

Н. Е. Зубов, д-р техн. наук, проф., nezubov@bmstu.ru,
В. Н. Рябченко, д-р техн. наук, проф., ryabchenko.vn@yandex.ru,
А. В. Пролетарский, д-р техн. наук, проф., pav@bmstu.ru,
МГТУ им. Н. Э. Баумана, г. Москва,
ПАО РСК "Энергия" им. С. П. Королева, г. Королев МО

Об одном подходе к синтезу робастной системы стабилизации продольного движения гипотетического самолета

Для линеаризованной модели четвертого порядка продольного движения летательного аппарата самолетного типа с тремя органами управления получены аналитические выражения законов управления, обеспечивающих робастность по одному из коэффициентов модели объекта управления, имеющего наименьший диапазон разброса значений. В качестве такого коэффициента рассматривается приращение подъемной силы в зависимости от приращения угла атаки и угла наклона траектории. В основу работы положена оригинальная декомпозиция модели объекта управления и разработанный на ее основе метод модального синтеза. Поиск робастного управления базируется на параметризации множества решений и назначении собственных значений замкнутой системы. Идея этого подхода состоит в следующем. Если для заданного объекта управления найти в аналитической форме все множество законов управления с обратной связью, обеспечивающих заданное множество собственных значений, то с помощью соответствующей параметризации этого множества можно выделить подмножество робастных законов управления по отношению к тому или иному фактору. В основу получения параметризованного решения задачи синтеза было положено преобразование подобия для матрицы собственных значений нулевого уровня декомпозиции объекта управления. Приведены результаты численного моделирования управления продольным движением летательного аппарата с использованием синтезированных аналитических законов. По его результатам оценено влияние коэффициента модели, при котором для не робастного аналитического закона управления летательный аппарат в продольном движении теряет устойчивость. Отмечено, что робастный закон управления не имеет ограничений по отношению к ошибке задания рассматриваемого коэффициента модели, характеризующего приращение подъемной силы летательного аппарата в зависимости от приращения угла атаки и угла наклона траектории.

Ключевые слова: продольное движение, гипотетический летательный аппарат самолетного типа, математическая модель, декомпозиционный метод модального синтеза, система с многими входами и многими выходами (МИМО-система), робастное управление

Введение

Современные подходы к синтезу робастного управления включают обширное множество методов и подходов, среди которых выделим следующие [1, 2]: методы на основе робастных критериев устойчивости Михайлова, Найквиста и Цыпкина—Поляка; QFT-методы; методы μ -синтеза и LMI-методы; методы функций Ляпунова; методы на основе интервальных критериев устойчивости Липатова—Соколова и Харитонов; методы LQ- и L_1 -оптимизации; методы оптимизации в пространствах Харди (методы H_2 - и H_∞ -синтеза); методы, основанные на принципе глубокой обратной связи и др.

Учитывая сложность синтеза и относительно малую практическую применимость ука-

занных методов, в данной работе для задачи стабилизации продольного движения гипотетического летательного аппарата самолетного типа предлагается подход, в основу которого положен аналитический синтез с использованием декомпозиционного метода модального управления в пространстве состояний динамической системы.

Идея этого подхода состоит в следующем. Если для заданного объекта управления найти в аналитической форме все множество законов управления с обратной связью, обеспечивающих заданное множество собственных значений, то с помощью соответствующей параметризации этого множества можно выделить подмножество робастных законов управления по отношению к тому или иному фактору.

Математическая модель продольного движения самолета

Будем рассматривать линеаризованную модель летательного аппарата самолетного типа с тремя органами управления следующего вида [3]:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

с матрицами коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} -a_x^V & -a_x^\theta + a_x^\alpha & 0 & -a_x^\alpha \\ -a_y^V & -a_y^\theta + a_y^\alpha & 0 & -a_y^\alpha \\ a_{m_z}^V & a_{m_z}^\alpha & -a_{m_z}^{\omega_z} & -a_{m_z}^\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_x^P & 0 & 0 \\ 0 & a_y^{\delta_c} & a_y^{\delta_{PB}} \\ 0 & a_{m_z}^{\delta_c} & a_{m_z}^{\delta_{PB}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

элементы которых являются кусочно-постоянными величинами, и векторами

$$x = \begin{pmatrix} \Delta V \\ \Delta \theta \\ \Delta \omega_z \\ \Delta \upsilon \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} \Delta P \\ \delta_c \\ \delta_{PB} \end{pmatrix}.$$

Здесь ΔV — отклонение модуля вектора скорости; $\Delta \theta$ — отклонение угла наклона траектории; $\Delta \omega_z$ — отклонение угловой скорости в канале тангажа; $\Delta \upsilon$ — отклонение угла тангажа; ΔP — отклонение модуля вектора тяги двигателя; δ_{PB} — угол отклонения руля высоты; δ_c — угол отклонения стабилизатора; $a_x^V, a_x^\theta, a_x^\alpha, a_y^V, a_y^\theta, a_y^\alpha, a_{m_z}^V, a_{m_z}^\alpha, a_{m_z}^{\omega_z}, a_x^P, a_y^{\delta_c}, a_y^{\delta_{PB}}, a_{m_z}^{\delta_c}, a_{m_z}^{\delta_{PB}}$ — коэффициенты линеаризации [3].

Введем для краткости записи обозначения $a_{11} = -a_x^V, a_{12} = -a_x^\theta + a_x^\alpha, a_{14} = -a_x^\alpha, a_{21} = -a_y^V, a_{22} = -a_y^\theta + a_y^\alpha, a_{24} = -a_y^\alpha, a_{31} = a_{m_z}^V, a_{32} = a_{m_z}^\alpha, a_{33} = -a_{m_z}^{\omega_z}, a_{34} = -a_{m_z}^\alpha, b_{11} = a_x^P, b_{22} = a_y^{\delta_{PB}}, b_{23} = a_y^{\delta_c}, b_{32} = a_{m_z}^{\delta_{PB}}, b_{33} = a_{m_z}^{\delta_c}$, тогда объект управления (1) в развернутом виде запишется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{V} \\ \Delta \dot{\theta} \\ \Delta \dot{\omega}_z \\ \Delta \dot{\upsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta V \\ \Delta \theta \\ \Delta \omega_z \\ \Delta \upsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta \delta_{PB} \\ \Delta \delta_c \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Считая все компоненты вектора состояния полностью наблюдаемыми, будем искать

управление для модели (2) в виде закона обратной связи вида

$$u = -Kx, \quad (3)$$

где K — искомая матрица коэффициентов (матрица регулятора).

Задача размещения полюсов

Воспользуемся декомпозиционным методом модального синтеза [4, 5], суть которого заключается в следующем. Для динамической системы (1) рассматривается управление с обратной связью (3), которое обеспечивает требования на размещение полюсов замкнутой системы (собственных значений матриц $A - BK$) и включает в себя многоуровневую декомпозицию системы с многими входами и многими выходами (MIMO-системы) (2). При этом число уровней декомпозиции определяется отношением размерности вектора состояния к размерности вектора управления и округляется в большую сторону до целого числа.

Для рассматриваемого случая будем иметь два уровня, соответственно: нулевой и первый. Для каждого уровня должны быть определены матрицы A и B согласно (1) на основании следующих выражений:

— нулевой (исходный) уровень декомпозиции

$$A_0 = A, B_0 = B; \quad (4)$$

— первый уровень декомпозиции

$$A_1 = B_0^\perp A_0 B_0^{\perp+}, B_1 = B_0^\perp A_0 B_0, \quad (5)$$

где $B^{\perp+} = \text{null}(B^T)$ — делитель нуля, т. е. матрица, удовлетворяющая следующим условиям [4]:

$$B^\perp B = 0_{(n-r) \times r}; \quad (6)$$

$B^{\perp+}$ — псевдообратная матрица Мура—Пенроуза, т. е.

$$B^\perp B^{\perp+} B^\perp = B^\perp, B^{\perp+} B^\perp B^{\perp+} = B^{\perp+}, \\ (B^{\perp+} B^\perp)^T = B^{\perp+} B^\perp, (B^\perp B^{\perp+})^T = B^\perp B^{\perp+}.$$

Теорема [4, 5]. Если MIMO-система (4) полностью управляемая, и матрица $K \in \mathbb{R}^{r \times m}$ удовлетворяет формулам

$$K = K_0 = B_0^- A - F_0 B_0^-, B_0^- = K_1 B_0^\perp + B_0^+; \quad (7)$$

$$K_1 = B_1^+ A_1 - F_1 B_1^+, \quad (8)$$

тогда

$$\text{eig}(A - BK) = \bigcup_{i=1}^2 \text{eig}(F_{i-1}),$$

где $\text{eig}(F_0)$, $\text{eig}(F_1)$ — собственные значения каждого уровня декомпозиции, определяемые соответствующими матрицами.

Заметим, что приведенное множество законов управления задается произволом в выборе матриц $B^\perp$ — делителей нуля и матриц, формирующих собственные значения у замкнутой системы F_{i-1} , $i = 1, 2$.

лагает определение и вычисление следующих матриц:

$$\begin{aligned} A_0 = A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ B_0 = B &= \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ B_0^\perp &= (0 \ 0 \ 0 \ 1), \end{aligned} \quad (9)$$

$$B_0^+ = \begin{pmatrix} b_{11}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (b_{22}(b_{23}^2 + b_{33}^2) - b_{23}(b_{22}b_{23} + b_{32}b_{33}))/d_1 & (b_{32}(b_{23}^2 + b_{33}^2) - b_{33}(b_{22}b_{23} + b_{32}b_{33}))/d_1 & 0 \\ 0 & (b_{23}(b_{22}^2 + b_{32}^2) - b_{22}(b_{22}b_{23} + b_{32}b_{33}))/d_1 & (b_{33}(b_{22}^2 + b_{32}^2) - b_{32}(b_{22}b_{23} + b_{32}b_{33}))/d_1 & 0 \end{pmatrix},$$

Из приведенной теоремы следует, что закон управления (3) с матрицей $K \in \mathbb{R}^{r \times n}$, удовлетворяющей соотношениям (7), (8), обеспечивает выполнение требования заданного размещения полюсов и, соответственно, является результатом задачи синтеза управления.

Вместе с тем, особенностью линеаризованной модели самолета (2) является наличие параметрической возмущенности коэффициентов линеаризации. Проведенные в работе [6] исследования показали, что коэффициент, характеризующий приращение подъемной силы в зависимости от приращения угла атаки и угла наклона траектории, имеет наиболее ограниченный диапазон точности его определения, при котором не нарушается устойчивость замкнутой обратной связью динамической системы (стабилизируемого движения). Таким образом, ставится задача аналитического синтеза матрицы коэффициентов обратной связи в законе управления (3), которая обеспечивает робастность стабилизации продольного движения ЛА по отношению к коэффициенту $a_{22} = -a_y^\theta + a_y^\alpha$.

Аналитический синтез законов управления

Применение подхода, основанного на использовании соотношений (4) — (8), предпо-

$$\begin{aligned} A_1 = B_0^\perp A_0 B_0^{\perp+} &= 0, \quad B_1 = B_0^\perp A_0 B_0 = (0 \ b_{32} \ b_{33}), \\ B_1^+ &= (0 \ b_{32}/(b_{32}^2 + b_{33}^2) \ b_{33}/(b_{32}^2 + b_{33}^2))^T. \end{aligned}$$

Назначением по результатам предварительного анализа матриц из (7), (8), например, в следующем общем виде:

$$F = F_0 = \begin{pmatrix} f_{01} & 0 & 0 \\ 0 & f_{02} & f_{03} \\ 0 & -f_{03} & f_{02} \end{pmatrix}, \quad F_1 = f_{11} \quad (10)$$

определяется цель задачи синтеза.

Согласно формуле (7) требуемая матрица коэффициентов в законе управления, с учетом того, что

$$K_1 = F_1 B_1^+ - B_1^+ A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -b_{32}f_{11}/(b_{32}^2 + b_{33}^2) \end{pmatrix},$$

определится выражением

$$\begin{aligned} K &= F_0(B_0^+ + K_1 B_0^\perp) - (B_0^+ + K_1 B_0^\perp) A_0 = \\ &= \begin{pmatrix} (a_{11} - f_{01})/b_{11} & a_{12}/b_{11} & 0 & a_{14}/b_{11} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned}
k_{21} &= (a_{21}b_{33} - a_{31}b_{23})/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}), \\
k_{22} &= (a_{22}b_{33} - a_{32}b_{23} + b_{32}f_{03} - \\
&\quad - b_{33}f_{02})/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}), \\
k_{23} &= b_{23}f_{02}/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) - \\
&\quad - b_{22}f_{03}/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) - \\
&\quad - a_{33}b_{23}/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) - \\
&\quad - b_{32}f_{11}/(b_{32}^2 + b_{33}^2), \\
k_{24} &= a_{24}b_{33}/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) - \\
&\quad - a_{34}b_{23}/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) + \\
&\quad + b_{32}f_{02}f_{11}/(b_{32}^2 + b_{33}^2) + \\
&\quad + b_{33}f_{03}f_{11}/(b_{32}^2 + b_{33}^2), \\
k_{31} &= -(a_{21}b_{32} - a_{31}b_{22})/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}), \\
k_{32} &= (a_{32}b_{22} - a_{22}b_{32} + b_{32}f_{02} + \\
&\quad + b_{33}f_{03})/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}), \\
k_{33} &= a_{33}b_{22}/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) - \\
&\quad - b_{22}f_{02}/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) - \\
&\quad - b_{23}f_{03}/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) - \\
&\quad - b_{33}f_{11}/(b_{32}^2 + b_{33}^2), \\
k_{34} &= a_{34}b_{22}/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) - \\
&\quad - a_{24}b_{32}/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) - \\
&\quad - b_{32}f_{03}f_{11}/(b_{32}^2 + b_{33}^2) + \\
&\quad + b_{33}f_{02}/(b_{32}^2 + b_{33}^2).
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
k_{31} &= -(a_{21}b_{32} - a_{31}b_{22})/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}), \\
k_{32} &= (a_{32}b_{22} - a_{22}b_{32} + b_{32}f_{02} + \\
&\quad + b_{33}f_{03})/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}), \\
k_{33} &= a_{33}b_{22}/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) - \\
&\quad - b_{22}f_{02}/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) - \\
&\quad - b_{23}f_{03}/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) - \\
&\quad - b_{33}f_{11}/(b_{32}^2 + b_{33}^2), \\
k_{34} &= a_{34}b_{22}/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) - \\
&\quad - a_{24}b_{32}/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) - \\
&\quad - b_{32}f_{03}f_{11}/(b_{32}^2 + b_{33}^2) + \\
&\quad + b_{33}f_{02}/(b_{32}^2 + b_{33}^2).
\end{aligned} \tag{13}$$

Осуществим параметризацию решения (11)–(13) с использованием преобразования подобия [4] для матрицы собственных значений нулевого уровня декомпозиции F_0 . В результате вместо формулы (11) будем иметь

$$K_m = TF_0T^{-1}(B_0^+ + K_1B_0^\perp) - (B_0^+ + K_1B_0^\perp)A_0, \tag{14}$$

где T — невырожденная квадратная матрица заданных размеров. По результатам предварительных вычислений назовем T в следующем виде:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Здесь t — параметр, который может принимать любые значения из множества действительных чисел. Тогда выражение (14) примет вид

$$K_m = \begin{pmatrix} (a_{11} - f_{01})/b_{11} & a_{12}/b_{11} & 0 & a_{14}/b_{11} \\ k_{21} & k_{22}^m & k_{23}^m & k_{24}^m \\ k_{31} & k_{32}^m & k_{33}^m & k_{34}^m \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned}
k_{22}^m &= (a_{22}b_{33} - a_{32}b_{23} + b_{32}f_{03} - \\
&\quad - b_{33}f_{02} + b_{33}f_{03}t)/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}), \\
k_{23}^m &= (b_{23}(f_{02} - f_{03}t))/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) - \\
&\quad - (b_{22}f_{03})/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) - \\
&\quad - (b_{32}f_{11})/(b_{32}^2 + b_{33}^2) - \\
&\quad - (a_{33}b_{23})/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}), \\
k_{24}^m &= (a_{24}b_{33})/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) - \\
&\quad - (a_{34}b_{23})/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) + \\
&\quad + (b_{32}f_{11}(f_{02} - f_{03}t))/(b_{32}^2 + b_{33}^2) + \\
&\quad + (b_{33}f_{03}f_{11})/(b_{32}^2 + b_{33}^2), \\
k_{32}^m &= (b_{33}f_{03}t^2 + b_{32}f_{03}t - a_{22}b_{32} + \\
&\quad + a_{32}b_{22} + b_{32}f_{02} + b_{33}f_{03})/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}), \\
k_{33}^m &= (a_{33}b_{22})/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) - \\
&\quad - (b_{33}f_{11})/(b_{32}^2 + b_{33}^2) - \\
&\quad - (b_{22}(f_{02} + f_{03}t))/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) - \\
&\quad - (b_{23}f_{03}(t^2 + 1))/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}), \\
k_{34}^m &= (a_{34}b_{22})/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) - \\
&\quad - (a_{24}b_{32})/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) + \\
&\quad + (b_{33}f_{11}(f_{02} + f_{03}t))/(b_{32}^2 + b_{33}^2) - \\
&\quad - (b_{32}f_{03}f_{11}(t^2 + 1))/(b_{32}^2 + b_{33}^2).
\end{aligned} \tag{17}$$

Анализ выражений (17) показывает, что коэффициент a_{22} входит в параметры закона управления k_{22}^m, k_{32}^m . Следовательно, чтобы исключить прямое присутствие указанного коэффициента модели в матрице коэффициентов усиления обратной связи, поступим следующим образом: назовем в матрице подобия (15) $t = -2b_{32}/b_{33}$, а мнимую часть комплексно сопряженной пары $f_{02} \pm if_{03}$ определим равной $f_{03} = a_{22}b_{33}/2b_{32}$. В результате получим матрицу коэффициентов обратной связи следующего вида:

$$K_p = \begin{pmatrix} (a_{11} - f_{01})/b_{11} & a_{12}/b_{11} & 0 & a_{14}/b_{11} \\ k_{21} & (b_{32}f_{03} - a_{32}b_{23} - b_{33}f_{02})/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) & k_{23}^m & k_{24}^m \\ k_{31} & (a_{32}b_{22} + b_{32}f_{02} + b_{33}f_{03})/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) & k_{33}^m & k_{34}^m \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Нетрудно проверить, что данная матрица является робастной (даже, скорее, инвариантной) по отношению к коэффициенту a_{22} .

В соответствии с формулами (3), (11)–(13), (16)–(18) получим

$$u = \begin{pmatrix} (a_{11} - f_{01})/b_{11} & a_{12}/b_{11} & 0 & a_{14}/b_{11} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta V \\ \Delta \theta \\ \Delta \omega_z \\ \Delta v \end{pmatrix} \quad (19)$$

для не робастного (обычного) закона управления и

$$u_p = \begin{pmatrix} (a_{11} - f_{01})/b_{11} & a_{12}/b_{11} & 0 & a_{14}/b_{11} \\ k_{21} & (b_{32}f_{03} - a_{32}b_{23} - b_{33}f_{02})/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) & k_{23}^m & k_{24}^m \\ k_{31} & (a_{32}b_{22} + b_{32}f_{02} + b_{33}f_{03})/(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) & k_{33}^m & k_{34}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta V \\ \Delta \theta \\ \Delta \omega_z \\ \Delta v \end{pmatrix} \quad (20)$$

для робастного закона управления.

Как видно, законы (19) и (20) представляют собой аналитические выражения, которые могут быть использованы для вычисления конкретных сигналов управления. Эти выражения имеют относительно компактный вид и могут быть легко реализованы в реальном масштабе времени.

Численное моделирование

Для проверки полученных результатов воспользуемся числовыми значениями матриц коэффициентов следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} -0,0160 & -0,46 & 0 & -9,8 \\ -0,0012 & -0,26 & 0 & 0,0620 \\ -0,0130 & -2,70 & -1,04 & -0,006 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -0,0004456 & 0 & 0 \\ 0 & -0,02335 & -0,0107 \\ 0 & -1,33 & -0,312 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно выражению (10) с учетом того, что ранее было определено $f_{03} = a_{22}b_{33}/2b_{32}$, на-

значим полюса по уровням декомпозиции следующим образом:

$$F = F_0 = \begin{pmatrix} -0,537 & 0 & 0 \\ 0 & -0,65 & -0,1090 \\ 0 & 0,1090 & -0,65 \end{pmatrix},$$

$$F_1 = -2,75.$$

Предположим, что истинное значение коэффициента a_{22} отличается от модельного значения (для которого мы определили управление (19)). Обозначим это значение как a_{22}^* . В этом случае в соответствии с выражением (10) с учетом того,

что $f_{03} = a_{22}^*b_{33}/2b_{32}$, назовем полюса по уровням декомпозиции согласно выражениям

$$F = F_0 = \begin{pmatrix} -0,537 & 0 & 0 \\ 0 & -0,65 & -f_{03} \\ 0 & f_{03} & -0,65 \end{pmatrix},$$

$$F_1 = -2,75.$$

По результатам моделирования было установлено, что при значениях a_{22}^* , равных $-0,93$, и, соответственно, $f_{03} = -0,10908$ замкнутая система с обычным законом управления становится неустойчивой, поскольку ее полюса совпадают со следующим множеством:

$$\text{eig}(A - BK) =$$

$$= \{-2,56355; -0,81789; 0,00144; -0,537\},$$

тогда как для робастного закона управления имеем

$$\text{eig}(A - BK_p) =$$

$$= \{-2,5859; -0,3970 \pm 0,7098i; -0,537\}.$$

Соответственно для робастного управления матрица коэффициентов обратной связи выглядит следующим образом:

$$K_p = 10^4 \begin{pmatrix} -0,1169 & 0,1032 & 0 & 22,1992 \\ -0,000003368 & 0,001145588 & -0,00024247 & -0,00003645 \\ 0,00001852667 & -0,01357317 & 0,0007477 & 0,0004041089 \end{pmatrix}.$$

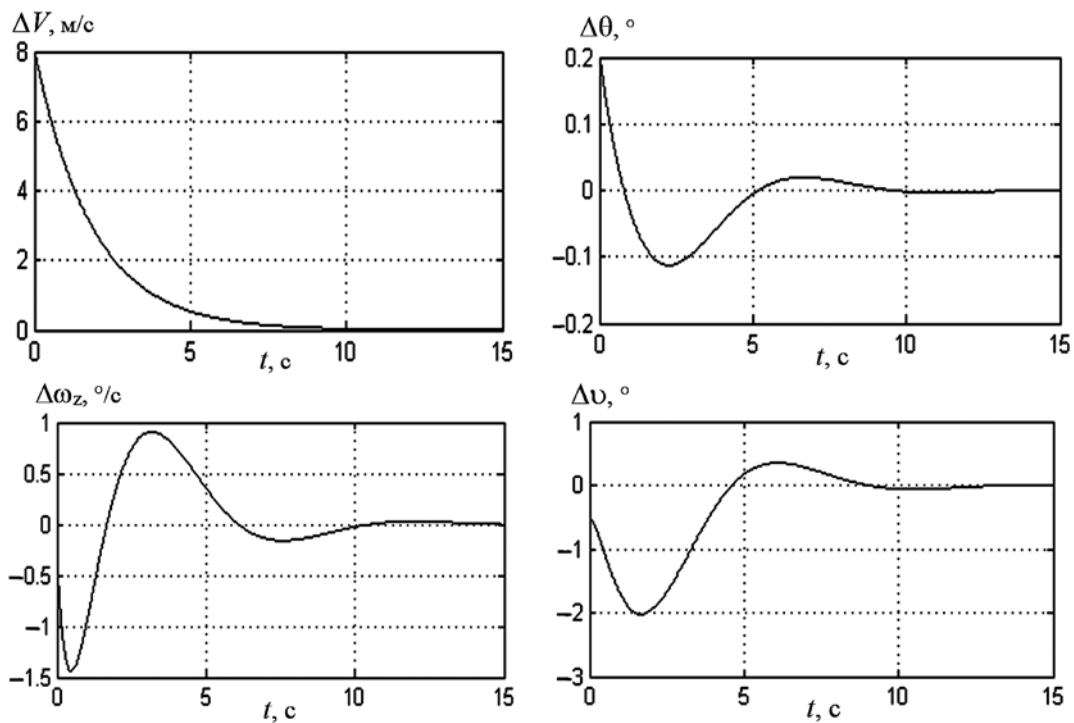


Рис. 1
Fig. 1

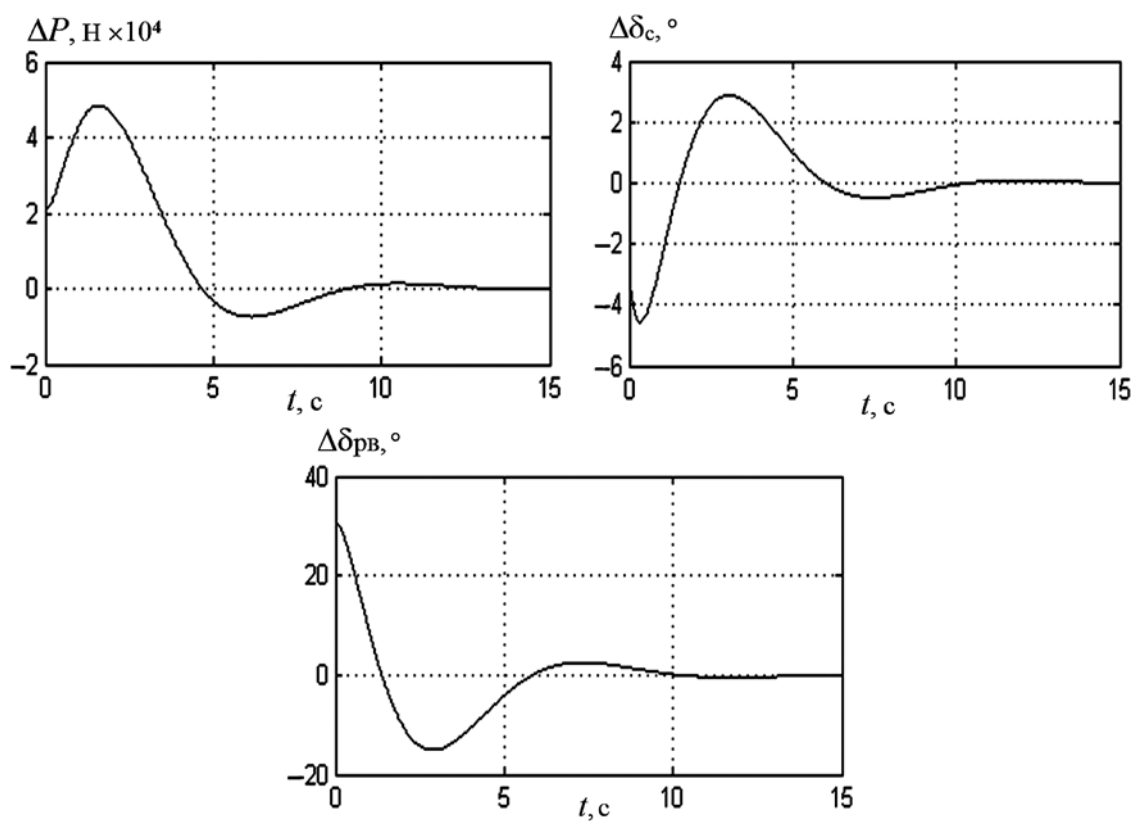


Рис. 2
Fig. 2

При этом матрица собственной динамики в замкнутом контуре "летательный аппарат — система управления" принимает вид

$$A - BK_p = \begin{pmatrix} -0,537 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,44795 & 0,023556 & 0,09682 \\ 0 & -29,18197 & -1,932 & 0,770 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если при моделировании значения a_{22}^* изменять в другую сторону, то, соответственно, нарушение границы устойчивости не наступает.

Для начальных значений вектора состояния

$$(\Delta V \ \Delta \theta \ \Delta \omega_z \ \Delta v)^T = (\Delta V \ \Delta \theta \ \Delta \omega_z \ \Delta v)^T = (8,00 \ 0,2 \ -0,42 \ -0,52)^T$$

при истинном значении коэффициента a_{22} , при котором не робастный закон управления приводит к потере устойчивости продольного движения, на рис. 1 представлены графики переходных процессов по компонентам вектора состояния, соответствующие робастному закону. На диаграммах рис. 2 приведены значения управляющий воздействий.

Заключение

Рассмотрен подход к решению задачи робастного синтеза на основе оригинального метода модального синтеза с многоуровневой декомпозицией модели объекта управления, позволяющий в аналитическом виде получать множество законов управления, обеспечивающих одно и то же заданное размещение собственных значений. Поиск робастного закона управления основан на параметризации этого множества с помощью невырожденного преобразования подобия. Приведенные результаты численного моделирования управления продольным движением летательного аппарата с использованием синтезированных законов подтвердили, что робастный закон управления не имеет ограничений по отношению к ошибке задания коэффициента модели, характеризующего приращение подъемной силы летательного аппарата от приращения угла атаки и угла наклона траектории. Эти результаты, наряду с ранее опубликованными [7–18], подтверждают весьма значительные возможности рассматриваемого метода модального синтеза.

Список литературы

1. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. Робастное управление с "глубокой" обратной связью // XIII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2019. М.: ИПУ РАН, 2019. С. 771–775.
2. Гаджиев М. Г., Мисриханов М. Ш., Рябченко В. Н., Шаров Ю. В. Матричные методы анализа и управления переходными процессами в электроэнергетических системах. М.: Изд. Дом МЭИ, 2019. 462 с.
3. Красовский А. А., Вавилов Ю. А., Сучков А. И. Системы автоматического управления летательных аппаратов. М.: ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1986. 480 с.
4. Zubov N. E., Mikhlin E. A., Ryabchenko V. N. Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательных аппаратов. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2016. 666 с.
5. Ryabchenko V. N., Zubov N. E., Sorokin I. V., Proletarskii A. V. Complete Pole Placement Method for Linear MIMO Systems // Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie. 2018. Vol. 19, N. 1. P. 11–18.
6. Zubov N. E., Ryabchenko V. N. К анализу робастной устойчивости продольного движения маневренного летательного аппарата // Приборы и системы. 2021. № 6. С. 10–15.
7. Zubov N. E., Ryabchenko V. N., Sorokin I. V. Synthesis of Stabilization Laws of a Single-Aircscrew Helicopter's Lateral Motion for Lack of Information about its Lateral Speed: Analytical Solution // Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie. 2018. Vol. 19, N. 4. P. 273–281.
8. Zubov N. E., Mikhlin E. A., Mисриханов М. Ш., Рябченко В. Н. Синтез развязывающих законов стабилизации орбитальной ориентации космического аппарата // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2012. № 1. С. 92–108.
9. Zubov N. E., Mikhlin E. A., Mисриханов М. Ш., Рябченко В. Н. Модификация метода точного размещения полюсов и его применение в задачах управления движением космического аппарата // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2013. № 2. С. 118–132.
10. Zubov N. E., Mikhlin E. A., Mисриханов М. Ш., Рябченко В. Н. Управление по выходу спектром дескрипторной динамической системы // Доклады Академии наук. 2016. Т. 468, № 2. С. 134–136.
11. Zubov N. E., Mikhlin E. A., Mисриханов М. Ш., Рябченко В. Н. Стабилизация взаимосвязанных движений летательного аппарата в каналах тангаж–рыскание при отсутствии информации об угле скольжения // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2015. № 1. С. 95–105.
12. Zubov N. E., Mikhlin E. A., Mисриханов М. Ш., Рябченко В. Н. Управление по выходу продольным движением летательного аппарата // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2015. № 5. С. 164–175.
13. Zubov N. E., Mikhlin E. A., Ryabchenko V. N., Фомичев А. В. Синтез законов управления боковым движением летательного аппарата при отсутствии информации об угле скольжения. Аналитическое решение // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2017. № 1. С. 61–70.
14. Zubov N. E., Zybin E. Yu., Mikhlin E. A. и др. Управление по выходу спектром движения космического аппарата // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2014. № 4. С. 111–122.
15. Zubov N. E., Lapin A. V., Mikhlin E. A., Ryabchenko V. N. Управление по выходу спектром линейной динамической системы на основе подхода Ван-дер-Воида // Доклады Академии наук. 2017. Т. 476, № 3. С. 260–263.
16. Zubov N. E., Mikhlin E. A., Mисриханов М. Ш., Рябченко В. Н. Управление конечными собственными значениями дескрипторной системы // Доклады Академии наук. 2015. Т. 460, № 4. С. 381–384.

17. **Зубов Н. Е., Микрин Е. А., Рябченко В. Н., Пролетарский А. В.** Аналитический синтез законов управления боковым движением летательного аппарата // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2015. № 3. С. 14–20.

18. **Зубов Н. Е., Микрин Е. А., Рябченко В. Н., Тимakov С. Н.** Применение адаптивного полосового фильтра в качестве наблюдателя в контуре управления международной космической станции // Известия РАН. Теория и системы управления. 2012. № 4. С. 88–100.

On One Approach to the Synthesis of Robust Control of the Stabilization of the Hypothetical Aircraft Longitudinal Motion

N. E. Zubov, nezubov@bmstu.ru, **V. N. Ryabchenko**, ryabchenko.vn@yandex.ru,
A. V. Proletarsky, pav@bmstu.ru,
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation

Corresponding author: **Zubov Nikolay E.**, Professor of Department of Automatic Control Systems
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation, e-mail: nezubov@bmstu.ru.

Accepted on December 15, 2021

Abstract

For a linearized model of the fourth order of longitudinal motion of an airplane-type aircraft with three controls, analytical expressions of control laws are obtained that ensure robustness according to one of the coefficients of the model of the control object having the smallest range of values. As such a coefficient, the increment of the lifting force from the increment of the angle of attack and the angle of inclination of the trajectory is considered. The work is based on the original decomposition of the control object model and the modal synthesis method developed on its basis. The search for robust control is based on the parametrization of a set of solutions and the assignment of eigenvalues of a closed system. The idea of this approach is as follows. If, for a given control object, we find in an analytical form the entire set of feedback control laws that provide a given set of eigenvalues, then with the appropriate parametrization of this set, we can distinguish a subset of robust control laws with respect to a particular factor. The basis for obtaining a parameterized solution to the synthesis problem is the similarity transformation for the matrix of eigenvalues of the zero level of the decomposition of the control object. The results of numerical simulation of the control of the longitudinal motion of the aircraft using synthesized analytical laws are presented. Based on its results, the influence of the coefficient of the model is estimated, at which, for a non-robust analytical control law, the aircraft loses stability in longitudinal motion. It is noted that the robust control law has no restrictions with respect to the error of setting the considered coefficient of the model, which characterizes the increment of the lifting force of the aircraft from the increment of the angle of attack and the angle of inclination of the trajectory.

Keywords: longitudinal motion, hypothetical aircraft of aircraft type, mathematical model, decompositional method of modal synthesis, system with many inputs and many outputs (MIMO-system), robust control terminal

For citation:

Zubov N. E., Ryabchenko V. N., Proletarsky A. V. On One Approach to the Synthesis of Robust Control of the Stabilization of the Hypothetical Aircraft Longitudinal Motion, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 4, pp. 216–224.

DOI: 10.17587/mau.23.216-224

References

1. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** Robust control with "deep" feedback, *XIII All-Russian meeting on management problems of VSPU-2019. Proceedings of the XIII All-Russian Meeting on the problems of VSPU management-2019*, V. A. Trapeznikov Institute of Control Problems of the Russian Academy of Sciences, 2019, pp. 771–775 (in Russian).
2. **Gadzhiev M. G., Misrikhanov M. Sh., Ryabchenko V. N., Sharov Yu. V.** Matrix methods of analysis and control of transients in electric power systems, Moscow, Publishing House of MEI, 2019, 462 p. (in Russian).
3. **Krasovsky A. A., Vavilov Yu. A., Suchkov A. I.** Automatic control systems of aircraft, Moscow, Air Force Academy named after Prof. N. E. Zhukovsky, 1986, 480 p. (in Russian).
4. **Zubov N. E., Mikrin E. A., Ryabchenko V. N.** Matrix methods to the theory and practice of automatic control systems of aircraft, Moscow, MGTU named after N. U. Bauman, 2016, 666 p. (in Russian).
5. **Ryabchenko V. N., Zubov N. E., Sorokin I. V., Proletarskii A. V.** Complete Pole Placement Method for Linear MIMO

- Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 1, pp. 11–18
6. **Zubov N. E., Ryabchenko V. N.** To Analysis of Robust Stability of Longitudinal Motion of a Maneuverable Aircraft, Instruments and Systems: Monitoring, Control, Diagnostics, 2021. № 6, pp. 10–15.
7. **Zubov N. E., Ryabchenko V. N., Sorokin I. V.** Synthesis of Stabilization Laws of a Single-Aircrew Helicopter's Lateral Motion for Lack of Information about its Lateral Speed: Analytical Solution, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 4, pp. 273–281.
8. **Zubov N. E., Mikrin E. A., Misrikhanov M. Sh., Ryabchenko V. N.** Synthesis of Decoupling Laws for Attitude Stabilization of a Spacecraft, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2012, vol. 51, iss. 1, pp. 80–96.
9. **Zubov N. E., Mikrin E. A., Misrikhanov M. Sh., Ryabchenko V. N.** Modification of the Exact Pole Placement Method and its Application for the Control of Spacecraft Motion, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2013, vol. 52, iss. 2, pp. 279–292.
10. **Zubov N. E., Mikrin E. A., Misrikhanov M. Sh., Ryabchenko V. N.** Output Control of the Spectrum of a Descriptor

Dynamical System, *Doklady Mathematics*, 2016, vol. 93, iss. 3, pp. 259–261.

11. Zubov N. E., Mikrin E. A., Misrikhanov M. Sh., Ryabchenko V. N. Stabilization of Coupled Motions of an Aircraft in the Pitch-Yaw Channels in the Absence of Information about the Sliding Angle: Analytical Synthesis, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2015, vol. 54, iss. 1, pp. 93–103.

12. Zubov N. E., Mikrin E. A., Misrikhanov M. Sh., Ryabchenko V. N. Output control of the Longitudinal Motion of a Flying Vehicle, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2015, vol. 54, iss. 5, pp. 825–837.

13. Zubov N. E., Mikrin E. A., Ryabchenko V. N., Fomichev A. V. Synthesis of Control Laws for Aircraft Lateral Motion at the Lack of Data on the Slip Angle: Analytical Solution, *Russian Aeronautics*, 2017, vol. 60, iss. 1, pp. 64–73.

14. Zubov N. E., Mikrin E. A., Misrikhanov M. Sh., Proletarskii A. V., Ryabchenko V. N. Output Control of a Spacecraft

Motion Spectrum, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2014, vol. 53, iss. 4, pp. 576–586.

15. Zubov N. E., Lapin A. V., Mikrin E. A., Ryabchenko V. N. Output Control of the Spectrum of a Linear Dynamic System in Terms of the Van der Woude Method, *Doklady Mathematics*, 2017, vol. 96, iss. 2, pp. 457–460.

16. Zubov N. E., Mikrin E. A., Misrikhanov M. Sh., Ryabchenko V. N. Finite Eigenvalue Assignment for a Descriptor System, *Doklady Mathematics*, 2015, vol. 91, no. 1, pp. 64–67.

17. Zubov N. E., Mikrin E. A., Misrikhanov M. Sh., Ryabchenko V. N., Proletarskii A. V. Analytical Synthesis of Control Laws for Lateral Motion of Aircraft, *Russian Aeronautics*, 2015, vol. 58, iss. 3, pp. 263–270.

18. Zubov N. E., Mikrin E. A., Ryabchenko V. N., Timakov S. N. The use of an Adaptive Bandpass Filter as an Observer in the Control Loop of the International Space Station, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2012, vol. 51, no. 4, pp. 560–572.

Издательство "НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ"

107076, Москва, Матросская тишина, 23с2

Телефон редакции журнала: **+7(499) 270 16 52**

Технический редактор *Е. В. Конова*. Корректор *М. Ю. Безменова*.

Сдано в набор 25.01.2022. Подписано в печать 15.03.2022. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН422. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Авансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Авансед солюшнз".
119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1. Сайт: www.aov.ru