

Нгуен Хак Тунг, аспирант, ngyuenkhactunghvhq1994@gmail.com,
С. М. Власов, канд. техн. наук, доц., smvlasov@itmo.ru, **А. А. Пыркин**, д-р тех. наук, проф., pyrkin@itmo.ru,
 Университет ИТМО, г. Санкт-Петербург

Алгоритм идентификации параметров синусоидального сигнала с экспоненциально затухающей амплитудой

Предлагается новый метод оценки параметров несмещенного синусоидального сигнала с экспоненциально затухающей амплитудой. Сигналы данного типа могут наблюдаться в широком диапазоне природных явлений, таких как распространение акустических волн, а также могут характеризовать сложное взаимодействие между компонентами энергосистем. Поэтому, на взгляд авторов, задача оценивания параметров синусоидальных сигналов с экспоненциально затухающей амплитудой является актуальной в настоящее время. Предполагается, что фаза, частота, коэффициент затухания амплитуды сигнала являются неизвестными функциями времени. Предлагается новый метод для параметризации синусоидального сигнала с экспоненциально затухающей амплитудой. На первом этапе сигнал представлен как выход линейного генератора, параметры затухающего синусоидального сигнала (амплитуда, фаза, коэффициент затухания и частота) неизвестны. Далее применяется жорданова форма матрицы и запаздывания для преобразования измеряемого сигнала, затем выводится линейная регрессионная модель, которая зависит от частоты и коэффициента затухания. На последнем этапе неизвестные параметры (частота, коэффициент затухания) рассчитываются из полученных моделей линейной регрессии. Численное моделирование демонстрирует эффективность предложенного алгоритма.

Ключевые слова: синусоидальные сигналы, идентификация, жорданова форма матрицы, частота, коэффициент затухания, линейная регрессионная модель

Введение

Задача идентификации параметров синусоидальных сигналов для случая стационарных амплитуд хорошо изучена, например в работах [1–10]. В статьях [3, 4] представлены методы идентификации частот сигнала, содержащего известное число гармоник. Эти методы обеспечивают глобальную асимптотическую сходимость настраиваемых параметров к истинным значениям.

В данной работе представлен метод идентификации параметров синусоидального сигнала с экспоненциально затухающей амплитудой. Такой сигнал может наблюдаться в широком диапазоне природных явлений, таких как распространение акустических волн, но может также характеризовать поведение искусственных систем, возникающее, например, как следствие сложного взаимодействия между компонентами энергосистем. Оценивание параметров экспоненциально затухающего синусоидального сигнала является актуальной задачей в настоящее время, поскольку синусоидальные параметры описывают качественное поведение связанной системы. Например, колебания с изменяющейся во времени амплитудой в энергосистемах могут быть предвестником нестабильности из-за неисправностей оборудования или других неисправностей. В этом контексте точная и быстрая

идентификация этих колебаний требует значительных исследований.

Классические методы оценивания частот затухающих синусоидальных сигналов предложены в работах [10–12]. В работе [13] представлен адаптивный алгоритм, основанный на принципе внутренней модели с дискретным временем, для идентификации экспоненциально затухающих синусоидальных сигналов. В работе [14] предложен метод оценки параметров затухающего синусоидального сигнала: частоты, коэффициента затухания, смещения, амплитуды и фазы. Схема состоит из двух частей. На первом этапе оцениваются частота, коэффициент затухания и смещение. На втором этапе проводят оценки амплитуды и фазы: для параметризации сигнала применяют блоки запаздывания и используют метод динамического расширения и смещения регрессоров для оценивания неизвестных параметров регрессионной модели. Алгоритм оценивания частоты на основе скользящего режима был предложен в работе [15] для экспоненциально затухающего синусоидального сигнала без смещения.

В настоящей работе предложен новый алгоритм идентификации частоты и коэффициента затухания синусоидального сигнала с экспоненциально затухающей амплитудой. В предположении, что частота, амплитуда и фаза синусоидального сигнала являются по-

стоянными и неизвестными параметрами, синтезируется алгоритм идентификации, который обеспечивает сходимость настроенной оценки частоты к истинному значению.

Постановка задачи

Рассмотрим измеряемый сигнал

$$y(t) = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi), \quad (1)$$

где $A \in \mathbb{R}$ — амплитуда; $\omega \in \mathbb{R}$ — частота; $\phi \in \mathbb{R}$ — фаза; γ — коэффициент затухания; A, ω, ϕ, γ — неизвестные постоянные параметры.

Требуется синтезировать алгоритм оценивания частоты $\hat{\omega}(t)$, $\hat{\gamma}(t)$, обеспечивающий выполнение условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\omega(t) - \hat{\omega}(t)) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} (\gamma(t) - \hat{\gamma}(t)) = 0. \quad (2)$$

Введем следующее

Допущение 1: известны минимальная частота $\underline{\omega}$ и максимальная частота $\bar{\omega}$, причем $0 < \underline{\omega} \leq \omega \leq \bar{\omega}$.

Параметризация затухающего синусоидального сигнала

Рассмотрим задачу построения модели линейной регрессии с измеряемыми переменными и вектором постоянных параметров, зависящих от неизвестной частоты ω и коэффициента затухания γ .

Сигнал $y(t)$ может быть представлен как выходы линейных генераторов [16]:

$$y(t) = \mathbf{H}^T \xi(t); \quad (3)$$

$$\dot{\xi}(t) = \Gamma \xi(t), \quad (4)$$

где $\xi \in \mathbb{R}^q$ — вектор состояния генератора с начальным значением $\xi(0)$; $\Gamma \in \mathbb{R}^{q \times q}$ — матрица постоянных коэффициентов; $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^q$ — вектор соответствующей размерности.

Построение генератора сигнала $y(t)$

Выберем в качестве первой координаты вектора состояния генератора сам сигнал $\xi_1 = y$. Дифференцируя ξ_1 , получим

$$\begin{aligned} \xi_1 &= Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi); \\ \dot{\xi}_1 &= \dot{y}(t) = -\gamma Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi) + \\ &+ Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi)\omega = -\gamma \xi_1 + \dot{\xi}_1 + \gamma \xi_1 = \dot{\xi}_1. \end{aligned}$$

Выберем в качестве первой координаты вектора состояния генератора производную синусоидального сигнала $\xi_2 = \dot{y}$. Дифференцируя ξ_2 , получим

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_2 &= \ddot{y}(t) = \gamma^2 Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi) - \\ &- \gamma Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi)\omega - \gamma Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) - \\ &- Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi)\omega^2; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_2 &= \gamma^2 \xi_1 - 2\gamma(\dot{\xi}_1 + \gamma \xi_1) - \omega^2 \xi_1 = \\ &= -2\gamma \dot{\xi}_1 - \gamma^2 \xi_1 - \omega^2 \xi_1. \end{aligned}$$

Для векторно-матричной формы (3)–(4) имеем

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}; \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 - \gamma^2 & -2\gamma \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Преобразовав уравнение (4), получим

$$\dot{\xi}(t) = \Gamma \xi(t) \Rightarrow \xi(t) = e^{\Gamma t} \xi(0). \quad (7)$$

Подставляя соотношение (7) в уравнение (3), получим

$$y(t) = \mathbf{H}^T e^{\Gamma t} \xi(0). \quad (8)$$

Рассмотрим запаздывающий сигнал

$$y(t-d) = \mathbf{H}^T e^{\Gamma(t-d)} \xi(0) = \mathbf{H}^T e^{\Gamma t} e^{-\Gamma d} \xi(0). \quad (9)$$

Замечание 1. Введем ограничения на выбранную величину запаздывания из соотношения (9):

$$d < \frac{\pi}{\bar{\omega}}.$$

На основе уравнения (7) и (9) получим

$$y(t-d) = \mathbf{H}^T e^{-\Gamma d} \xi(t). \quad (10)$$

Утверждение 1. Для сигнала $y(t-d)$ справедливо соотношение

$$y(t-d) = \mathbf{H}^T e^{\gamma d} \times \begin{bmatrix} \cos \omega d + \gamma \omega^{-1} \sin \omega d & -\omega^{-1} \sin \omega d \\ (\omega^2 + \gamma^2) \omega^{-1} \sin \omega d & \cos \omega d - \gamma \omega^{-1} \sin \omega d \end{bmatrix} \xi(t).$$

Доказательство утверждения 1:

Применим жорданову форму для преобразователя $e^{-\Gamma d}$.

Вычислим собственные значения матрицы Γ :

$$\begin{aligned} \det(\Gamma - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -\omega^2 - \gamma^2 & -2\gamma - \lambda \end{vmatrix} = 0, \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda\gamma + \omega^2 + \gamma^2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda_1 = -\gamma + i\omega, \lambda_2 = -\gamma - i\omega. \end{aligned}$$

Для каждого из собственных значений найдем собственные векторы. Для числа $\lambda_1 = -\gamma + i\omega$ получим

$$\begin{bmatrix} \gamma - i\omega & 1 \\ -\omega^2 - \gamma^2 & -\gamma - i\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = 0, \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} (\gamma - i\omega)x_1 + y_1 = 0; \\ (-\omega^2 - \gamma^2)x_1 + (-\gamma - i\omega)y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow y_1 = (i\omega - \gamma)x_1.$$

Полагая $x_1 = 1$, находим собственный вектор $\mathbf{V}_1 = (x_1, y_1)^T$:

$$x_1 = 1, \Rightarrow y_2 = -\gamma + i\omega, \Rightarrow \mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\gamma + i\omega \end{bmatrix}.$$

Аналогично находим собственный вектор $\mathbf{V}_2 = (x_2, y_2)^T$, ассоциированный с собственным значением $\lambda_2 = -\gamma - i\omega$:

$$\begin{bmatrix} \gamma + i\omega & 1 \\ -\omega^2 - \gamma^2 & -\gamma + i\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0, \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} (\gamma + i\omega)x_2 + y_2 = 0; \\ -\omega^2 x_2 + i\omega y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_2 = -(\gamma + i\omega)x_2.$$

Полагая $x_2 = 1$, находим собственный вектор $\mathbf{V}_2 = (x_2, y_2)^T$:

$$x_2 = 1, \Rightarrow y_2 = -\gamma - i\omega, \Rightarrow \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\gamma - i\omega \end{bmatrix}.$$

Составим матрицу \mathbf{V} из найденных собственных векторов \mathbf{V}_1 и \mathbf{V}_2 :

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ (i\omega - \gamma) & -(\gamma + i\omega) \end{bmatrix}.$$

Запишем жорданову форму J_Γ для заданной матрицы Γ , используя форму

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_\Gamma = \mathbf{V}^{-1} \Gamma \mathbf{V} &= \frac{1}{-2i\omega} \begin{bmatrix} -(\gamma + i\omega) & -1 \\ -(i\omega - \gamma) & 1 \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 - \gamma^2 & -2\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ (i\omega - \gamma) & -(\gamma + i\omega) \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{-2i\omega} \begin{bmatrix} \gamma^2 + \omega^2 & \gamma - i\omega \\ -\gamma^2 - \omega^2 & -\gamma - i\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\omega - \gamma & -\gamma - i\omega \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} i\omega - \gamma & 0 \\ 0 & -i\omega - \gamma \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Составим матрицу $e^{\mathbf{J}_\Gamma d}$ в следующей виде [17]:

$$e^{\mathbf{J}_\Gamma d} = e^{-\gamma d} \begin{bmatrix} e^{i\omega d} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega d} \end{bmatrix}.$$

Вычислим матричную экспоненту $e^{\Gamma d}$:

$$\begin{aligned} e^{\Gamma d} &= \mathbf{V} e^{\mathbf{J}_\Gamma d} \mathbf{V}^{-1} = e^{-\gamma d} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\omega - \gamma & -i\omega - \gamma \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} e^{i\omega d} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega d} \end{bmatrix} \frac{1}{-2i\omega} \begin{bmatrix} -i\omega - \gamma & -1 \\ i\omega - \gamma & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{e^{-\gamma d}}{-2i\omega} \begin{bmatrix} e^{i\omega d} & e^{-i\omega d} \\ (i\omega - \gamma)e^{i\omega d} & (-i\omega - \gamma)e^{-i\omega d} \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} -i\omega - \gamma & -1 \\ -i\omega + \gamma & 1 \end{bmatrix}, \\ e^{\Gamma d} &= e^{-\gamma d} \times \\ &\times \begin{bmatrix} \frac{e^{i\omega d} + e^{-i\omega d}}{2} + \gamma \omega^{-1} \frac{e^{i\omega d} - e^{-i\omega d}}{2i} & \omega^{-1} \frac{e^{i\omega d} - e^{-i\omega d}}{2i} \\ -(\omega^2 + \gamma^2) \omega^{-1} \frac{e^{i\omega d} - e^{-i\omega d}}{2i} & \frac{e^{i\omega d} + e^{-i\omega d}}{2} - \gamma \omega^{-1} \frac{e^{i\omega d} - e^{-i\omega d}}{2i} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Экспоненциальные функции $e^{i\omega d}$, $e^{-i\omega d}$ разложим по формуле Эйлера:

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\omega d} + e^{-i\omega d}}{2} &= \cos \omega d, \\ \frac{e^{i\omega d} - e^{-i\omega d}}{2i} &= \sin \omega d. \end{aligned}$$

Получаем $e^{\Gamma d}$ в виде

$$\begin{aligned} e^{\Gamma d} &= e^{-\gamma d} \times \\ &\times \begin{bmatrix} \cos \omega d + \gamma \omega^{-1} \sin \omega d & \omega^{-1} \sin \omega d \\ -(\omega^2 + \gamma^2) \omega^{-1} \sin \omega d & \cos \omega d - \gamma \omega^{-1} \sin \omega d \end{bmatrix}; \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{-\Gamma d} &= e^{\gamma d} \times \\ &\times \begin{bmatrix} \cos \omega d - \gamma \omega^{-1} \sin \omega d & -\omega^{-1} \sin \omega d \\ (\omega^2 + \gamma^2) \omega^{-1} \sin \omega d & \cos \omega d + \gamma \omega^{-1} \sin \omega d \end{bmatrix}. \quad (12) \end{aligned}$$

Из уравнения (8) и уравнения (12) получим соотношение вида

$$\begin{aligned} y(t-d) &= \mathbf{H}^T e^{\gamma d} \times \\ &\times \begin{bmatrix} \cos \omega d - \gamma \omega^{-1} \sin \omega d & -\omega^{-1} \sin \omega d \\ (\omega^2 + \gamma^2) \omega^{-1} \sin \omega d & \cos \omega d + \gamma \omega^{-1} \sin \omega d \end{bmatrix} \xi(t), \quad (13) \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Аналогично для запаздывающего сигнала $2d$ имеем:

$$\begin{aligned} y(t-2d) &= \\ &= e^{2d\gamma} [\cos 2\omega d + \gamma \omega^{-1} \sin 2\omega d \quad -\omega^{-1} \sin 2\omega d] \xi(t). \quad (14) \end{aligned}$$

Из уравнений (13) и (14) построим следующую матрицу:

$$\begin{bmatrix} y(t-d) \\ y(t-2d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos \omega d - \gamma \omega^{-1} \sin \omega d) e^{\gamma d} & (-\omega^{-1} \sin \omega d) e^{\gamma d} \\ (\cos 2\omega d - \gamma \omega^{-1} \sin 2\omega d) e^{\gamma 2d} & (-\omega^{-1} \sin 2\omega d) e^{\gamma 2d} \end{bmatrix} \xi(t). \quad (15)$$

Алгоритм оценивания параметров θ модели (25)

Рассмотрим следующую систему:

$$\mathbf{Y} = \Phi \xi, \quad (16)$$

$$\text{где } \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y(t-d) \\ y(t-2d) \end{bmatrix};$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} (\cos \omega d - \gamma \omega^{-1} \sin \omega d) e^{\gamma d} & (-\omega^{-1} \sin \omega d) e^{\gamma d} \\ (\cos 2\omega d - \gamma \omega^{-1} \sin 2\omega d) e^{\gamma 2d} & (-\omega^{-1} \sin 2\omega d) e^{\gamma 2d} \end{bmatrix}.$$

Из выражения (16) имеем:

$$\Phi^{-1} \mathbf{Y} = \xi \Rightarrow \text{adj}(\Phi) \mathbf{Y} = \det(\Phi) \xi. \quad (17)$$

Умножая уравнение (17) на \mathbf{H}^T , получим

$$\mathbf{H}^T \text{adj}(\Phi) \mathbf{Y} = \det(\Phi) y(t), \quad (18)$$

$$\text{adj} \Phi = \begin{bmatrix} (-\omega^{-1} \sin 2\omega d) e^{\gamma 2d} & (\omega^{-1} \sin \omega d) e^{\gamma d} \\ (\cos 2\omega d - \gamma \omega^{-1} \sin 2\omega d) e^{\gamma 2d} & (\cos \omega d - \gamma \omega^{-1} \sin \omega d) e^{\gamma d} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\det \Phi = -\frac{1}{\omega} e^{3\gamma d} \cos \omega d \sin 2\omega d + \frac{1}{\omega} e^{3\gamma d} \cos 2\omega d \sin \omega d = -\frac{1}{\omega} e^{3\gamma d} \sin \omega d. \quad (20)$$

Из выражений (18)–(20) получим

$$\begin{aligned} [1 \ 0] \begin{bmatrix} (-\omega^{-1} \sin 2\omega d) e^{\gamma 2d} & (\omega^{-1} \sin \omega d) e^{\gamma d} \\ (\cos 2\omega d - \gamma \omega^{-1} \sin 2\omega d) e^{\gamma 2d} & (\cos \omega d - \gamma \omega^{-1} \sin \omega d) e^{\gamma d} \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} y(t-d) \\ y(t-2d) \end{bmatrix} = -\omega^{-1} e^{3\gamma d} \sin(\omega d) y(t). \end{aligned} \quad (21)$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} -\omega^{-1} e^{2\gamma d} 2 \sin(\omega d) \cos(\omega d) y(t-d) + \\ + \omega^{-1} e^{\gamma d} \sin(\omega d) y(t-2d) = \\ = -\omega^{-1} e^{3\gamma d} \sin(\omega d) y(t). \end{aligned} \quad (22)$$

Разделив обе части уравнения (22) на $-\omega^{-1} e^{\gamma d} \sin(\omega d)$, имеем

$$2e^{\gamma d} \cos(\omega d) y(t-d) - y(t-2d) = e^{2\gamma d} y(t); \quad (23)$$

$$y(t-2d) = 2e^{\gamma d} \cos(\omega d) y(t-d) - e^{2\gamma d} y(t). \quad (24)$$

Построим регрессионную модель из уравнения (24) в виде

$$\chi(t) = \Phi(t) \theta, \quad (25)$$

где

$$\chi(t) = y(t-2d),$$

$$\Phi(t) = [2y(t-d) \ -y(t)] = [\phi_1(t) \ \phi_2(t)],$$

$$\theta = \begin{bmatrix} e^{\gamma d} \cos(\omega d) \\ e^{2\gamma d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что модель регрессора (25) не удовлетворяет условию незатухающего возбуждения. Для решения этой проблемы используется метод, описанный в работе [18].

Следуя процедуре DREM [19], применим оператор запаздывания τ к (25) и получим

$$\begin{bmatrix} \chi(t) \\ \chi(t-\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1(t-\tau) & \phi_2(t-\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Умножая уравнение (26) на вектор $[\phi_2(t-\tau) \ -\phi_2(t)]$, получаем регрессионную модель, включающую $\theta_1(t)$, в следующем виде:

$$\Psi_1(t) = \Phi_1(t) \theta_1(t), \quad (27)$$

$$\text{где } \Phi_1(t) = \phi_2(t-\tau) \phi_1(t) - \phi_2(t) \phi_1(t-\tau); \\ \Psi_1(t) = \phi_2(t-\tau) \chi(t) - \phi_2(t) \chi(t-\tau).$$

Для оценивания параметра $\theta_1(t)$ используется уравнение

$$\dot{\hat{\theta}}_1(t) = K_1 \Phi_1(t) (\Psi_1(t) - \Phi_1(t) \hat{\theta}_1(t)), \quad (28)$$

где $K_1 > 0$ — любое положительное число.

Умножая уравнение (26) на вектор $[\phi_1(t-\tau) \ -\phi_1(t)]$, получаем регрессионную модель, включающую $\theta_2(t)$,

в следующем виде:

$$\Psi_2(t) = \Phi_2(t) \theta_2(t), \quad (29)$$

$$\text{где } \Phi_2(t) = \phi_1(t-\tau) \phi_2(t) - \phi_1(t) \phi_2(t-\tau); \\ \Psi_2(t) = \phi_1(t-\tau) \chi(t) - \phi_1(t) \chi(t-\tau).$$

Для оценивания параметра $\theta_2(t)$ используется уравнение

$$\dot{\hat{\theta}}_2(t) = K_2 \Phi_2(t) (\Psi_2(t) - \Phi_2(t) \hat{\theta}_2(t)), \quad (30)$$

где $K_2 > 0$ любое положительное число.

Оценивание частоты и коэффициента затухания

Запишем оценки частоты ω и коэффициента затухания γ гармонического сигнала (1) на основе $\hat{\theta}_{1,2}$ из (28) и (30):

$$\begin{cases} \gamma = \frac{1}{d} \ln \sqrt{\hat{\theta}_2(t)}, \hat{\theta}_2 < 0; \\ \gamma = \frac{1}{d} \ln \sqrt{\nu}, \hat{\theta}_2 \geq 0, \end{cases} \quad (31)$$

где $\nu > 0$ некоторая малая величина;

$$\hat{\omega}(t) = \frac{1}{d} \arccos \left(\frac{\hat{\theta}_1(t)}{\sqrt{\hat{\theta}_2(t)}} \right). \quad (32)$$

Согласно **допущению 1** значение функции $\hat{\theta}_1$ должно удовлетворять неравенству

$$\hat{\kappa}(t) \cos \bar{\omega} d \leq \hat{\theta}_1(t) \leq \hat{\kappa}(t) \cos \underline{\omega} d, \quad (33)$$

где

$$\hat{\kappa}(t) = \begin{cases} \sqrt{-\hat{\theta}_2(t)}, \hat{\theta}_1(t) < 0; \\ \nu, \hat{\theta}_1(t) \geq 0, \end{cases} \quad (34)$$

где $\nu > 0$ — некоторая малая величина.

Математическое моделирование

В данном разделе представлены результаты численного моделирования, иллюстрирующие эффективность предложенного алгоритма оценивания частоты несмешенного гармонического сигнала с экспоненциально затухающей амплитудой. Моделирование выполнено с использованием программной среды MATLAB Simulink.

В качестве примера рассмотрим сигнал вида

$$y(t) = e^{-0.3t} \sin(5t - 1). \quad (35)$$

Приведем значения параметров для предложенного метода: $d = 0,1$; $K_1 = 100$; $K_2 = 100$; $\tau = 0,1$.

На рис. 1, 2 показаны переходные процессы для оценки частоты и коэффициента затухания сигнала (35).

Рассмотрим сигнал

$$y(t) = 3e^{-3t} \sin\left(4t - \frac{\pi}{4}\right). \quad (36)$$

Значения параметров предложенного метода: $d = 0,05$; $K_1 = 1000$; $K_2 = 1000$; $\tau = 0,2$.

На рис. 3, 4 показаны переходные процессы для оценки частоты и коэффициента затухания сигнала (36).

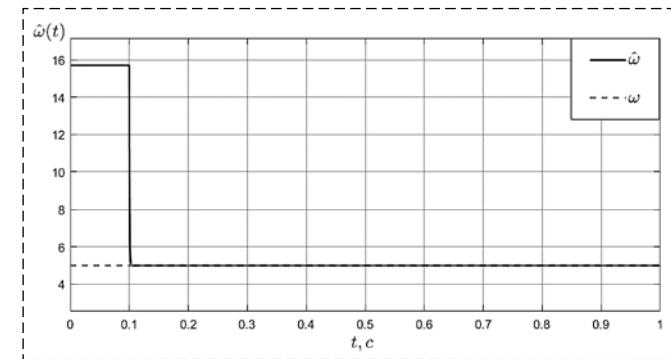


Рис. 1. График оценки частоты $\hat{\omega}(t)$, $\omega = 5$
Fig. 1. Graph frequency estimation $\hat{\omega}(t)$, $\omega = 5$

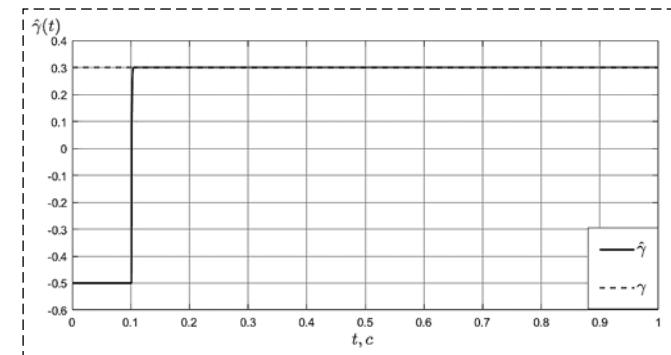


Рис. 2. График оценки коэффициента затухания $\hat{\gamma}(t)$, $\gamma = 0,3$
Fig. 2. Graph damping factor estimate $\hat{\gamma}(t)$, $\gamma = 0,3$

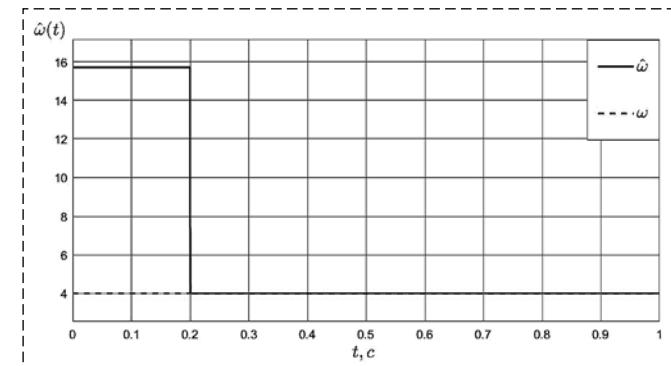


Рис. 3. График оценки частоты $\hat{\omega}(t)$, $\omega = 4$
Fig. 3. Graph frequency estimation $\hat{\omega}(t)$, $\omega = 4$

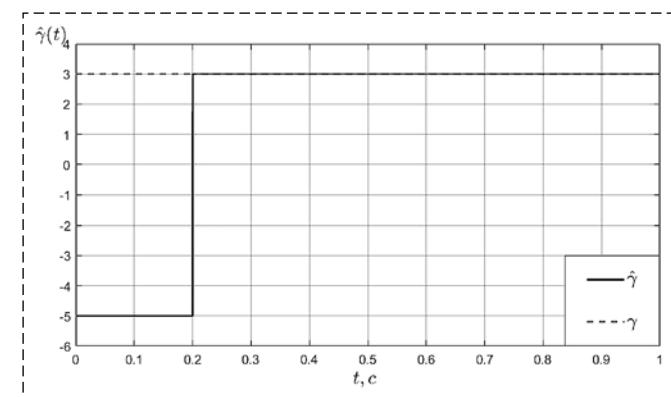


Рис.4. График оценки коэффициента затухания $\hat{\gamma}(t)$, $\gamma = 3$
Fig.4. Graph damping factor estimate $\hat{\gamma}(t)$, $\gamma = 3$

Как видно из графиков, предложенный алгоритм оценивания обеспечивает экспоненциальную сходимость к истинными значениями оценивания параметров сигнала $y(t)$.

Заключение

В работе предложен алгоритм идентификации параметров синусоидального сигнала с экспоненциально затухающей амплитудой. Предложен новый подход для параметризации затухающего синусоидального сигнала. Результаты моделирования подтверждают сходимость ошибок оценивания частоты и коэффициента затухания к истинным значениям. Для регрессоров, не удовлетворяющих условию незатухающего возбуждения, был предложен метод, который позволяет построить новые модели линейной регрессии и обеспечить для них выполнение необходимых условий экспоненциальной сходимости. В дальнейшем планируется расширить область применения алгоритма на случай мультисинусоидальных сигналов с экспоненциально затухающими амплитудами.

Список литературы

1. Пиркин А. А., Бобцов А. А., Ведяков А. А., Колюбин С. А. Оценивание параметров полигармонического сигнала // Автоматика и телемеханика. 2015. № 8. С. 94–114.
2. Aranovskiy S., Bobtsov A., Kremlev A., Nikolaev N., Slita O. Identification of frequency of biased harmonic signal // European Journal of Control. 2010. Vol. 16, N 2. P. 129–139. doi: 10.3166/ejc.16.129-139.
3. Marino R., Tomei P. Frequency estimation of periodic signals // Proc. European Control Conference. Strasbourg, France. 2014. P. 7–12. DOI: 10.1109/ecc.2014.
4. Hou M. Parameter identification of sinusoids // IEEE Transactions on Automatic Control. 2012. Vol. 57, N 2. P. 467–472. DOI: 10.1109/TAC.2011.2164736.
5. Khac T., Vlasov S. M., Iureva R. A. Estimating the Frequency of the Sinusoidal Signal using the Parameterization based on the Delay Operators // ICINCO 2021 — Proceedings of the 18th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics. 2021. P. 656–660.
6. Vlasov S. M., Margun A. A., Kirsanova A. S., Vakhvinova P. D. Adaptive controller for uncertain multi-agent system under disturbances // ICINCO 2019 — 16th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics. 2019. Vol. 2. P. 198–205.
7. Vlasov S. M., Kirsanova A. S., Dobriborsci D., Borisov O. I., Gromov V. S., Pyrkin A. A., Maltsev M. V., Semenov A. N. Output Adaptive Controller Design for Robotic Vessel with Parametric and Functional Uncertainties // 26th Mediterranean Conference on Control and Automation. MED 2018. 2018. P. 547–552.
8. Севастеева Е. С., Чернов В. А., Бобцов А. А. Алгоритм увеличения скорости идентификации частоты синусоидального сигнала // Изв. вузов. Приборостроение. 2019. Т. 62, № 9. С. 767–771.
9. Bobtsov A., Lyamin A., Romashova D. Algorithm of parameter's identification of polyharmonic function // IFAC Proceedings Volumes. 2002. Vol. 35, N. 1. P. 439–443.
10. Marino R., Tomei R. Global Estimation of Unknown Frequencies // IEEE Transactions on Automatic Control. 2002. Vol. 47. P. 1324–1328.
11. Osborne M., Smyth G. K. A modified Prony algorithm for fitting functions defined by difference equations // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing. 1991. Vol. 12, N. 2. P. 362–382.
12. Osborne M., Smyth G. K. A modified prony algorithm for exponential function fitting // SIAM Journal on Scientific Computing. 1995. Vol. 16, N. 1. P. 119–138.
13. Jin Lu, Brown Lyndon J. Identification of Exponentially Damped Sinusoidal Signals // IFAC Proceedings Volumes. 2008. Vol. 41, Iss. 2.
14. Vediakova A., Vedyakov A., Bobtsov A., Pyrkin A. DREM-based Parametric Estimation of Bias-affected Damped Sinusoidal Signals* // 2020 European Control Conference (ECC). 2020. P. 214–219. DOI: 10.23919/ECC51009.2020.9143821
15. Wang Y., Chen B., Pin G., Parisini T. Estimation of damped sinusoidal signals: an observer-based approach // IFAC-Papers Online. 2017. Vol. 50, N. 1. P. 3811–3816.
16. Nikiforov V. O. Adaptive servomechanism controller with an implicit reference model // Intern. Journal of Control. 1997. Vol. 68, N. 2. P. 277–286.
17. Umari Amjad M. J., Gorelick Steven M. Evaluation of the matrix exponential for in ground-water-flow and solute-transport simulation: theoretical framework. U. S. Geological Survey, 1986. DOI: 10.3133/wri864096.
18. Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A. Performance Enhancement of Parameter Estimators via Dynamic Regressor Extension and Mixing* // IEEE Transactions on Automatic Control. July 2017. Vol. 62, N. 7. P. 3546–3550. DOI: 10.1109/TAC.2016.2614889.
19. Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A. Parameters estimation via dynamic regressor extension and mixing // 2016 American Control Conference (ACC). 2016. P. 6971–6976. DOI: 10.1109/ACC.2016.7526771.

Algorithm for Identification of Parameters Sinusoidal Signal with the Exponentially Damping Amplitude

Nguyen Khac Tung, nguyenkhactunghvhq1994@gmail.com,
S. M. Vlasov, smvlasov@itmo.ru, A. A. Pyrkin, pyrkin@itmo.ru
ITMO University, Saint Peterburg, 197101, Russian Federation

Corresponding author: Nguyen Khac Tung, Postgraduate Student, ITMO University, St. Petersburg, 197101, Russian Federation, e-mail: nguyenkhactunghvhq1994@gmail.com

Accepted on December 5, 2021

Abstract

The paper proposes a new method for estimating the parameters of an unbiased sinusoidal signal with the exponentially damping amplitude: frequency, damping coefficient. A sinusoidal signal with exponentially damping amplitude is an important class that can be observed in a wide range of natural phenomena, such as the propagation of acoustic waves, and can also characterize the behavior of artificial systems, arising, for example, as a result of complex interactions between the components of power systems, therefore the task of estimating parameters is sinusoidal. signal with exponentially decaying amplitude is relevant at the present time. It is assumed that the phase, frequency, damping factor and amplitude of a sinusoidal signal with exponentially decaying amplitude are unknown functions of time. In the present work, a new method is proposed for parameterizing a sinusoidal signal with exponentially decaying amplitude. First, a sinusoidal signal with exponentially decaying amplitude is presented as the output of a linear generator, the parameters of the decaying sinusoidal signal (amplitude, phase, damping factor and frequency) are unknown. Then the Jordan form of the matrix and the delay are applied to transform the measured signal, then a linear regression model is obtained, which depends on the frequency and the attenuation coefficient. At the last stage, unknown parameters (frequency, attenuation coefficient) are calculated from the obtained linear regression model. Numerical modeling demonstrates the effectiveness of the proposed methodology.

Keywords: sinusoidal signal, identification, Jordan form of the matrix, frequency, damping factor, linear regression model

For citation:

Nguyen Khac Tung, Vlasov S. M., Pyrkin A. A. Algorithm for Identification of Parameters Sinusoidal Signal with the Exponentially Damping Amplitude, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 3, pp. 125–131.

DOI: 10.17587/mau.23.125-131

References

1. Pyrkin A. A., Bobtsov A. A., Vedyakov A. A., Kolyubin S. A. Estimation of parameters of a polyharmonic signal, *Automation and Telemechanics*, 2015, no. 8, pp. 94–114 (in Russian).
2. Aranovskiy S., Bobtsov A., Kremlev A., Nikolaev N., Slita O. Identification of frequency of biased harmonic signal, *European Journal of Control*, 2010, vol. 16, no. 2, pp. 129–139, DOI: 10.3166/ejc.16.129-139.
3. Marino R., Tomei P. Frequency estimation of periodic signals, *Proc. European Control Conference*, Strasbourg, France, 2014, pp. 7–12, DOI: 10.1109/ecc.2014.
4. Hou M. Parameter identification of sinusoids, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, vol. 57, no. 2, pp. 467–472, DOI: 10.1109/TAC.2011.2164736.
5. Khac T., Vlasov S. M., Iureva R. A. Estimating the Frequency of the Sinusoidal Signal using the Parameterization based on the Delay Operators, *ICINCO 2021 — Proceedings of the 18th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics*, 2021, pp. 656–660.
6. Vlasov S. M., Margun A. A., Kirsanova A. S., Vakhvinova P. D. Adaptive controller for uncertain multi-agent system under disturbances, *ICINCO 2019 — 16th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics*, 2019, vol. 2, pp. 198–205.
7. Vlasov S. M., Kirsanova A. S., Dobriborsci D., Borisov O. I., Gromov V. S., Pyrkin A. A., Maltsev M. V., Semenov A. N. Output Adaptive Controller Design for Robotic Vessel with Parametric and Functional Uncertainties, *26th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED 2018*, 2018, pp. 547–552.
8. Sevasteeva E., Chernov V., Bobtsov A. Algorithm for increasing the speed of identification of the frequency of a sinusoidal signal, *Izv. universities. Instrumentation*, 2019, vol. 62, no. 9, pp. 767–771 (in Russian).
9. Bobtsov A., Lyamin A., Romasheva D. Algorithm of parameter's identification of polyharmonic function, *IFAC Proceedings Volumes*, 2002, vol. 35, no. 1, pp. 439–443.
10. Marino R., Tomei R. Global Estimation of Unknown Frequencies, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, vol. 47, pp. 1324–1328.
11. Osborne M., Smyth G. K. A modified Prony algorithm for fitting functions defined by difference equations, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 1991, vol. 12, no. 2, pp. 362–382.
12. Osborne M., Smyth G. K. A modified prony algorithm for exponential function fitting, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1995, vol. 16, no. 1, pp. 119–138.
13. Jin Lu, Brown Lyndon J. Identification of Exponentially Damped Sinusoidal Signals, *IFAC Proceedings Volumes*, 2008, vol. 41, iss. 2.
14. Vediakova A., Vedyakov A., Bobtsov A., Pyrkin A. DREM-based Parametric Estimation of Bias-affected Damped Sinusoidal Signals*, *2020 European Control Conference (ECC)*, 2020, pp. 214–219, DOI: 10.23919/ECC51009.2020.9143821
15. Wang Y., Chen B., Pin G., Parisini T. Estimation of damped sinusoidal signals: an observer-based approach, *IFAC-PapersOnLine*, 2017, vol. 50, no. 1, pp. 3811–3816.
16. Nikiforov V. O. Adaptive servomechanism controller with an implicit reference model, *Intern. Journal of Control*, 1997, vol. 68, no. 2, pp. 277–286.
17. Umari Amjad M. J., Gorelick Steven M. Evaluation of the matrix exponential for in ground-water-flow and solute-transport simulation: theoretical framework, U. S. Geological Survey, 1986, DOI 10.3133/wri864096.
18. Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A. Performance Enhancement of Parameter Estimators via Dynamic Regressor Extension and Mixing*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, July 2017, vol. 62, no. 7, pp. 3546–3550, DOI: 10.1109/TAC.2016.2614889.
19. Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A. Parameters estimation via dynamic regressor extension and mixing, *2016 American Control Conference (ACC)*, 2016, pp. 6971–6976, DOI: 10.1109/ACC.2016.7526771.