

References

1. **Krut'ko P. D.** Polinomial'nye uravneniya i obratnye zadachi dinamiki upravlyaemykh sistem. *Izv. RAN. Tekhn. kibernetika*. 1986. N. 1. P. 125–133.
2. **Gayduk A. R.** Teoriya i metody analiticheskogo sinteza sistem avtomaticheskogo upravleniya (polinomial'nyy podkhod). M.: Fizmatlit, 2012. 360 p.
3. **Tararykin S. V., Tyutikov V. V.** Sistemnoe proektirovanie lineynykh regulyatorov sostoyaniya. *Izv. RAN. TiSU*. 1995. N. 4.

4. **Gudvin G. K., Grebe S. F., Sal'gado M. E.** Proektirovanie sistem upravleniya. M.: BINOM. Laboratoriya znaniy, 2004. 911 p.
5. **Tararykin S. V., Tyutikov V. V.** Robastnoe modal'noe upravlenie dinamicheskimi sistemami. *Izv. RAN. AiT*. 2002. N. 5.
6. **Voronoy V. V.** Kratkiy obzor metodov sinteza regulyatorov ponizhenogo poryadka. *Sb. nauchn. tr. NGTU*. 2010. N. 4 (62). P. 25–34.
7. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** Kontseptsiya modal'noy reduksii modeley upravlyaemykh sistem. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*. 2013. N. 12. P. 2–8.

УДК 681.511.4

Н. В. Фалдин, д р техн. наук, проф., nvfaldin@yandex.ru,
А. В. Моржов, канд. техн. наук, доц., morzhov@mail.ru,
Тулский государственный университет

Чувствительность ошибки слежения к изменению параметров объекта управления в релейной автоколебательной системе¹

Рассматриваются автоколебательные системы с двухпозиционным релейным элементом и гладким нелинейным объектом управления. Разработан основанный на дискретной линеаризации по полезному сигналу метод получения функций чувствительности ошибки слежения к изменению параметров объекта управления. Метод можно использовать для анализа, а также при синтезе релейной системы. Приводится пример, иллюстрирующий получение функции чувствительности.

Ключевые слова: релейная система, нелинейный объект, автоколебания, дискретная линеаризация, чувствительность, ошибка слежения

Введение

Релейные автоматические системы находят широкое применение в технике. При их анализе и синтезе важно иметь информацию о чувствительности системы к изменению параметров объекта управления. Располагая функциями чувствительности, можно оперативно оценить влияние отклонения параметров от их номинальных значений на выходные характеристики системы. На практике такие отклонения всегда имеют место.

Далее, функции чувствительности используются для назначения допусков на элементы системы управления. С их помощью можно выполнить синтез системы с заданными ограничениями на чувствительность.

Теория чувствительности наиболее бурно развивалась в 60-е, 70-е и 80-е годы прошлого столетия. На эту тему имеется большое число публикаций. Однако в опубликованных работах весьма слабо представлены методы исследования чувствительности релейных автоматических систем. Рассматривались лишь релейные системы с линейными объектами управления. Между тем, реальные объекты управления, как правило, являются нелинейными.

Данная статья посвящена разработке метода получения функций чувствительности ошибки слежения в релейных автоколебательных системах. Рассмат-

риваются системы с двухпозиционным релейным элементом и гладким нелинейным объектом управления. Именно произвольный гладкий нелинейный объект существенно усложняет исследование.

Для оперативной оценки точности режима слежения релейной системы на практике, как правило, используют какую-либо ее линеаризацию по полезному сигналу. Наиболее эффективным методом, который можно использовать при любой нелинейности объекта управления, является дискретная линеаризация [1–3]. Метод был разработан авторами настоящей статьи, и его практическое применение показало, что он характеризуется высокой точностью.

В работе для получения функции чувствительности полезной составляющей выходного сигнала используется дискретная линеаризация релейной системы. Определение функции чувствительности сводится к решению неоднородного линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами с периодом дискретности по времени, равным полупериоду автоколебаний. Это позволяет получить решетчатую функцию чувствительности, которая задает чувствительность каждой дискреты выходного сигнала.

Следящие релейные системы проектируются таким образом, чтобы частота автоколебаний существенно превосходила частоту входного сигнала. В этих условиях, располагая решетчатой функцией чувствительности выходного сигнала, можно исследовать чувствительность ошибки слежения к изменению параметров объекта управления.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-08-00662).

Чувствительность периодического движения

Отклонение параметров объекта управления от их номинальных значений приводит к изменению периодического движения. Именно это изменение оказывает наиболее существенное влияние на чувствительность режима слежения. Поэтому необходимо, прежде всего, получить функции чувствительности периодической траектории.

Рассмотрим релейную систему, функциональная схема которой представлена на рис. 1. Движение системы задается уравнениями

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha, u), \quad (1)$$

$$u = \Phi(\varepsilon, A, b), \quad \varepsilon = y - \mathbf{R}^T \mathbf{x}, \quad (2)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ и $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ — векторы; \mathbf{R}^T — матрица-строка; α — некоторый скалярный параметр; u — сигнал с выхода релейного элемента; y — входной сигнал. Релейный элемент является двухпозиционным. Функция Φ задается его статической характеристикой, представленной на рис. 2.

Предполагается, как это обычно имеет место в следящих системах, что объект обладает симметрией:

$$\mathbf{f}(-\mathbf{x}, \alpha, -u) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha, u).$$

В таких релейных системах при отсутствии входного сигнала, как правило, имеют место симметричные автоколебания, т. е.

$$\mathbf{x}(t + T) = -\mathbf{x}(t),$$

где $2T$ — период.

Фазовый годограф [4–6] позволяет легко определить возникающие в автономной ($y(t) \equiv 0$) системе (1), (2) автоколебания. Пусть $\mathbf{x}(t)$ — периодическая траектория автономной системы (1), (2) периода $2T$, обладающая указанной выше симметрией. Получим

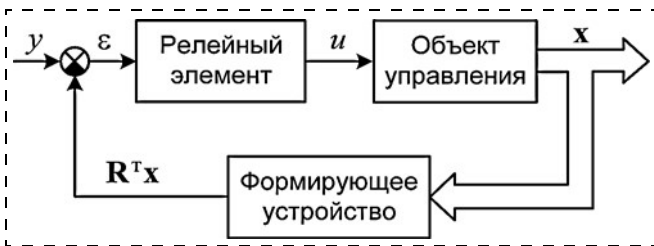


Рис. 1

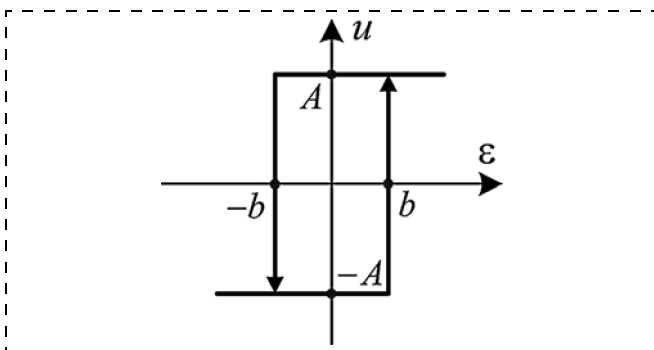


Рис. 2

функцию чувствительности траектории $\mathbf{x}(t)$ к изменению параметра α .

Дадим параметру α малое приращение $\delta\alpha$. Малое изменение параметра α приведет к малому изменению периодической траектории. Обозначим периодическую траекторию в параметрически возмущенной системе $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{x}(t)$. Приращение $\delta\mathbf{x}(t)$ имеет тот же порядок малости, что и $\delta\alpha$.

Учитывая симметрию, ограничимся рассмотрением на полупериоде. На полупериоде сигнал управления $u(t)$ является постоянной величиной.

Подставим в уравнение (1) траекторию $\tilde{\mathbf{x}}(t)$:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{d\delta\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}, \alpha + \delta\alpha, u). \quad (3)$$

Полагая, что функция \mathbf{f} непрерывно дифференцируема по \mathbf{x} и α , из (3) найдем:

$$\frac{d\delta\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha, u)}{\partial \mathbf{x}} \delta\mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha, u)}{\partial \alpha} \delta\alpha. \quad (4)$$

Равенство (4) называется уравнением в вариациях. В нем опущены слагаемые, имеющие порядок малости выше первого.

Вариация параметра α приведет к изменению периода. Период траектории $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ обозначим $2(T + \delta T)$, где δT — малая величина.

Равенство (4) представляет собой неоднородное линейное уравнение с переменными коэффициентами. Обозначим $\mathbf{V}^0(t_0, t)$ нормированную фундаментальную матрицу решений однородного ($\delta\alpha = 0$) уравнения (4), где t_0 — начальный момент времени. Совместим начальный момент с моментом переключения на траектории $\mathbf{x}(t)$ управления с $u = -A$ на $u = A$, положив $t_0 = 0$. Пусть, далее, $\mathbf{r}(t)$ — решение неоднородного уравнения (4) при $\delta\mathbf{x}(0) = 0$, $\delta\alpha = 1$. Решение уравнения (4) при произвольном начальном условии $\delta\mathbf{x}(0)$ имеет вид

$$\delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{V}^0(0, t)\delta\mathbf{x}(0) + \mathbf{r}(t)\delta\alpha. \quad (5)$$

На траектории $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ переключение управления с $u = A$ на $u = -A$ происходит в момент $T + \delta T$, следовательно,

$$-\mathbf{R}^T[\mathbf{x}(T + \delta T) + \delta\mathbf{x}(T + \delta T)] = -b. \quad (6)$$

Опуская, как и выше, величины, имеющие порядок малости выше первого, и принимая во внимание условие переключения релейного элемента на траектории $\mathbf{x}(t)$, из (6) найдем

$$\delta T = -\frac{\mathbf{R}^T \delta\mathbf{x}^-(T)}{\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{x}}^-(T)}, \quad (7)$$

здесь и в дальнейшем символом "минус" обозначаются пределы слева.

Ниже равенства, в которых не учитываются величины, имеющие порядок малости выше первого, будем записывать, не оговаривая это особо.

Периодическая траектория $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ обладает симметрией, и поэтому

$$\mathbf{x}(T + \delta T) + \delta\mathbf{x}(T + \delta T) = -\mathbf{x}(0) - \delta\mathbf{x}(0). \quad (8)$$

Из (8), принимая во внимание симметрию траектории $\mathbf{x}(t)$, следует

$$\delta\mathbf{x}(0) = -\delta\mathbf{x}^-(T) - \dot{\mathbf{x}}^-(T)\delta T. \quad (9)$$

Подставляя (7) в (9) и учитывая (5), найдем

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{I} + \mathbf{V}^0(0, T) - \frac{\dot{\mathbf{x}}^-(T)\mathbf{R}^T\mathbf{V}^0(0, T)}{\mathbf{R}^T\dot{\mathbf{x}}^-(T)} \right] \delta\mathbf{x}(0) = \\ = \left[\frac{\dot{\mathbf{x}}^-(T)\mathbf{R}^T\mathbf{r}(T)}{\mathbf{R}^T\dot{\mathbf{x}}^-(T)} - \mathbf{r}(T) \right] \delta\alpha, \end{aligned} \quad (10)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица. Из (10) следует

$$\delta\mathbf{x}(0) = \gamma\delta\alpha, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma = \left[\mathbf{I} + \mathbf{V}^0(0, T) - \frac{\dot{\mathbf{x}}^-(T)\mathbf{R}^T\mathbf{V}^0(0, T)}{\mathbf{R}^T\dot{\mathbf{x}}^-(T)} \right]^{-1} \times \\ \times \left[\frac{\dot{\mathbf{x}}^-(T)\mathbf{R}^T\mathbf{r}(T)}{\mathbf{R}^T\dot{\mathbf{x}}^-(T)} - \mathbf{r}(T) \right]. \end{aligned}$$

Если в (5) положить $\delta\mathbf{x}(0) = \gamma\delta\alpha$, то получим вариацию периодической траектории, которую обозначим

$$\delta\mathbf{x}(t) = \rho(t)\delta\alpha,$$

где

$$\rho(t) = \mathbf{V}^0(0, t)\gamma + \mathbf{r}(t). \quad (12)$$

Легко видеть, что $\rho(t)$ является функцией чувствительности периодической траектории по параметру α .

Из (7) и (5) следует, что

$$\delta T = \nu\delta\alpha, \quad (13)$$

здесь

$$\nu = -\frac{\mathbf{R}^T\rho(T)}{\mathbf{R}^T\dot{\mathbf{x}}^-(T)}.$$

Таким образом, при фиксированном $\delta\alpha$ траектория $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) + \rho(t)\delta\alpha$ имеет период $2T^* = 2(T + \nu\delta\alpha)$.

Чувствительность ошибки слежения

Рассматривается режим слежения в параметрически возмущенной релейной системе. Воспользуемся дискретной линеаризацией.

Пусть на вход системы подается малый медленно меняющийся сигнал $y(t)$. Он приведет к малому изменению установившегося движения, которое, собственно, и определяет режим слежения.

Обозначим $\hat{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t) + \delta\tilde{\mathbf{x}}(t)$ установившуюся траекторию системы, здесь $\delta\tilde{\mathbf{x}}(t)$ — малая величина. Подставив в уравнение (1) траекторию $\hat{\mathbf{x}}(t)$, ана-

логично тому, как это делалось выше, получим уравнение в вариациях

$$\frac{d\delta\tilde{\mathbf{x}}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \alpha + \delta\alpha, u)}{\partial\tilde{\mathbf{x}}} \delta\tilde{\mathbf{x}}. \quad (14)$$

Пусть

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}, \alpha + \delta\alpha, u) = \frac{\partial\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha + \delta\alpha, u)}{\partial\mathbf{x}}.$$

Из (14) следует, что

$$\frac{d\delta\tilde{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{M}(\mathbf{x} + \rho\delta\alpha, \alpha + \delta\alpha, u)\delta\tilde{\mathbf{x}}.$$

Так как $\delta\alpha$ является малой величиной, то можно записать

$$\frac{d\delta\tilde{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{M}(\mathbf{x}, \alpha, u)\delta\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{N}(\mathbf{x}, \alpha, u)\delta\alpha\delta\tilde{\mathbf{x}}, \quad (15)$$

где

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}, \alpha, u) = \frac{d}{d\delta\alpha} \mathbf{M}(\mathbf{x} + \rho\delta\alpha, \alpha + \delta\alpha, u)|_{\delta\alpha=0}.$$

Во избежание недоразумений отметим, что в равенстве (15) $\delta\alpha$ и $\delta\tilde{\mathbf{x}}$ — независимые малые величины.

Отметим, и это весьма важно, что матрицы $\mathbf{M}(\mathbf{x}, \alpha, u)$ и $\mathbf{N}(\mathbf{x}, \alpha, u)$ зависят только от периодической траектории $\mathbf{x}(t)$ и номинального значения параметра α .

Равенство (15) представляет собой однородное линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами. Найдем для (15) нормированную фундаментальную матрицу решений.

Положим $\delta\tilde{\mathbf{x}}(t) = \delta\tilde{\mathbf{x}}^0(t) + \mathbf{m}(t)\delta\alpha$, где $\delta\tilde{\mathbf{x}}^0(t)$ — решение уравнения (15) при $\delta\alpha = 0$ и некотором начальном условии $\delta\tilde{\mathbf{x}}^0(0)$. Из (15) следует

$$\frac{d}{dt} \mathbf{m}(t) = \mathbf{M}(\mathbf{x}, \alpha, u)\mathbf{m}(t) + \mathbf{N}(\mathbf{x}, \alpha, u)\delta\tilde{\mathbf{x}}^0(t). \quad (16)$$

В уравнении (16) $\delta\tilde{\mathbf{x}}^0(t)$ — известная функция времени.

Пусть $\mathbf{m}(t)$ — решение уравнения (16) при $\mathbf{m}(0) = 0$.

Это решение зависит от функции $\delta\tilde{\mathbf{x}}^0(t)$, которая, в свою очередь, определяется начальным условием $\delta\tilde{\mathbf{x}}^0(0)$.

При $\delta\alpha = 0$ уравнение (15) имеет введенную ранее нормированную фундаментальную матрицу решений $\mathbf{V}^0(0, t)$. Столбцы этой матрицы являются решениями уравнения (15) при начальных условиях $\mathbf{e}^1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}^2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $\mathbf{e}^n = (0, \dots, 0, 1)$. Обозначим $\mathbf{V}^\alpha(0, t)$ матрицу, столбцы которой образованы векторами $\mathbf{m}^1(t)$, $\mathbf{m}^2(t)$, ..., $\mathbf{m}^n(t)$, причем вектор $\mathbf{m}^i(t)$ является решением уравнения (16) при $\delta\tilde{\mathbf{x}}^0(0) = \mathbf{e}^i$, $i = \overline{1, n}$. Легко видеть, что

$$\mathbf{V}(0, t) = \mathbf{V}^0(0, t) + \mathbf{V}^\alpha(0, t)\delta\alpha \quad (17)$$

является нормированной фундаментальной матрицей решений уравнения (15). Строго говоря, $\mathbf{V}(0, t)$

задает линеаризованную по α нормированную фундаментальную матрицу решений.

В работе [1] для релейной автоколебательной системы получено линейное разностное уравнение с периодом дискретности по времени, равным полупериоду автоколебаний, задающее дискретную линеаризацию системы по полезному сигналу. Запишем это уравнение для параметрически возмущенной системы (1), (2):

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\mathbf{x}}((k+1)T^*) = & \left[\mathbf{V}(0, T^*) - \right. \\ & \left. - \frac{(\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T^*) - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^+(T^*)) \mathbf{R}^T \mathbf{V}(0, T^*)}{\mathbf{R}^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T^*)} \right] \delta \tilde{\mathbf{x}}(kT^*) + \\ & + \frac{\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T^*) - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^+(T^*)}{\mathbf{R}^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T^*)} y((k+1)T^*), \end{aligned} \quad (18)$$

здесь и в дальнейшем символом "плюс" обозначены пределы справа.

Принимая во внимание, что $\mathbf{V}(0, T^*) = \mathbf{V}^0(0, T^*) + \mathbf{V}^\alpha(0, T^*)\delta\alpha$, $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\rho}(t)\delta\alpha$, $T^* = T + \nu\delta\alpha$, преобразуем равенство (18). Далее, для сокращения весьма громоздких формул вместо $\mathbf{V}^0(0, t)$ и $\mathbf{V}^\alpha(0, t)$ будем использовать обозначения $\mathbf{V}^0(t)$ и $\mathbf{V}^\alpha(t)$. Так как $\delta\alpha$ является малой величиной, из (18) следует

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\mathbf{x}}((k+1)T^*) = & \left\{ \mathbf{V}^0(T) + \dot{\mathbf{V}}^0(T)\nu\delta\alpha + \mathbf{V}^\alpha(T)\delta\alpha - \right. \\ & \left. - \frac{[(\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T) + \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T)\nu\delta\alpha + \dot{\rho}^-(T)\delta\alpha) - (\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^+(T) + \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}^+(T)\nu\delta\alpha + \dot{\rho}^+(T)\delta\alpha)]}{\mathbf{R}^T[\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T) + \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T)\nu\delta\alpha + \dot{\rho}^-(T)\delta\alpha]} \times \right. \\ & \left. \times \mathbf{R}^T(\mathbf{V}^0(T) + \dot{\mathbf{V}}^0(T)\nu\delta\alpha + \mathbf{V}^\alpha(T)\delta\alpha) \right\} \delta \tilde{\mathbf{x}}(kT^*) + \\ & + \frac{(\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T) + \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T)\nu\delta\alpha + \dot{\rho}^-(T)\delta\alpha) - (\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^+(T) + \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}^+(T)\nu\delta\alpha + \dot{\rho}^+(T)\delta\alpha)}{\mathbf{R}^T[\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T) + \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T)\nu\delta\alpha + \dot{\rho}^-(T)\delta\alpha]} \times \\ & \times y((k+1)T^*). \end{aligned} \quad (19)$$

Выделим в (19) слагаемые, не зависящие от $\delta\alpha$ (исключая знаменатель), и слагаемые, зависящие от $\delta\alpha$:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\mathbf{x}}((k+1)T^*) = & \\ = & \left[\mathbf{V}^0(T) - \frac{(\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T) - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^+(T)) \mathbf{R}^T \mathbf{V}^0(T)}{\mathbf{R}^T[\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T) + (\ddot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T)\nu + \dot{\rho}^-(T))\delta\alpha]} \right] \delta \tilde{\mathbf{x}}(kT^*) + \\ + & \left[\dot{\mathbf{V}}^0(T)\nu + \mathbf{V}^\alpha(T) - \frac{(\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T) - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^+(T)) \mathbf{R}^T(\mathbf{V}^0(T)\nu + \mathbf{V}^\alpha(T))}{\mathbf{R}^T[\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T) + \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T)\nu\delta\alpha + \dot{\rho}^-(T)\delta\alpha]} - \right. \\ - & \left. \frac{[\ddot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T)\nu - \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}^+(T)\nu + \dot{\rho}^-(T) - \dot{\rho}^+(T)] \mathbf{R}^T \mathbf{V}^0(T)}{\mathbf{R}^T[\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T) + \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T)\nu\delta\alpha + \dot{\rho}^-(T)\delta\alpha]} \right] \delta\alpha \delta \tilde{\mathbf{x}}(kT^*) + \\ + & \frac{\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T) - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^+(T)}{\mathbf{R}^T[\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T) + \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T)\nu\delta\alpha + \dot{\rho}^-(T)\delta\alpha]} y((k+1)T^*) + \\ + & \frac{\ddot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T)\nu - \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}^+(T)\nu + \dot{\rho}^-(T) - \dot{\rho}^+(T)}{\mathbf{R}^T[\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T) + \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T)\nu\delta\alpha + \dot{\rho}^-(T)\delta\alpha]} \delta\alpha y((k+1)T^*). \end{aligned} \quad (20)$$

Выполним линеаризацию по $\delta\alpha$ уравнения (20) в окрестности $\delta\alpha = 0$. В результате получим равенство

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\mathbf{x}}((k+1)T^*) = & \mathbf{P} \delta \tilde{\mathbf{x}}(kT^*) + \mathbf{Q} y((k+1)T^*) + \\ & + \mathbf{L} \delta\alpha \delta \tilde{\mathbf{x}}(kT^*) + \mathbf{S} \delta\alpha y((k+1)T^*). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = & \mathbf{V}^0(T) - \frac{(\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T) - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^+(T)) \mathbf{R}^T \mathbf{V}^0(T)}{\mathbf{R}^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T)}; \\ \mathbf{Q} = & \frac{\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T) - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^+(T)}{\mathbf{R}^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T)}; \\ \mathbf{L} = & \dot{\mathbf{V}}^0(T)\nu + \mathbf{V}^\alpha(T) + \\ + & \frac{(\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T) - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^+(T)) \mathbf{R}^T \mathbf{V}^0(T) \mathbf{R}^T (\ddot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T)\nu + \dot{\rho}^-(T))}{(\mathbf{R}^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T))^2} - \\ - & \left[\frac{(\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T) - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^+(T)) \mathbf{R}^T (\mathbf{V}^0(T)\nu + \mathbf{V}^\alpha(T))}{\mathbf{R}^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T)} + \right. \\ + & \left. \frac{[\ddot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T)\nu - \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}^+(T)\nu + \dot{\rho}^-(T) - \dot{\rho}^+(T)] \mathbf{R}^T \mathbf{V}^0(T)}{\mathbf{R}^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T)} \right]; \\ \mathbf{S} = & \frac{\ddot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T)\nu - \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}^+(T)\nu + \dot{\rho}^-(T) - \dot{\rho}^+(T)}{\mathbf{R}^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T)} - \\ - & \frac{[\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T) - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^+(T)] \mathbf{R}^T (\ddot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T)\nu + \dot{\rho}^-(T))}{(\mathbf{R}^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T))^2}. \end{aligned}$$

Будем релейную систему с номинальным значением параметра α рассматривать как частный случай параметрически возмущенной системы при $\delta\alpha = 0$.

При $\delta\alpha = 0$ $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t)$, $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) + \delta\tilde{\mathbf{x}}(t)$. Вариацию траектории в данном случае будем обозначать символом "*", т. е. $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) + \delta\tilde{\mathbf{x}}^*(t)$.

Периодическая траектория $\mathbf{x}(t)$ имеет период $2T$. Матрица \mathbf{P} и вектор \mathbf{Q} зависят только от траектории $\mathbf{x}(t)$. Поэтому разностное уравнение, задающее дискретную линеаризацию релейной системы при номинальном значении параметра α , можно получить из (21), положив в нем $\delta\alpha = 0$ и заменив период дискретности T^* на T :

$$\delta \tilde{\mathbf{x}}^*((k+1)T) = \mathbf{P} \delta \tilde{\mathbf{x}}^*(kT) + \mathbf{Q} y((k+1)T). \quad (22)$$

Траектории движения

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t) + \delta\tilde{\mathbf{x}}(t),$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t) + \delta\tilde{\mathbf{x}}^*(t)$$

соответственно параметрически возмущенной системы и системы с номинальным значением параметра α содержат периодические функции $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ и $\mathbf{x}(t)$. Каждая из этих функций обладает симметрией и не

имеет постоянной составляющей. Поэтому на практике при исследовании режима слежения основной интерес представляет не траектория $\hat{\mathbf{x}}(t)$, а функции $\delta\tilde{\mathbf{x}}(t)$ и $\delta\tilde{\mathbf{x}}^*(t)$, задающие "средние" значения, на которые наложены колебания. Именно указанные "средние" значения являются полезной составляющей движения релейной системы.

Релейные системы часто являются подсистемой некоторой "главной" системы. В качестве примера можно привести автоколебательные рулевые приводы ракеты. Высокочастотные колебания фильтруются "главной" системой, имеющей большую инерционность, т. е. она реагирует на полезную составляющую движения.

Принимая во внимание сказанное выше, для исследования режима слежения необходимо получить функцию чувствительности полезной составляющей движения, т. е. вариации $\delta\tilde{\mathbf{x}}^*(t)$.

Положим в равенстве (21) $T^* = T + v\delta\alpha$. В результате получим

$$\delta\tilde{\mathbf{x}}((k+1)(T+v\delta\alpha)) = \mathbf{P}\delta\tilde{\mathbf{x}}(k(T+v\delta\alpha)) + \mathbf{Q}y((k+1)(T+v\delta\alpha)) + \mathbf{L}\delta\alpha\delta\tilde{\mathbf{x}}(k(T+v\delta\alpha)) + \mathbf{S}\delta\alpha y((k+1)(T+v\delta\alpha)). \quad (23)$$

Для любого k ($k \neq \infty$), опуская в (23) величины, имеющие порядок малости относительно $\delta\alpha$ выше первого, найдем

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\mathbf{x}}((k+1)T) + [(k+1)v\delta\alpha]\delta\dot{\tilde{\mathbf{x}}}((k+1)T) &= \\ = \mathbf{P}[\delta\tilde{\mathbf{x}}(kT) + kv\delta\alpha\delta\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(kT)] + \mathbf{Q}[y((k+1)T) + \\ + (k+1)v\delta\alpha\dot{y}((k+1)T)] + \mathbf{L}\delta\alpha\delta\tilde{\mathbf{x}}(kT) + \\ + \mathbf{S}\delta\alpha y((k+1)T). \end{aligned} \quad (24)$$

Вычтем из (24) равенство (22), поделим его на $\delta\alpha$ и перейдем к пределу при $\delta\alpha \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\delta\tilde{\mathbf{x}}((k+1)T) - \delta\tilde{\mathbf{x}}^*((k+1)T)}{\delta\alpha} + \\ + \lim_{\delta\alpha \rightarrow 0} (k+1)v\delta\alpha\dot{\tilde{\mathbf{x}}}((k+1)T) = \\ = \mathbf{P} \lim_{\delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\delta\tilde{\mathbf{x}}(kT) - \delta\tilde{\mathbf{x}}^*(kT)}{\delta\alpha} + \mathbf{P} \lim_{\delta\alpha \rightarrow 0} kv\delta\alpha\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(kT) + \\ + (k+1)v\mathbf{Q}\dot{y}((k+1)T) + \\ + \mathbf{L} \lim_{\delta\alpha \rightarrow 0} \delta\tilde{\mathbf{x}}(kT) + \mathbf{S}y((k+1)T). \end{aligned} \quad (25)$$

Обозначим производную

$$\frac{\partial\tilde{\mathbf{x}}^*(kT)}{\partial\alpha} = \lim_{\delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\delta\tilde{\mathbf{x}}(kT) - \delta\tilde{\mathbf{x}}^*(kT)}{\delta\alpha} = \mathbf{z}(kT).$$

Из (25) следует

$$\begin{aligned} \mathbf{z}((k+1)T) &= \mathbf{P}\mathbf{z}(kT) + \mathbf{P}kv\delta\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(kT) + \mathbf{L}\delta\tilde{\mathbf{x}}(kT) - \\ - (k+1)v\delta\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(kT) + (k+1)v\mathbf{Q}\dot{y}((k+1)T) + \\ + \mathbf{S}y((k+1)T). \end{aligned} \quad (26)$$

Равенство (22) справедливо для любого k ($k = 0, 1, 2, \dots$). Естественно предположить, что оно выполняется и для переменных с непрерывным временем t , т. е. если в (22) положить $kT = t$. Продифференцируем полученное таким образом равенство по t и запишем его для момента $t = kT$:

$$\delta\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^*((k+1)T) = \mathbf{P}\delta\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^*(kT) + \mathbf{Q}\dot{y}((k+1)T). \quad (27)$$

Рассмотренный выше способ получения равенства (27) не является строгим. Но для дискретной линеаризации как приближенного метода исследования это вполне оправданно. Далее, в работах [1—3] методом дискретной линеаризации был выполнен анализ режима слежения в релейных системах за гармоническими входными сигналами, и при этом выполнялся переход от решетчатых функций к непрерывным путем замены kT на t . На конкретных примерах была показана допустимость такого перехода.

Если принять во внимание (27), равенство (26) заметно упрощается:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}((k+1)T) &= \mathbf{P}\mathbf{z}(kT) + \mathbf{L}\delta\tilde{\mathbf{x}}^*(kT) - \\ - v\mathbf{P}\delta\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^*(kT) + \mathbf{S}y((k+1)T). \end{aligned} \quad (28)$$

В равенстве (28) $\delta\tilde{\mathbf{x}}^*(kT)$ и $\delta\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^*(kT)$ находятся из решения уравнения (22), причем $\delta\tilde{\mathbf{x}}(kT)$ определяется указанным выше способом.

Режиму слежения, как уже отмечалось, соответствует установившееся движение релейной системы. Поэтому следует искать частные решения уравнений (22) и (28), определяющие установившиеся движения. Это обычно несложно выполнить, ориентируясь на правые части указанных уравнений.

Полученная в результате решения уравнения (28) решетчатая функция $\mathbf{z}(kT)$ задает чувствительность к изменению параметра α решетчатой функции $\delta\tilde{\mathbf{x}}^*(kT)$, т. е. чувствительность каждой ее дискреты. Полезная составляющая движения параметрически возмущенной релейной системы имеет вид

$$\delta\tilde{\mathbf{x}}(kT) = \delta\tilde{\mathbf{x}}^*(kT) + \mathbf{z}(kT)\delta\alpha.$$

Пусть выходной сигнал релейной системы (см. рис. 1) задается равенством

$$X(t) = \mathbf{C}^T\mathbf{x}(t),$$

где \mathbf{C}^T — матрица-строка. Полезная составляющая выходного сигнала имеет вид

$$\delta\tilde{X}(kT) = \mathbf{C}^T\delta\mathbf{x}(kT).$$

Ошибка слежения, записанная относительно полезной составляющей выходного сигнала, имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon(kT) &= y(kT) - \delta\tilde{X}(kT) = y(kT) - \mathbf{C}^T[\delta\tilde{\mathbf{x}}^*(kT) + \\ + \mathbf{z}(kT)\delta\alpha] &= \varepsilon^0(kT) - \mathbf{C}^T\mathbf{z}(kT)\delta\alpha, \end{aligned} \quad (29)$$

где $\varepsilon^0(kT)$ — ошибка слежения в параметрически невозмущенной системе. Из (29) следует, что функ-

ция чувствительности ошибки слежения имеет вид

$$\frac{d\varepsilon(kT)}{d\alpha} = -\mathbf{C}^T \mathbf{z}(kT).$$

На практике при анализе точности режима слежения часто удобно перейти от решетчатых функций к функциям с непрерывным временем t , положив $kT = t$. Такой переход, как правило, не приводит к сколь-либо заметным ошибкам.

Пример

На рис. 3 изображена структурная схема релейной автоколебательной следящей системы. Подача на вход дополнительного сигнала $\mu \dot{y}$ (он относится к системе коррекции) позволяет устранить статическую ошибку при обработке линейно нарастающих входных сигналов, а также повысить точность воспроизведения других типов сигналов. Релейный элемент является двухпозиционным (см. рис. 2) и описывается функциональной зависимостью

$$\varphi(x_1) = \frac{2\alpha}{\pi} \operatorname{arctg}(\beta x_1).$$

Система имеет следующие значения параметров: $A = 27$, $b = 0,005$, $\Omega = 0,15$, $\tau = 0,0015$, $\beta = 0,02$, $c = 0,052$, $J = 0,0093$, $q = 120$, $C_1 = 0,003$, $C_2 = 1$, $\mu = 0,3606$.

Определяется чувствительность ошибки слежения к изменению параметра α , номинальное значение которого равно 120. Рассматривается гармонический входной сигнал

$$y(t) = a \sin \omega t,$$

где $a = 1$, $\omega = 1$ рад/с.

Движение системы задается уравнениями (1), (2). Здесь: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{R}^T = [0 \ C_1 \ C_2]$, вектор-функция

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha, u) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau}x_1 - \frac{c}{\tau\Omega}x_2 + \frac{1}{\tau\Omega}u \\ \frac{2\alpha c}{\pi J} \operatorname{arctg}(\beta x_1) \\ \frac{1}{q}x_2 \end{pmatrix}.$$

Для изображенной на рис. 3 релейной системы был построен фазовый годограф и с его помощью установлено, что в системе при $y(t) \equiv 0$ имеет место периодическое движение с полупериодом $T = 0,0083956$ с. Траектория $\mathbf{x}(t)$ определялась путем численного интегрирования уравнения (1). Фазовый годограф задает необходимое начальное условие.

Матрицы $\mathbf{V}^0(T)$ и $\mathbf{V}^\alpha(T)$ рассчитывались указанным выше способом, причем в процессе вычисления определялась также матрица $\dot{\mathbf{V}}^0(T)$. Функция

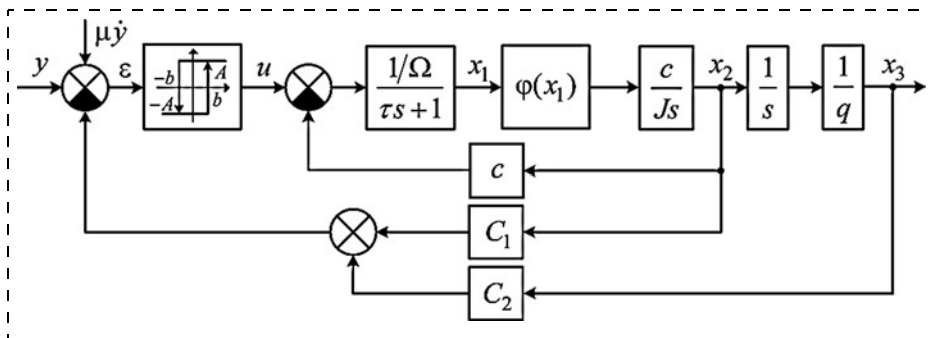


Рис. 3

чувствительности периодической траектории $\rho(t)$ находится с помощью уравнения (4). В соответствии с (7) и (5) параметр $v = -5,06304 \cdot 10^{-5}$.

Далее, как следует из уравнения (1), входящие в матрицы \mathbf{L} и \mathbf{S} векторы имеют вид

$$\ddot{\mathbf{x}}^-(T) = \mathbf{M}(\mathbf{x}(T), \alpha, A)\mathbf{f}(\mathbf{x}(T), \alpha, A);$$

$$\ddot{\mathbf{x}}^+(T) = \mathbf{M}(\mathbf{x}(T), \alpha, -A)\mathbf{f}(\mathbf{x}(T), \alpha, -A).$$

Вариация $\delta\mathbf{x}(t)$ является решением уравнения (4) при $\delta\mathbf{x}(0) = \gamma\delta\alpha$ и поэтому

$$\dot{\rho}^-(T) = \mathbf{M}(\mathbf{x}(T), \alpha, A)[\mathbf{V}^0(0, T)\gamma + \mathbf{r}(T)] + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(T), \alpha, A)}{\partial \alpha}.$$

Учитывая непрерывность периодической траектории $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{x}(t)$, найдем

$$\delta\dot{\mathbf{x}}^+(T) = \delta\dot{\mathbf{x}}^-(T) + (\dot{\mathbf{x}}^-(T) - \dot{\mathbf{x}}^+(T))v\delta\alpha. \quad (30)$$

Принимая во внимание (30), в соответствии с уравнением (4) имеем

$$\dot{\rho}^+(T) = \mathbf{M}(\mathbf{x}(T), \alpha, -A)[\mathbf{V}^0(0, T)\gamma + \mathbf{r}(T) + (\dot{\mathbf{x}}^-(T) - \dot{\mathbf{x}}^+(T))v] + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(T), \alpha, -A)}{\partial \alpha}.$$

Ниже приводятся численные значения матриц, входящих в разностные уравнения (22) и (26):

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -2,02375 & -438,42941 & -1,43145 \cdot 10^5 \\ 4,6248 \cdot 10^{-3} & 0,99687 & 0 \\ 2,78219 \cdot 10^{-7} & 6,98254 \cdot 10^{-5} & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1,43145 \cdot 10^5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} -1176,1694 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2,54713 \cdot 10^{-5} & 3,66648 & 1176,1694 \\ 3,88326 \cdot 10^{-5} & -1,51011 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 3,96447 \cdot 10^{-10} & -4,21729 \cdot 10^{-7} & 0 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим сначала решение разностного уравнения (22). В соответствии со структурной схемой

(рис. 3) на вход системы подается суммарный сигнал $y(t) + \mu \dot{y}(t)$. Поэтому в (22) следует положить

$$y((k+1)T) = a \sin(\omega(k+1)T) + \mu a \omega \cos(\omega(k+1)T).$$

Поскольку в уравнении (22) в качестве вынуждающих стоят гармонические функции, соответствующее режиму слежения частное решение будем искать в виде

$$\delta \tilde{\mathbf{x}}^*(kT) = \mathbf{B} \cos(\omega kT) + \mathbf{H} \sin(\omega kT), \quad (31)$$

здесь \mathbf{B} и \mathbf{H} — векторы. Подставив (31) в (22) и приравняв векторы при гармонических функциях $\sin(\omega kT)$ и $\cos(\omega kT)$ [1], найдем:

$$\mathbf{B} = \left[\mathbf{I} \sin(\omega T) + \frac{1}{\sin(\omega T)} (\mathbf{I} \cos(\omega T) - \mathbf{P})^2 \right]^{-1} \times \\ \times \left[\frac{1}{\sin(\omega T)} (\mathbf{I} \cos(\omega T) - \mathbf{P}) \mathbf{Q} \mu a \omega \cos(\omega T) - \right. \\ \left. - a \mathbf{P} \mathbf{Q} + \mu a \omega \mathbf{Q} \sin(\omega T) \right];$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sin(\omega T)} [(\mathbf{P} - \mathbf{I} \cos(\omega T)) \mathbf{B} + \\ + \mathbf{Q} (\mu a \omega \cos(\omega T) + a \sin(\omega T))].$$

При $a = 1$ и $\omega = 1$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 81,00796 \\ 119,95757 \\ -0,00013 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} -217,50703 \\ 0,37689 \\ 1,00038 \end{bmatrix}.$$

Соответствующее режиму слежения частное решение уравнения (26) определяется аналогичным образом. Из (31) следует, что

$$\delta \tilde{\mathbf{x}}^*((k+1)T) = \\ = \mathbf{H} \omega \cos(\omega(k+1)T) - \mathbf{B} \omega \sin(\omega(k+1)T).$$

Положим

$$\mathbf{z}(kT) = \tilde{\mathbf{B}} \cos(\omega kT) + \tilde{\mathbf{H}} \sin(\omega kT). \quad (32)$$

Имеют место равенства:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \left[- \left(\mathbf{I} \sin(\omega T) + \frac{1}{\sin(\omega T)} (\mathbf{P} - \mathbf{I} \cos(\omega T))^2 \right) \right]^{-1} \times \\ \times \left[\frac{1}{\sin(\omega T)} (\mathbf{P} - \mathbf{I} \cos(\omega T)) \{ \mathbf{B} \sin(\omega T) - \right. \\ \left. - \mathbf{H} \cos(\omega T) \} \omega + \mathbf{L} \mathbf{B} + \mathbf{Q} (a \cos(\omega T) - \right. \\ \left. - \mu a \omega \sin(\omega T)) \omega + \mathbf{S} (\mu a \omega \cos(\omega T) + a \sin(\omega T)) \right] + \\ + \{ \mathbf{B} \cos(\omega T) + \mathbf{H} \sin(\omega T) \} \omega + \mathbf{L} \mathbf{H} - \mathbf{Q} (\mu a \omega \cos(\omega T) + \\ + a \sin(\omega T)) \omega + \mathbf{S} (a \cos(\omega T) - \mu a \omega \sin(\omega T)) \};$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = \frac{1}{\sin(\omega T)} [(\mathbf{P} - \mathbf{I} \cos(\omega T)) \tilde{\mathbf{B}} + (\mathbf{B} \sin(\omega T) - \\ - \mathbf{H} \cos(\omega T)) \omega + \mathbf{L} \mathbf{B} + \mathbf{Q} (a \cos(\omega T) - \\ - \mu a \omega \sin(\omega T)) \omega + \mathbf{S} (\mu a \omega \cos(\omega T) + a \sin(\omega T))].$$

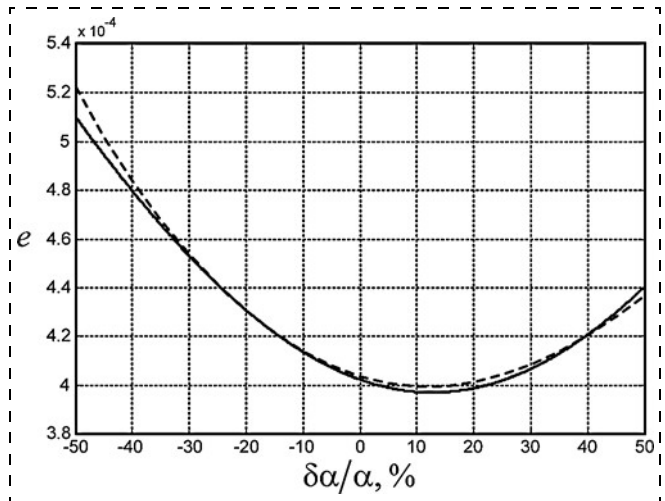


Рис. 4

После соответствующих расчетов было установлено, что при $a = 1$, $\omega = 1$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -0,28648 \\ -0,00038 \\ -3,76655 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} 3,13975 \\ -0,00255 \\ -1,96509 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}.$$

Ошибку слежения будем определять, ориентируясь на полезную составляющую выходного сигнала. Перейдем в равенствах (31) и (32) к непрерывному времени t , положив $kT = t$. Амплитуда ошибки слежения в зависимости от отклонения параметра α равна

$$e_m(\delta\alpha) = \sqrt{(H_3 - \tilde{H}_3 \delta\alpha - a)^2 + (B_3 + \tilde{B}_3 \delta\alpha)^2}, \quad (33)$$

где H_3 , \tilde{H}_3 , B_3 , \tilde{B}_3 — компоненты векторов, соответствующие выходной координате x_3 .

На рис. 4 приведены графики, задающие амплитуду ошибки слежения в зависимости от величины $\delta\alpha$. Сплошной линией представлены результаты, подсчитанные по формуле (33), а штриховой — результаты, полученные путем компьютерного моделирования релейной системы. При этом в выходном сигнале выделялась составляющая движения, имеющая частоту входного сигнала. Именно она является полезной составляющей. Из рис. 4 видно, что при отклонении параметра α от номинального значения на величину, не превышающую 50 %, теоретические результаты отличаются от "экспериментальных" менее чем на 3 %.

Заключение

В работе для получения функции чувствительности ошибки слежения использовался метод дискретной линеаризации, который является приближенным. Обращение к данному методу оправдывается двумя обстоятельствами. Во-первых, как показало его практическое использование, он харак-

теризуется высокой точностью. Допустимость его применения хорошо иллюстрируется рассмотренным выше примером. Во-вторых, он позволяет сравнительно просто ввести в процедуру синтеза использование функции чувствительности, что очень важно.

Авторы сознательно выбрали наиболее сложный для исследования вариант: релейную систему с произвольным гладким нелинейным объектом управления. Разработанный метод определения функции чувствительности ошибки слежения является своего рода алгоритмом для получения указанных функций для систем с другими типами нелинейностей объекта управления, например, кусочно-линейными, содержащими звенья с ограничителями и т. п.

Выше было рассмотрено получение функции чувствительности при изменении одного скалярного параметра объекта управления. Если имеет место изменение нескольких параметров, то ошибка слежения, обусловленная этим изменением, определяется суммированием ошибок, порожденных вариацией каждого из параметров. При этом функции чувствительности по каждому из параметров определяются изложенным выше способом.

Разработанный метод можно использовать для анализа релейных автоколебательных следящих систем, а также при их синтезе и оптимизации.

Список литературы

1. **Фалдин Н. В., Моржов А. В.** Дискретная линеаризация по полезному сигналу релейных автоколебательных систем управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2006. № 11. С. 13–19.
2. **Моржов А. В., Фалдин Н. В.** Линеаризация по полезному сигналу релейных систем управления с трехпозиционным релейным элементом и нелинейным объектом управления // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 4. С. 5–14.
3. **Моржов А. В., Фалдин Н. В.** Дискретная линеаризация по полезному сигналу релейных систем с кусочно-линейным объектом управления и трехпозиционным релейным элементом // Вторая междунар. конф. "Системный анализ и информационные технологии" САИТ–2007, г. Обнинск, Россия. Тр. конф. Т. 1. М.: Изд-во ЛКИ, 2007. С. 42–45.
4. **Фалдин Н. В.** Точный метод исследования релейных систем // Машиностроение (энциклопедия). Т. 1–4. Автоматическое управление. Теория / Под ред. Е. А. Федосова. М.: Машиностроение, 2000. С. 231–253.
5. **Фалдин Н. В.** Релейные системы автоматического управления // Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / Под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. С. 573–636.
6. **Фалдин Н. В., Феофилов С. В.** Исследование периодических движений в релейных системах, содержащих звенья с ограничениями // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 2. С. 15–27.

N. V. Faldin, Professor, nvfaldin@yandex.ru, **A. V. Morzhov**, Associate professor, morzhov@mail.ru, Tula State University

Sensitivity of Tracking Error to the Variations of the Plant Parameters in Relay Self Oscillations System

Self-oscillation control systems with a bistable relay element and smooth nonlinear plant are discussed. The method for evaluating the function of system tracking mode sensitivity to variations of the plant parameters is proposed. This method is based on the high-precision method of relay systems discrete linearization by useful signal.

Variations of the plant parameters lead to variations of the periodic movement. This has a significant impact on tracking mode sensitivity. Therefore it is necessary to get first the sensitivity functions for self-oscillation parameters (periodic trajectory, period). During the research of tracking mode of the relay self-oscillation control system the most interest is not an output signal, but its average component (also called useful component). In the system this component is modulated by the oscillations. The inhomogeneous linear differential equation with constant coefficients is obtained. The solution of this equation is sample function, which defines sensitivity of the useful component of relay system motion in tracking mode. Sampling period of this function is equal to the period of self-oscillating motions.

Relay self-oscillation systems are designed so, that the frequency of self-oscillations is significantly greater than the frequency of input signal. If we have sample function of output signal sensitivity, we can easily find sensitivity of tracking error.

The developed method of sensitivity functions definition can be used as for analysis, as for synthesis of relay self-oscillation systems.

Keywords: relay control system, nonlinear plant, self-oscillations, discrete linearization, sensitivity, tracking error

References

1. **Faldin N. V., Morzhov A. V.** Diskretnaja linearizacija po poleznomu signalu relejnyh avtokolebatel'nyh sistem upravlenija. *Mehatronika, avtomatizacija, upravlenie*. 2006. N. 11. P. 13–19.
2. **Morzhov A. V., Faldin N. V.** Linearizacija po poleznomu signalu relejnyh sistem upravlenija s trehpozicionnym relejnym jelementom i nelinejnym ob'ektom upravlenija. *Izv. RAN. TiSU*. 2008. N. 4. P. 5–14.
3. **Morzhov A. V., Faldin N. V.** Diskretnaja linearizacija po poleznomu signalu relejnyh sistem s kusochno-linejnym ob'ektom upravlenija i trehpozicionnym relejnym jelementom. *Vtoraja mezhdunarodnaja konferencija "Sistemnyj analiz i informacionnye tehnologii" SAIT-2007, g. Obninsk, Rossija. Trudy konferencii*. V. 1. M.: Izd-vo LKI, 2007. P. 42–45.
4. **Faldin N. V.** Tochnyj metod issledovanija relejnyh sistem. *Mashinostroenie (jenciklopedija)*. V. 1–4. Avtomaticheskoe upravlenie. Teorija. Pod red. E. A. Fedosova. M.: Mashinostroenie, 2000. P. 231–253.
5. **Faldin N. V.** Relejnye sistemy avtomaticheskogo upravlenija. *Matematicheskie modeli, dinamicheskie harakteristiki i analiz sistem avtomaticheskogo upravlenija*. Pod red. K. A. Pupkova, N. D. Egupova. M.: Izd-vo MGTU im. N. Je. Bauman, 2004. P. 573–636.
6. **Faldin N. V., Feofilov S. V.** Issledovanie periodicheskikh dvizhenij v relejnyh sistemah, soderzhashhijh zven'ja s ogranichenijami. *Izv. RAN. TiSU*. 2007. N. 2. P. 15–27.