

Ду Чунжуй¹, аспирант, ducrui@yandex.ru,

О. Л. Старинова^{1,2}, д-р техн. наук, проф., solleo@mail.ru,

¹ Самарский университет им. академика С. П. Королева, г. Самара,

² Нанкинский университет науки и технологий, г. Нанкин, Китай

Оптимальное управление при перелетах с малой тягой на вертикальные орбиты с орбит Ляпунова*

В системе Земля—Луна существует множество различных семейств периодических орбит, такие как орбиты Ляпунова, гало-орбиты, вертикальные орбиты и т. д. Создание лунной космической станции требует, чтобы космический корабль имел возможность перелетать между этими орбитами. Орбиты Ляпунова использовались некоторыми миссиями и являются хорошо изученными орбитами, а периодические вертикальные орбиты могут обеспечивать большие амплитуды движения космического аппарата вне плоскости движения Луны, что позволяет избежать затенения орбит и использовать их как опорные для окололунных спутниковых систем связи. Современные исследователи в основном рассматривают использование двигателей большой тяги для перелета. По мере развития технологий электроракетных двигателей применение малой, но длительно действующей тяги для исследования дальнего космоса стало особенно актуальным. Это связано с высокими удельными характеристиками двигательных систем такого типа. В данной статье разработан алгоритм определения оптимального управления с двигателем малой тяги для перелета с орбиты Ляпунова на вертикальную орбиту. В качестве критериев оптимальности используется минимальное время перелета или минимальные затраты рабочего тела. В расчете для решения двухточечной краевой задачи теории оптимального управления используется алгоритм продолжения по параметру, который позволяет постепенно получить переход от некоторых простых результатов к конечной траектории перелета. Полученные результаты позволяют утверждать, что использование промежуточных осевых орбит позволяет использовать двигательные установки с меньшими уровнями тяги. При этом несколько увеличивается длительность перелета при практически неизменном расходе рабочего тела. Более того, использование метода гомотопии позволяет получить управление с уменьшенным расходом рабочего тела, при этом управление дросселированием двигателя становится дискретным. Результаты данного исследования и алгоритмы, предложенные в этой статье, могут быть использованы для определения оптимального программного управления и баллистического проектирования лунных миссий.

Ключевые слова: задача трех тел, система Земля—Луна, двигатель малой тягой, оптимальное управление, вертикальная орбита

Введение

В системе Земля—Луна существует множество периодических и квазипериодических орбит, которые можно использовать в качестве рабочих орбит для исследования Луны. Лунные миссии требуют, чтобы космический аппарат (КА) мог перемещаться между различными орбитами.

Современные стратегии перелетов в рамках задачи трех тел могут использовать один из трех подходов: прямые импульсные перелеты (обычно с двумя импульсами); перелеты с низкими энергетическими затратами, построенные на основе теории инвариантных многообразий и теории границ слабой устойчивости; перелеты

с двигателями малой тяги (электроракетными или солнечным парусом) [1]. По мере развития технологии малой тяги применение двигателей малой, но длительно действующей тяги для исследования дальнего космоса стало особенно актуальным [2].

Известны исследования [3–5], изучающие периодические орбиты, включая плоские орбиты Ляпунова, осевые орбиты, вертикальные орбиты и способы определения оптимального программного управления для их изменения в рамках задачи трех тел.

Плоская периодическая орбита, лежащая в плоскости движения Луны, названа в честь русского математика Ляпунова [6]. Плоская орбита Ляпунова может грубо рассматриваться как суперпозиция траекторий Лиссажу, которые резонируют вдоль оси Земля—Луна [7]. Орбиты

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-29-01092, <http://rscf.ru/project/22-29-01092/>

Ляпунова широко используются для построения классификации других периодических орбит из-за их простой орбитальной структуры.

Осевые орбиты являются семейством трехмерных орбит, являющихся пространственным продолжением орбит Ляпунова в задаче трех тел. В соответствии с расположением относительно вертикальной оси системы Земля—Луна семейство осевых орбит делится на северо-восточное и северо-западное, симметричные относительно точки либрации [8]. Можно рассматривать семейство осевых орбит как промежуточное между орбитами Ляпунова и вертикальными орбитами [9].

Вертикальные орбиты — это еще одно семейство периодических орбит в задаче трех тел, которое является продолжением семейства осевых орбит [8, 9]. Они могут одновременно обеспечивать большие амплитуды вне плоскости в положительном и отрицательном направлениях оси z , что позволяет избегать затенения КА на этих орбитах и позволяет наблюдать северный и южный полюса и экватор Луны на одном витке орбиты. Поэтому периодическая вертикальная орбита является перспективной рабочей орбитой для построения лунной космической станции. Целью данной статьи является разработка алгоритма формирования программы управления для перелета КА с малой тягой с орбит Ляпунова относительно точки либрации L_2 в системе Земля—Луна на вертикальные орбиты.

Исследователи в области оптимизации перелетов с малой тягой в задаче трех тел отмечают плохую сходимость традиционных алгоритмов оптимизации и низкую вычислительную эффективность [10]. В. Г. Петухов в работе [11] предложил использовать метод продолжения по параметру для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой. М. К. Файн и О. Л. Старинова [12] использовали модифицированный метод Ньютона с переменным шагом для решения задач о перелетах с малой тяги из точки L_1 в точку L_2 в окололунном пространстве.

В работе М. Г. Широбокова и С. П. Трофимова [13] реализованы расчеты перелетов с гало-орбит на окололунные орбиты. Perez-Palau and Epenou [14] используют для расчета перелетов с Земли на гало-орбиту уменьшение размерности пространства поиска с использованием адаптированных переменных, что привело к сокращению времени вычислений. Zhang [15] впервые применил метод пристрелки и процесс гомотопии для решения задачи перелета с Зем-

ли на гало-орбиту с малой тяги с точки зрения критериев минимального времени перелета и затрат топлива на его осуществление.

Можно сделать вывод, что для решения задачи оптимального управления используются итерационные методы. Эти методы требуют определения достаточно хорошего начального приближения для законов управления. В данной статье в качестве итерационного метода используется метод коллокации [16], а для выбора начальных приближений предлагается набор алгоритмов, которые позволяют использовать метод продолжения по параметру для постепенного перехода от некоторых простых результатов к конечной траектории перелета. Такой подход был предложен и успешно использован О. Л. Стариновой [25] для оптимизации межпланетных перелетов. Эти алгоритмы просты и имеют высокую вероятность успеха, что позволяет использовать его для решения задач о перелетах между орбитами на этапе планирования будущих лунных миссий. Проектные параметры КА, используемые в вычислительных примерах в данной статье, соответствуют современной технологии двигателей малой тяги, и результаты имеют определенное практическое значение.

Динамика периодических орбит в окололунном пространстве

В проблеме трех тел безразмерное уравнение движения КА во вращающейся системе координат имеет вид [17]

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = U_x, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = U_y, \quad \ddot{z} = U_z, \quad (1)$$

где псевдопотенциал U определяется как $U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$; U_x , U_y и U_z являются частными производными от U по координатным переменным; r_1 и r_2 представляют собой безразмерные расстояния от КА до Земли и Луны соответственно, $r_1^2 = (x + \mu)^2 + y^2 + z^2$, $r_2^2 = (x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2$; для системы Земля—Луна $\mu = 0,01215$.

Используя симметрию задачи трех тел, в зависимости от выбора различных плоскостей симметрии можно получить разные семейства периодических орбит [8]. Основное внимание в этой статье уделяется орбитам Ляпунова, гало-орбитам, вертикальным орбитам и осевым орбитам относительно точки L_2 в системе Земля—Луна.

Все семейства перечисленных орбит показаны на рис. 1 (см. вторую сторону обложки).

Гало-орбиты происходят от орбит Ляпунова А (далее — $\mathbf{Л}_A$) [18], а осевые орбиты — от орбит Ляпунова Б (далее — $\mathbf{Л}_B$). Вертикальные орбиты эволюционируют от осевых орбит. В соответствии с направлением эволюции осевая орбита делится на семейства северо-восточных и северо-западных орбит. В данной статье рассчитываются оптимальные траектории перелетов с $\mathbf{Л}_A$ на вертикальные орбиты В (далее — $\mathbf{В}_B$). Для реализации процесса расчета перелета используется структура северо-восточных осевых орбит. Этот подход позволяет получить оптимальные траектории перелета с точки зрения минимизации времени перелета и расхода рабочего тела.

Постановка задачи оптимального управления

Уравнения движения КА можно переписать в следующей векторной форме для двигателя малой тяги с учетом его массового расхода и возможности регулирования [19]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}, u) \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{h}(\mathbf{v}) + u T_{\max} \boldsymbol{\alpha} / m \\ -u T_{\max} / c \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где $\mathbf{r} = [x, y, z]^T$ и $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^T$ — положение и скорость КА; m — масса КА; $T_{\max}$ — максимальное значение тяги; $c = I_{sp} g_0$ — скорость истечения рабочего тела (I_{sp} — удельный импульс двигателя; $g_0 = 9,8 \text{ м/с}^2$ — стандартное ускорение свободного падения на уровне моря); $u \in [0, 1]$ — коэффициент дросселирования тяги; $\boldsymbol{\alpha}$ — единичный вектор направления тяги. Кроме того, функции $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{h}(\mathbf{v})$ определяются следующими выражениями:

$$\begin{cases} \mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\left[\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right]^T; \\ \mathbf{h}(\mathbf{v}) = [2v_y, -2v_x, 0]^T. \end{cases} \quad (3)$$

1. Задача об оптимальном по быстрдействию управлении

Будем искать оптимальное управление, доставляющее минимум времени перелета, согласно критерию

$$J_t = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt. \quad (4)$$

После введения сопряженных векторов ($\boldsymbol{\lambda} = [\boldsymbol{\lambda}_r, \boldsymbol{\lambda}_v, \lambda_m]^T$) гамильтониан системы определяется выражением

$$H = \boldsymbol{\lambda}_r^T \mathbf{v} + \boldsymbol{\lambda}_v^T \left[\mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{h}(\mathbf{v}) + \frac{T_{\max} u}{m} \boldsymbol{\alpha} \right] - \lambda_m \frac{T_{\max} u}{c} + 1, \quad (5)$$

где $\boldsymbol{\lambda}_r = [\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z]^T$ и $\boldsymbol{\lambda}_v = [\lambda_{v_x}, \lambda_{v_y}, \lambda_{v_z}]^T$.

Согласно теории оптимального управления для сопряженных векторов имеем:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\lambda}}_r = -\left(\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \right)^T \boldsymbol{\lambda}_v; \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_v = -\boldsymbol{\lambda}_r - \left(\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right)^T \boldsymbol{\lambda}_v; \\ \dot{\lambda}_m = \frac{u T_{\max}}{m^2} \lambda_v; \\ \lambda_m(t_f) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Применяя принцип максимума Понтрягина для минимизации гамильтониана (5), можно определить управляющие переменные $\boldsymbol{\alpha}^*$ и u^* :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}^* &= -\frac{\boldsymbol{\lambda}_v}{\|\boldsymbol{\lambda}_v\|}; \\ u^* &= -\text{sign} S, \end{aligned} \quad (7)$$

где $S = -\|\boldsymbol{\lambda}_v\| \frac{c}{m} - \lambda_m$ — функция переключения S .

Поскольку функция переключения $S < 0$, управляющая переменная $u^* \equiv 1$. Таким образом, получается 14-мерная система уравнений управляемого движения КА:

$$\dot{\Phi} = \mathcal{F}(\Phi) \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{m} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_r \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_v \\ \dot{\lambda}_m \end{bmatrix} = \quad (8)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{h}(\mathbf{v}) - (\boldsymbol{\lambda}_v / \lambda_v) u T_{\max} / m \\ -u T_{\max} / c \\ -\partial \mathbf{g}(\mathbf{r}) / \partial \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\lambda}_v \\ -\boldsymbol{\lambda}_r - \partial \mathbf{h}(\mathbf{v}) / \partial \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\lambda}_v \\ -\lambda_v u T_{\max} / m^2 \end{bmatrix},$$

где $u = 1$; Φ — вектор состояния, включающий вектор фазовых координат, массы КА и сопряженного вектора: $\Phi = [\mathbf{x}, m, \boldsymbol{\lambda}]^T$, $\mathbf{x} = [\mathbf{r}, \mathbf{v}]$.

Для двух заданных точек начала и конца движения $M(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ и $N(\mathbf{r}_f, \mathbf{v}_f)$, которые расположены на орбитах вылета (ОВ) и прибытия (ОП), условия трансверсальности имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{начальные: } \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0, m(t_0) = m_0; \\ \text{конечные: } \mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_f, \mathbf{v}(t_f) = \mathbf{v}_f, \lambda_m(t_f) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, задача перелета преобразуется в следующую двухточечную краевую задачу:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} 1 dt \rightarrow \min; \\ \text{найти } \lambda_0 \text{ и } t_f \Rightarrow \\ \Rightarrow s.t. \begin{cases} \dot{\Phi} = \mathcal{F}(\Phi); \\ \Phi_0 = [\mathbf{x}_0, m_0, \lambda_0], \Phi_f = [\mathbf{x}_f, m_f, \lambda_f]; \\ M(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) \in \text{ОВ}, N(\mathbf{r}_f, \mathbf{v}_f) \in \text{ОП}; \\ \lambda_m(t_f) = 0, H(t_f) = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

2. Задача о минимальном расходе рабочего тела

В этом разделе будем искать оптимальное управление, доставляющее минимум расходу рабочего тела, согласно критерию

$$J_f = \frac{T_{\max}}{c} \int_{t_0}^{t_f} u dt. \quad (11)$$

Для того чтобы избежать разрывов непрерывных функций из-за дихотомии параметра u , используется метод продолжения по параметру [15] для сглаживания профиля управления. С учетом введения гомотопического параметра ε задача оптимального энергопотребления и задача оптимального расхода топлива связаны между собой соотношением [20]

$$J_{ef} = \frac{T_{\max}}{I_{sp} g_0} \int_0^{t_f} [u - \varepsilon u(1 - u)] dt, \quad \varepsilon \in [0, 1]. \quad (12)$$

Гомотопический метод, по сути, является одной из модификаций метода продолжения по параметру [11]. Для поиска оптимального с точки зрения расхода рабочего тела управления мы следовали следующей методике: сначала получается решение задачи о минимизации энергетических затрат при $\varepsilon = 1$ $\left(J_e = \frac{T_{\max}}{I_{sp} g_0} \int_0^{t_f} u^2 dt \right)$, затем с использованием алгоритма продолжения параметр ε постепенно уменьшается от 1 до 0, и получается требуемая орбита с минимальным расходом рабочего тела.

Введем вектор сопряженных переменных $\lambda = [\lambda_r, \lambda_v, \lambda_m]^T$, тогда гамильтониан системы (2) и критерия (12) задается следующим образом:

$$\begin{aligned} H = \lambda_r^T \mathbf{v} + \lambda_v^T \left[\mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{h}(\mathbf{v}) + \frac{T_{\max} u}{m} \boldsymbol{\alpha} \right] - \\ - \lambda_m \frac{T_{\max} u}{c} + \frac{T_{\max}}{c} [u - \varepsilon u(1 - u)], \end{aligned} \quad (13)$$

где $\lambda_r = [\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z]^T$ и $\lambda_v = [\lambda_{v_x}, \lambda_{v_y}, \lambda_{v_z}]^T$.

Согласно теории оптимального управления получаем следующую систему для сопряженных переменных:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_r = - \left(\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \right)^T \lambda_v; \\ \dot{\lambda}_v = - \lambda_r - \left(\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right)^T \lambda_v; \\ \dot{\lambda}_m = \frac{u T_{\max}}{m^2 \lambda_v} \boldsymbol{\alpha}. \end{cases} \quad (14)$$

Применяя принцип максимума Понтрягина, получим следующие оптимальные выражения для функций управления $\boldsymbol{\alpha}^*$ и u^* [15]:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}^* &= - \frac{\lambda_v}{\|\lambda_v\|}; \\ u^* &= \begin{cases} 0, & S > \varepsilon; \\ (\varepsilon - S)/2\varepsilon, & -\varepsilon \leq S \leq \varepsilon; \\ 1, & S < -\varepsilon, \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

где $S = 1 - \frac{\|\lambda_v\| c}{m} - \lambda_m$ — функция переключения.

Будем считать, что решение некоторой задачи об оптимальном по быстродействию перелете получено и известно минимальное время перелета $t_{f_{\min}}$, тогда постановка задачи об оптимальном по расходу рабочего тела перелете с длительностью $t_f \geq t_{f_{\min}}$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{T_{\max}}{c} \int_{t_0}^{t_f} u dt \rightarrow \min; \\ \text{найти } \lambda_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow s.t. \begin{cases} \dot{\Phi} = \mathcal{F}(\Phi); \\ \Phi_0 = [\mathbf{x}_0, m_0, \lambda_0], \Phi_f = [\mathbf{x}_f, m_f, \lambda_f]; \\ M(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) \in \text{ОВ}, N(\mathbf{r}_f, \mathbf{v}_f) \in \text{ОП}; \\ \lambda_m(t_f) = 0, t_f > t_{f_{\min}}. \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

1. Метод решения

Метод продолжения по параметру (непрерывный алгоритм или метод гомотопии) является одним из эффективных средств решения серии сложных задач. Обычно определяется непрерывный параметр, и существует известное решение задачи при одном из его значений, затем при изменении параметра этот метод позволяет перейти от проблемы с известным решением к новому решению. Например, в работе [21] применяется метод продолжения по параметру (ньютоновская гомотопия), чтобы постепенно обеспечить требуемые краевые условия.

Метод коллокации [22] — это метод, используемый для интегрирования и обновления начальных приближений для генерируемой орбиты. Он обеспечивает альтернативный метод формирования орбит, который доказывает большую надежность даже для случаев крайне неудачных начальных приближений, в которых схема дифференциальной коррекции дает сбой [16]. В отличие от метода Ньютона, который должен обеспечивать только начальные приближения сопряженных векторов, метод коллокации определяет значения вектора состояния и сопряженного вектора в каждой точке дискретизации. В данной статье в качестве начального приближения решения используется орбита, удовлетворяющая определенному условию, а затем используется метод продолжения по параметру для постепенного перехода к окончательному решению. Именно на этом этапе краевая задача на каждом шаге решается методом коллокации.

MATLAB предоставляет функцию *bvp4c*, которая использует схему коллокации на основе формулы коллокации Lobatto IIIA. Многочлен коллокации дает C1-непрерывное решение, которое имеет высокий порядок точности равномерно в диапазоне интегрирования. Выбор сетки и контроль ошибок основаны на результатах работы [23]. В методе коллокации используется сетка точек для разделения диапазона интегрирования на подынтервалы. Данный метод позволяет определить численное решение как решение системы глобальных алгебраических уравнений [23, 24], полученных из граничных условий и условий, обеспечивающих требуемую конфигурацию орбиты.

Затем решающая программа оценивает ошибку численного решения на каждом подынтервале. Если решение не удовлетворяет требованиям точности, решающая программа корректирует сетку и повторяет процесс.

2. Схема алгоритма

Параметры КА, рассматриваемого в данной статье, представлены ниже:

Начальная масса КА m^* , кг 1500
Удельный импульс I_{sp} , с 2000
Максимальная тяга T_{max} , Н до 0,2

Решение задач об оптимальном управлении сформулированных в предыдущем разделе, фактически является решением двухточечной краевой задачи. Мы предлагаем следующую стратегию расчета траектории перелета (ТП) по минимальному времени с орбиты J_A на вертикальную орбиту B_B .

i. Сначала устанавливаем обе орбиты ОВ и ОП как J_A , а обе точки M и N — как точки на орбите, наиболее удаленные от Луны. Движение КА по орбите J_A интегрируется на несколько витков n и называется траекторией перелета 0-й итерации (ТП0). Применяя очень небольшую тягу T_1 (порядка 10^{-2} Н) с использованием ТП0 в качестве начального приближения, все сопряженные векторы устанавливаем на 0, положения точек M и N остаются неизменными, используем метод коллокации для решения задачи в постановке. Полученная траектория называется траекторией перелета первой итерации ТП1. Примерный перелет ТП1 показан на рис. 2 (см. вторую сторону обложки).

ii. Затем постепенно меняем точку прибытия так, чтобы точка N переходила в положение, показанное на рис. 3 (см. вторую сторону обложки), что соответствует перелету (ТП2) между орбитами J_A и J_B . В этом процессе используется технология гомотопии по тяге, чтобы увеличивать тягу до определенного уровня T_2 ($T_2 = 0,11$ Н). Пример перелета показан на рис. 3 (θ_1 представляет угол управления в горизонтальном направлении, θ_2 — угол управления в вертикальном направлении).

Гомотопический процесс по значению тяги, упомянутый в работе [19], применяется для проведения моделирования с учетом различных значений тяги T :

$$T = (1 - \kappa)T_B + \kappa T_M. \quad (17)$$

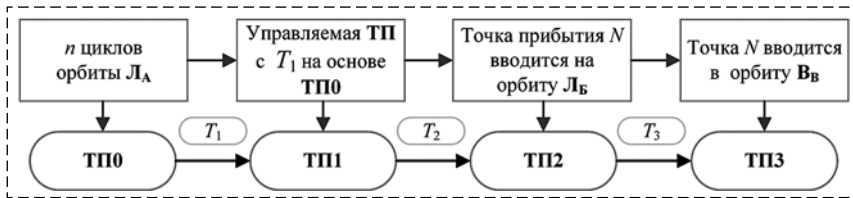


Рис. 5. Схема алгоритма
Fig. 5. Algorithm diagram

Уравнение показывает, что когда гомотопический параметр k изменяется от 1 до 0, значение тяги может увеличиваться от меньшей тяги T_M до большей тяги T_B и наоборот.

iii. В соответствии с направлением отклонений семейства осевых орбит от семейства орбит Ляпунова конечная точка N постепенно перемещается вдоль структуры семейства осевых орбит в конечное положение, что показано на рис. 4 (см. третью сторону обложки), т. е. осуществляется перелет с L_A на V_B , обозначенную как **ТПЗ**. При этом уровень тяги также увеличивается до T_3 ($T_3 = 0,135$ Н).

iv. **ТПЗ** является траекторией перелета с L_A на V_B . Затем используется непрерывный алгоритм для постепенного изменения положения точки вылета M и точки прибытия N вдоль ОВ и ОП для получения серии **ТП** между орбитами L_A и V_B . Также гомотопическая технология с уравнением (12) применяется для минимизации расхода рабочего тела.

Общая схема алгоритма поиска оптимального управления и соответствующая траектория перелета описывается схемой на рис. 5.

Результаты моделирования

Этот раздел в основном посвящен подробному анализу шага iv стратегии расчета **ТП**, упомянутой выше, которая позволяет найти глобальное оптимальное решение.

1. Оптимальный по быстрдействию перелет

Траектория **ТПЗ**, полученная на этапе iii, которая используется в качестве начального приближения для последующих расчетов, получена для уровня тяги 0,135 Н и времени перелета (ВП) 64,78 дней. Нас интересует ОП, поэтому для облегчения анализа в этой статье фиксируется начальная точка в точке M . Пусть точка N движется по целевой орбите V_B , так что будут получены все локальные оптимальные перелеты, начиная с точки M , на целевую орбиту V_B .

Чтобы указать положение точки на вертикальной орбите, обозначим $\tau = t/T_0$ — отношение времени полета КА от точки O до текущего положения по орбите к орбитальному периоду (рис. 6).

Из-за движения точки N создается серия **ТП** между L_A и V_B . Из этих локальных оптимальных

решений выбирается решение с наименьшим ВП в качестве глобального оптимального по времени решения при текущем уровне тяги.

На самом деле глобальное оптимальное по времени решение является решением с наименьшим соответствующим значением τ (рис. 7). Это легко понять, поскольку $u \equiv 1$, двигатель всегда находится в рабочем состоянии, и по мере увеличения τ необходимое ВП для достижения этой точки КА также увеличивается.

ТПЗ нарисована в пункте 2 на рис. 7. Когда точка прибытия N на орбите V_B (см. рис. 4) движется по направлению распространения

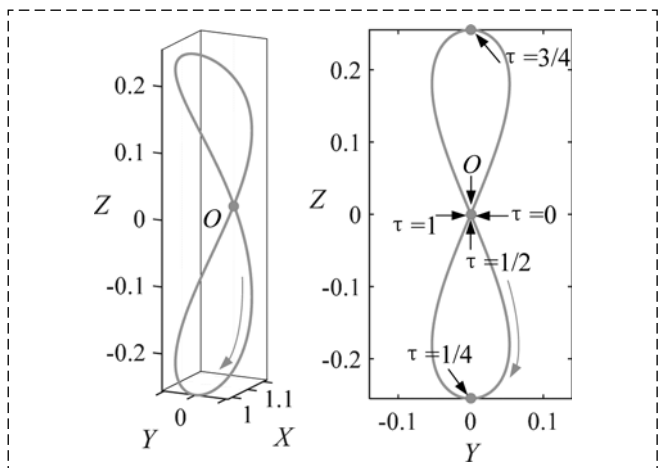


Рис. 6. Определение τ
Fig. 6. The definition of τ

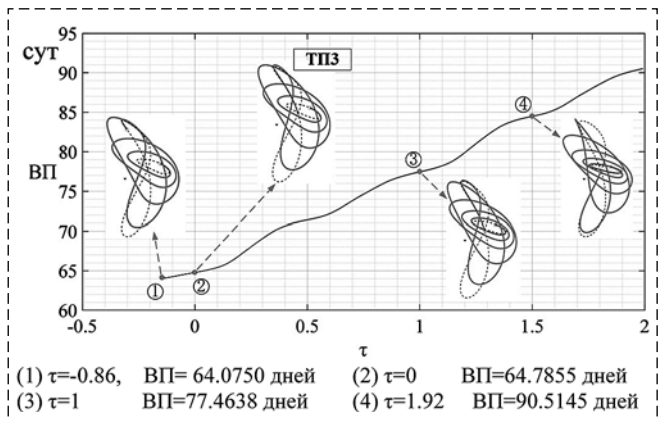


Рис. 7. Семейство ТП с точки M на вертикальную орбиту V_B
Fig. 7. The TP family from point M to vertical orbit V_B

орбиты, это приводит к увеличению τ ; движение против направления распространения приводит к уменьшению τ . Из-за периодичности орбиты два значения τ с разницей в 1 представляют собой одну и ту же точку на орбите.

Для практических задач главное внимание на этапе проектирования орбиты должно быть уделено определению достижимых значений тяги и ВП. Перелет с меньшей тягой требует большего ВП, что вносит большие трудности в решение задачи оптимального управления.

При одном и том же уровне тяги значение τ в точке прибытия может быть увеличено соответствующим образом. Большее значение τ соответствует большему ВП и более длинной траектории, которая может использоваться в качестве начального приближения для ТП с меньшей тягой. При этом расход рабочего тела снижается. Большее значение τ означает, что траектория в большей степени использует структуру осевой орбиты, тем самым получая меньшую допустимую тягу.

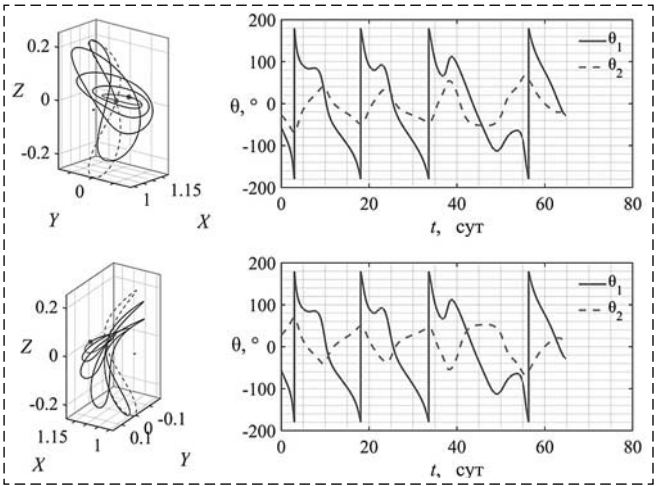


Рис. 8. Другой тип ТП получается непосредственно за счет использования центральной симметрии орбиты
Fig. 8. Another type of TP is obtained directly by using the central symmetry of the orbit

Сопряженные векторы для ТПЗ
Conjugate vectors for TP3

Сопряженные векторы	Северо-восточная орбита	Северо-западная орбита
λ_x	-10,19776	-10,19776
λ_y	18,81918	18,81918
λ_z	-9,92351	9,92351
λ_{vx}	-10,01574	-10,01574
λ_{vy}	15,26534	15,26534
λ_{vz}	9,39810	-9,39810
λ_m	0,00595	0,00595

Далее обсудим центральную симметрию орбиты. Начальные сопряженные векторы ТПЗ показаны в таблице. Северо-восточная осевая орбита и северо-западная осевая орбита имеют противоположные компоненты координаты z и скорости v_z . Следовательно, для получения симметричных орбит можно брать противоположные значения сопряженных векторов λ_z и λ_{vz} как новые начальные условия для моделирования.

Из-за симметрии осевой орбиты эти две разные ТП достигают одного и того же положения на вертикальной орбите В, но разница значений τ составляет 0,5. Из рис. 8 также видно, что угол оптимального управления в горизонтальном направлении для симметричных орбит остается неизменным, а в вертикальном направлении изменяется противоположным образом.

Перелет с минимальным расходом рабочего тела

Рассмотрим приведенный выше ТПЗ в качестве примера для решения задачи оптимизации расхода рабочего тела. Для ТПЗ ВП составляет 64,78 дней, а расход рабочего тела составляет 38,60 кг. Принимая эту траекторию в качестве начального приближения, ВП устанавливаем в данном случае равным 66,84 дней и решаем задачу оптимизации топлива с уравнением гомотопии (16). Результаты решения показаны на рис. 9 (см. третью сторону обложки).

Рис. 9 демонстрирует процесс гомотопии: когда ϵ постепенно изменяется от 1 до 0, задача оптимизации энергии переходит к задаче оптимизации топлива.

На рис. 10 показана ТП с минимальным расходом рабочего тела, происходящая из ТПЗ при

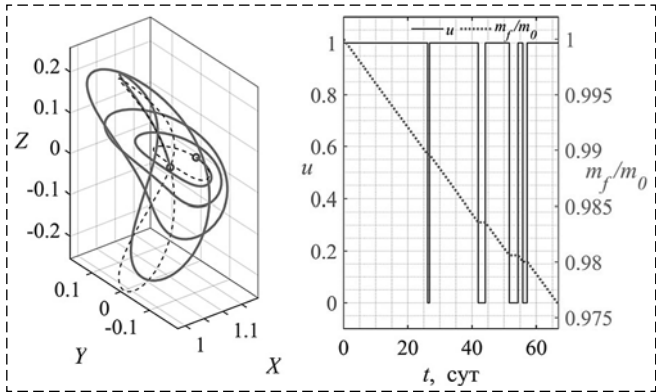


Рис. 10. Траектория перелета с минимальным расходом рабочего тела
Fig. 10. Transfer trajectory with minimal consumption of the working body

фиксированном ВП, равном 66,84 дней. По сравнению с ТПЗ ВП увеличивается на 2,05 суток, а расход рабочего тела уменьшается на 2,89 кг.

Заключение

В статье описан алгоритм решения задачи об оптимизации перелетов между орбитами в системе Земля—Луна с учетом текущих требований миссий по исследованию Луны и построению лунной космической станции. Орбитой вылета является плоская орбита Ляпунова, из которой разветвляется гало-орбита, а орбитой прибытия является вертикальная орбита, образовавшаяся из осевой орбиты. Предлагается непрерывный алгоритм в сочетании с методом коллокации для решения задачи оптимизации. В процессе перелета ТП постепенно переходит на целевую орбиту с помощью структуры осевой орбиты, которая реализует быстрое решение двухточечной краевой задачи.

Результаты решения показывают, что в случае фиксированной точки старта разные ТП соответствуют разным минимально допустимым тягам и разному времени перелета. Минимальное время перелета КА с тягой примерно 100 мН составляет около двух месяцев. Время перелета может превышать три месяца с дальнейшим уменьшением тяги. При уменьшении значения тяги время перелета увеличивается, общий расход топлива снижается. Для КА массой 1500 кг расход топлива на полный перелет с орбиты Ляпунова L_A на вертикальную орбиту V_B составляет менее 40 кг. Для оптимальной по быстродействию траектории перелета использование метода гомотопии может эффективно снизить расход топлива, если время перелета соответствующим образом увеличено. В соответствии с центральной симметрией орбиты для изменения направления движения КА на противоположное по требуемой вертикальной орбите нужно взять противоположные значения λ_z и λ_{vz} в начальном сопряженном векторе. В этом случае полученная ТП также центральносимметрична исходной ТП, пространственное положение орбиты прибытия (орбита V_B) остается неизменным, а направление движения противоположно.

Список литературы

1. **Parker J. S., Anderson R. L.** Low-energy lunar trajectory design // JPL Deep-Space Communications and Navigation Series. Wiley, 2014. P. 103—106.

2. **Zeng H., Zhang J.** Modeling low-thrust transfers between periodic orbits about five libration points: Manifolds and hierarchical design // Acta Astronautica. 2018. Vol. 145. P. 408—423.

3. **Аксенов С. А., Бобер С. А.** Управление движением космического аппарата на гало-орбите при наличии ограничений на направления корректирующих маневров // Некоторые аспекты современных проблем механики и информатики. 2018. С. 166—174.

4. **Шайхутдинов А. Р., Костенко В. И.** Перспективы использования гало-орбиты в окрестности точки либрации L2 системы Солнце—Земля для наземно-космического радиоинтерферометра Миллиметрон // Космические исследования. 2020. Т. 58, № 5. С. 434—442.

5. **Richardson D. L.** Analytic construction of periodic orbits about the collinear points // Celestial mechanics. 1980. Vol. 22, N. 3. P. 241—253.

Rogov K. Computation of Libration point orbits and manifolds using collocation methods: дис. Universitat Politècnica de Catalunya, 2016.

7. **Richardson D. L.** A note on a Lagrangian formulation for motion about the collinear points // Celestial Mechanics. 1980. Vol. 22, N. 3. P. 231—236.

8. **Grebow D.** Generating periodic orbits in the circular restricted three-body problem with applications to lunar south pole coverage. MSA Thesis, School of Aeronautics and Astronautics, Purdue University. 2006. P. 1—165.

9. **Calleja R. C.** et al. Boundary-value problem formulations for computing invariant manifolds and connecting orbits in the circular restricted three body problem // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2012. Vol. 114, N. 1. P. 77—106.

10. **Xiangyu L., Dong Q., Yu C.** Progress of three-body orbital dynamics study // Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics. 2021. Vol. 53, N. 5. P. 1223—1245.

11. **Петухов В. Г.** Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой // Космические исследования. 2012. Т. 50, № 3. С. 258—258.

12. **Fain M. K., Starinova O. L.** Ballistic optimization of the L1-L2 and L2-L1 low thrust transfers in the Earth-Moon system // 2015 7th International Conference on Recent Advances in Space Technologies (RAST). IEEE, 2015. P. 95—98.

13. **Широбоков М. Г., Трофимов С. П.** Перелеты с малой тягой на окололунные орбиты с гало-орбит вокруг лунных точек либрации L 1 и L 2 // Космические исследования. 2020. Т. 58, № 3. С. 223—234.

14. **Pérez-Palau D., Epenoy R.** Fuel optimization for low-thrust Earth—Moon transfer via indirect optimal control // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2018. Vol. 130, N. 2. P. 1—29.

15. **Zhang C. et al.** Low-thrust minimum-fuel optimization in the circular restricted three-body problem // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2015. Vol. 38, N. 8. P. 1501—1510.

16. **Pritchett R., Howell K., Grebow D.** Low-thrust transfer design based on collocation techniques: applications in the restricted three-body problem // Astrodynamics Specialist Conference. Columbia River Gorge, Stevenson, Washington, August 21—24. 2017. P. 1—92.

17. **Ильин И. С., Сазонов В. В., Тучин А. Г.** Траектории перелета с низкой околоземной орбиты на многообразие ограниченных орбит в окрестности точки либрации L2 системы Солнце—Земля // Препринты Института прикладной математики им. МВ Келдыша РАН. 2012. № 66. 25 с.

18. **Luo T., Xu M., Dong Y.** Natural formation flying on quasi-halo orbits in the photogravitational circular restricted three-body problem // Acta Astronautica. 2018. Vol. 149. P. 35—46.

19. **Pan X., Pan B., Li Z.** Bounding Homotopy Method for Minimum-Time Low-Thrust Transfer in the Circular Restricted Three-Body Problem // The Journal of the Astronautical Sciences. 2020. Vol. 67. P. 1220—1248.

20. **Saghamanesh M., Baoyin H.** A robust homotopic approach for continuous variable low-thrust trajectory optimization // *Advances in Space Research*. 2018. Vol. 62. N. 11. P. 3095–3113.
21. **Петухов В. Г., Чжоу Ж.** Расчет возмущенной импульсной траектории перелета между околоземной и окололунной орбитами методом продолжения по параметру // *Вестник Московского авиационного института*. 2019. Т. 26, № 2. С. 155–165.
22. **Mingotti G., Topputo F., Bernelli-Zazzera F.** Combined Optimal Low–Thrust and Stable–Manifold Trajectories to

- the Earth–Moon Halo Orbits // *AIP Conference Proceedings*. American Institute of Physics, 2007. Vol. 886, N. 1. P. 100–112.
23. **Shampine L. F.** et al. Solving boundary value problems for ordinary differential equations in MATLAB with bvp4c // *Tutorial notes*. 2000. Vol. 2000. P. 1–27.
24. **Higham D. J., Higham N. J.** MATLAB guide. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2005.
25. **Старинова О. Л.** Расчет межпланетных перелетов космических аппаратов с малой тягой. Самара: Самарский научный центр РАН, 2007. 196 с.

Optimal Control of Transfer to Vertical Orbits from Lyapunov Orbits Using Low-Thrust Engine

Du Chongrui¹, ducrui@yandex.ru, **O. L. Starinova^{1,2}**, solleo@mail.ru,

¹Samara National Research University, Samara, 443086, Russian Federation,

²Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, 210094, China

Corresponding author: Starinova Olga L., Dr. Sci., Professor, Samara National Research University, Samara, 443086, Russian Federation, e-mail: solleo@mail.ru

Accepted on December 05, 2021

Abstract

There are many different families of periodic orbits in the Earth–Moon system, such as Lyapunov orbits, halo orbits, vertical orbits, etc. The establishment of a lunar space station requires a spacecraft to be able to transfer among these orbits. Lyapunov orbits have been used by some missions and are well-studied orbits, while periodic vertical orbits can provide large amplitudes of spacecraft motion outside the plane of the Moon's motion, which makes it possible to avoid shadowing of the orbits and use them as relay satellite in cislunar space. Modern researchers mainly consider the use of high-thrust engines for transfer. With the development of electric propulsion technology, the use of low, but long-acting thrust for deep space exploration has become especially relevant. This is due to the high specific characteristics of the propulsion systems of this type. In this article, an algorithm has been developed for determining the optimal control with a low-thrust engine for a transfer from Lyapunov orbit to a vertical orbit. The minimum time of flight or the minimum costs of the working body are used as criteria for optimality. In the calculation for solving the two-point boundary value problem of the optimal control theory, the parameter continuation algorithm is used, which allows to gradually get the transfer from some simple results to the final transfer trajectory. The results obtained make it possible to assert that the use of intermediate axial orbits allows the use of propulsion systems with lower thrust levels. In this case, the duration of the flight increases slightly with an almost unchanged consumption of the working body. Moreover, the homotopy method makes it possible to reduce the consumption of working body, while the control of the engine throttling becomes discrete. The results of this study and the algorithms proposed in this article can be used to determine the optimal program control and ballistic design of lunar missions.

Keywords: three-body problem, the Earth–Moon system, low-thrust engine, optimal control, vertical orbit

Acknowledgements: The research was carried out at the expense of a Russian Science Foundation Grant No. 22-29-01092 from the Russian Science Foundation, <http://rscf.ru/project/22-29-01092/>

For citation:

Du Chongrui, Starinova O. L. Optimal Control of Transfer to Vertical Orbits from Lyapunov Orbits Using Low-Thrust Engine, *Me-khatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 3, pp. 158–167.

DOI: 10.17587/mau.23.158-167

References

1. **Parker J. S., Anderson R. L.** Low-energy lunar trajectory design, *JPL Deep-Space Communications and Navigation Series*, Wiley, 2014. P. 103–106.
2. **Zeng H., Zhang J.** Modeling low-thrust transfers between periodic orbits about five libration points: Manifolds and hierarchical design, *Acta Astronautica*, 2018, vol. 145, pp. 408–423.
3. **Aksenov S. A., Beaver S. A. Aksenov S. A., Beaver S. A.** Control of a Spacecraft Motion on a Halo-Orbit with Restricted Maneuver Directions, *Nekotorye aspekty sovremennykh problem mekhaniki i informatiki*, 2018, pp. 166–174 (in Russian).
4. **Shaykhutdinov A. R., Kostenko V. I.** Prospects for Using the Halo-Orbit in the Vicinity of the L 2 Libration Point of the Sun–Earth System for the Ground-Space Millimeter Radio Interferometer, *Cosmic Research*, 2020, vol. 58(5), pp. 434–442 (in Russian).
5. **Richardson D. L.** Analytic construction of periodic orbits about the collinear points, *Celestial mechanics*, 1980, vol. 22(3), pp. 241–253.
5. **Rogov K.** Computation of Libration point orbits and manifolds using collocation methods, Thesis Universitat Politècnica de Catalunya, 2016.
7. **Richardson D. L.** A note on a Lagrangian formulation for motion about the collinear points, *Celestial Mechanics*, 1980, vol. 22(3), pp. 231–236.
8. **Grebow D.** Generating periodic orbits in the circular restricted three-body problem with applications to lunar south pole

coverage, *MSAA Thesis, School of Aeronautics and Astronautics*, Purdue University, 2006.

9. **Calleja R. C.** et al. Boundary-value problem formulations for computing invariant manifolds and connecting orbits in the circular restricted three body problem, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2012, vol. 114(1), pp. 77–106.

10. **Xiangyu L., Dong Q., Yu C.** Progress of three-body orbital dynamics study, *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, vol. 53(5), pp. 1223–1245.

11. **Petukhov V. G.** Method of continuation for optimization of interplanetary low-thrust trajectories, *Cosmic Research*, 2012, vol. 50(3), pp. 258–258 (in Russian).

12. **Fain M. K., Starinova O. L.** Ballistic optimization of the L1-L2 and L2-L1 low thrust transfers in the Earth-Moon system, *2015 7th International Conference on Recent Advances in Space Technologies (RAST)*, IEEE, 2015, pp. 95–98.

13. **Shirobokov M. G., Trofimov S. P.** Low-Thrust Transfers to Lunar Orbits from Halo Orbits Around Lunar Libration Points L1 and L2, *Cosmic Research*, 2020, vol. 58(3), pp. 181–191 (in Russian).

14. **Pérez-Palau D., Epenoy R.** Fuel optimization for low-thrust Earth–Moon transfer via indirect optimal control, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2018, vol. 130(2), pp. 1–29.

15. **Zhang C.** et al. Low-thrust minimum-fuel optimization in the circular restricted three-body problem, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2015, vol. 38(8), pp. 1501–1510.

16. **Pritchett R., Howell K., Grebow D.** Low-thrust transfer design based on collocation techniques: applications in the restricted three-body problem, *Astrodynamics Specialist Conference*, Columbia River Gorge, Stevenson, Washington, August 21–24, 2017, pp. 1–92.

17. **Ilyin I. S., Sazonov V. V., Tuchin A. G.** Transfer trajectories from low Earth orbit to a variety of restricted orbits in the vicinity of the libration point L2 of the Sun-Earth system, *Preprinty Instituta prikladnoj matematiki im. MV Keldysha RAN*, 2012, vol. 66, 25 p. (in Russian).

18. **Luo T., Xu M., Dong Y.** Natural formation flying on quasi-halo orbits in the photogravitational circular restricted three-body problem, *Acta Astronautica*, 2018, vol. (149), pp. 35–46.

19. **Pan X., Pan B., Li Z.** Bounding Homotopy Method for Minimum-Time Low-Thrust Transfer in the Circular Restricted Three-Body Problem, *The Journal of the Astronautical Sciences*, 2020, vol. 67, pp. 1220–1248.

20. **Saghamanesh M., Baoyin H.** A robust homotopic approach for continuous variable low-thrust trajectory optimization, *Advances in Space Research*, 2018, vol. 62(11), pp. 3095–3113.

21. **Petukhov V. G., Zhou J.** Computation of the Perturbed Two-Impulse Trajectory between the Earth and Lunar orbits by the Continuation Method, *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta*, 2019, vol. 26(2), pp. 155–165 (in Russian).

22. **Mingotti G., Toppato F., Bernelli-Zazzera F.** Combined Optimal Low–Thrust and Stable–Manifold Trajectories to the Earth-Moon Halo Orbits, *AIP Conference Proceedings*, American Institute of Physics, 2007, vol. 886(1), pp. 100–112.

23. **Shampine L. F.** et al. Solving boundary value problems for ordinary differential equations in MATLAB with bvp4c, Tutorial notes, 2000, vol. 2000, pp. 1–27.

24. **Higham D. J., Higham N. J.** MATLAB guide, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2005.

25. **Starinova O. L.** Calculation of interplanetary flights of low-thrust spacecraft, Samara, Samarskij nauchnyj centr RAN, 2007, 196 p. (in Russian).

Издательство "НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ"

107076, Москва, Матросская тишина, 23с2

Телефон редакции журнала: **+7(499) 270 16 52**

Технический редактор *Е. В. Конова*. Корректор *М. Ю. Безменова*.

Сдано в набор 27.12.2021. Подписано в печать 14.02.2022. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН322. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Авансд солюшнз". Отпечатано в ООО "Авансд солюшнз".
119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1. Сайт: **www.aov.ru**