иркутск: ИрГУПС, 2018. 692 с.
18. **Eliseev S. V., Eliseev A. V.** Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects // Series: Studies in Systems, Decision and Control. Vol. 252. Springer International Publishing, Cham, 2020. 521 p.
19. **Елисеев А. В., Кузнецов Н. К., Московских А. О.** Динамика машин. Системные представления, структурные схемы и связи элементов. Москва: Инновационное машиностроение, 2019. 381 с.
20. **Елисеев С. В., Елисеев А. В., Большаков Р. С., Хоменко А. П.** Методология системного анализа в задачах оценки, формирования и управления динамическим состоянием технологических и транспортных машин. Новосибирск, 2021. 679 с.
21. **Лурье А. И.** Операционное исчисление и применение в технических приложениях. М.: Наука. 1959. 368 с.

Problem of Vibration Damping in Mechanical Systems: System Analysis, Modeling, Control

A. V. Eliseev, eavsh@ya.ru, A. P. Khomenko, homenko_ap@irgups.ru,
Irkutsk State Transport University, Irkutsk, 664074, Russian Federation

Corresponding author: A. P. Khomenko, Dr. of Tech. Sci., Professor,
Irkutsk State Transport University, Irkutsk, 664074, Russian Federation, e-mail: homenko_ap@irgups.ru

Accepted on January 25, 2022

Abstract

System approaches are being developed in the problems of dynamics of transport and technological machines related to the provision of dynamic vibration damping modes and the identification of a number of specific effects characteristic of technical objects with working bodies representing solids. The methods of structural mathematical modeling are used, in which a mechanical oscillatory system, considered as a design scheme of a technical object, is compared with a structural scheme, equivalent in dynamic terms, of an automatic control system. It is shown that the modes of dynamic damping are realized through the fixation of fixed points called centers of rotation (or oscillations). A method is proposed for the analytical evaluation of the possibilities of forming dynamic states based on the use of generalized feedback transfer functions, coefficients of motion connectivity by coordinates, forms of dynamic interaction of system elements under the simultaneous action of two harmonic excitations. Within the framework of the interpretation under consideration, the key characteristic of a mechanical oscillatory system is the characteristic frequency equation and its transformations. The development of ideas about the form of dynamic interactions of elements of a mechanical oscillatory system is proposed. The concept of form generalizes ideas about the directions of change in time of the coordinate of a system element in relation to a change in an external force or kinematic excitation. The methodology for displaying a set of dynamic states and forms of dynamic interaction of elements of a mechanical oscillatory system based on oriented graphs is proposed.

Keywords: mechanical oscillatory system, center of rotation, solid body oscillation, connectivity of external excitations, dynamic damping oscillation, feedback, forms of dynamic interactions

For citation:

Eliseev A. V., Khomenko A. P. Problem of Vibration Damping in Mechanical Systems: System Analysis, Modeling, Control, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 5, pp. 236–245 (in Russian).

DOI: 10.17587/mau.23.236-245

References

1. Makhutov N. A. Safety and risks: system research and development, Novosibirsk, Nauka, 2017, 724 p. (in Russian).
2. De Silva C. W. Vibration. Fundamentals and Practice, Boca Raton, London, New York, Washington, D. C., CRC Press, 2000, 957 p.
3. Harris S. M., Cred C. E. Shock and Vibration Handbook, New York, McGraw — Hill Book Co, 2002, 1457 p.
4. Iwnicki S. Handbook of railway vehicle dynamics, CRC Press Taylor & Francis Group, 2006, 527 p.
5. Rocard Y. General Dynamics of Vibrations, Paris, Masson, 1949, 458 p.
6. Blekhnman I. I. Theory of vibration processes and devices. Vibration mechanics and vibration technology, St. Petersburg, Publishing house "Ore and Metals", 2013, 640 p.(in Russian).
7. Panovko G. Ya. Dynamics of vibration technological processes, Moscow—Izhevsk, SIC "Regularic and chaotic dynamics", Institute of Computer Technologies, 2006, 176 p.(in Russian).
8. Galiev I. I., Nekhaev V. A., Nikolaev V. A. Methods and means of vibration protection of railway crews, Moscow, Publishing house of the Educational and Methodological Center for education on railway transport, 2010, 340 p. (in Russian).
9. Kolovsky M. Z. Automatic control of vibration protection systems, Moscow, Nauka, 1976, 320 p. (in Russian).
10. Korenev B. G., Reznikov L. M. Dynamic vibration dampers. Theory and technical applications, Moscow, Nauka, 1988, 304 p. (in Russian).
11. Karnovsky I. A., Lebed E. Theory of Vibration Protection, Springer International Publishing, Switzerland, 2016, 708 p.
12. Eliseev S. V., Lukyanov A. V., Reznik Yu. N., Khomenko A. P. Dynamics of mechanical systems with additional ties, Irkutsk, Irkutsk State University, 2006, 315 p.
13. Eliseev S. V., Reznik Yu. N., Khomenko A. P., Zasyadko A. A. Dynamic synthesis in generalized problems of vibration protection and vibration isolation of technical objects, Irkutsk, IGU, 2008, 523 p. (in Russian).
14. Eliseev S. V., Reznik Yu. N., Khomenko A. P. Mechatronic approaches in the dynamics of mechanical oscillatory systems, Novosibirsk, Nauka, 2011, 384 p. (in Russian).
15. Belokobylsky S. V., Eliseev S. V., Kashuba V. B. Applied problems of the structural theory of vibration protection systems, St. Petersburg, Polytechnic, 2013, 363 p.(in Russian).
16. Eliseev S. V., Artyunin A. I. Applied theory of oscillations in problems of dynamics of linear mechanical systems, Novosibirsk, Nauka, 2016, 459 p. (in Russian).
17. Eliseev S. V. Applied system analysis and structural mathematical modeling (dynamics of transport and technological machines: connectivity of movements, vibration interactions, lever connections), Irkutsk, IrGUPS, 2018, 692 p. (in Russian).
18. Eliseev S. V., Eliseev A. V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control, vol.252, Springer International Publishing, Cham, 2020, 521 p.
19. Eliseev A. V., Kuznetsov N. K., Moskovskikh A. O. Dynamics of machines. System representations, block diagrams and connections of elements, Moscow, Innovative Mechanical Engineering, 2019, 381 p. (in Russian).
20. Eliseev S. V., Eliseev A. V., Bolshakov R. S., Khomenko A. P. Methodology of system analysis in the tasks of evaluation, formation and management of the dynamic state of technological and transport machines, Novosibirsk, 2021, 679 p. (in Russian).
21. Lurie A. I. Operational calculus and application in technical applications, Moscow, Nauka, 1959, 368 p. (in Russian).