

В. И. Ловчаков, д-р техн. наук, проф., lovvi50@mail.ru,
Тульский государственный университет

Аналитический синтез квазиоптимальных по быстродействию регуляторов для линейных объектов на основе условно адекватных моделей низкого порядка. Часть 2*

Для линейных объектов высокого порядка ($n \geq 4$) практически неизвестны аналитические (точные) алгоритмы управления в форме обратной связи, оптимальные по критерию быстродействия, и для них остается актуальной задача синтеза приближенно быстродействующих законов управления. В этой части работы развивается подход к синтезу быстродействующих систем высокого порядка, предложенный в первой части статьи, использующий идею преобразования исходной задачи быстродействия к аналогичной задаче управления объектами, описываемыми моделями первого или второго порядка, для которых известны оптимальные по быстродействию алгоритмы управления. Данные алгоритмы лежат в основе исследуемого подхода к синтезу быстродействующих систем, который предполагает нахождение специальных функций, описывающих связь фазовых координат моделей объекта низкого порядка (они по аналогии с работами А. А. Колесникова называются агрегированными переменными или макропеременными) с фазовыми координатами исходного объекта высокого порядка, а также расчет параметров используемых моделей низкого порядка, которые обеспечивают в определенном смысле их адекватность исходному объекту и, соответственно, высокое быстродействие синтезируемых систем. В данной части работы, в отличие от первой ее части, при синтезе используются две модели объекта не первого, а второго порядка, которые характеризуются условной и приближенной адекватностью по отношению к исходной модели объекта высокого порядка. В случае условной адекватности параметры модели низкого порядка находятся точно с использованием собственных чисел и векторов исходного объекта, а при приближенной адекватности — с применением метода наименьших квадратов. На основе указанных двух моделей второго порядка разрабатываются две методики синтеза квазиоптимальных регуляторов, которые отличаются использованием нелинейных обратных связей, обеспечивающих повышенное быстродействие конструируемой системы управления, достаточно близкое к предельным значениям. В частности, в примере показано, что при наличии небольшого допустимого перерегулирования время регулирования синтезированной системы может быть меньше, чем в оптимальной системе управления. Таким образом, основное содержание работы посвящено результатам сравнительного анализа свойств указанных быстродействующих регуляторов, а также анализу особенностей и условий применимости предложенных методик синтеза.

Ключевые слова: линейный объект управления, быстродействие, перерегулирование, релейный регулятор, аналитическое конструирование системы

Введение

Для повышения эффективности работы многих производственных агрегатов, в частности электромеханических систем, желательно, чтобы системы управления, входящие в их состав, отвечали критерию оптимальности по быстродействию, который непосредственно определяет производительность агрегата. Однако строгое решение задач оптимального управления по критерию быстродействия в форме обратной связи представляет серьезную теоретическую проблему даже для линейных объектов относи-

тельно невысокого порядка ($n = 4, 5$) [1–7]. Действительно, задача быстродействия полностью решена для объектов второго порядка методом фазовой плоскости [2–4]. Для объектов третьего порядка быстродействующее управление точно (аналитически) найдено только в отдельных случаях, в частности, для трех последовательно соединенных интеграторов [2, 3], соединения двух интеграторов и апериодического звена [2], соединения интегратора и двух апериодических звеньев [2]. Для объектов высокого порядка ($n \geq 4$) применение геометрических методов, используемых при $n \leq 3$, существенно затруднено и, как следствие, для них практически неизвестны аналитические решения задач оптимального быстродействия [6, 7].

*Первая часть статьи опубликована в журнале "Мехатроника, автоматизация, управление", 2022, Т. 23, №2.

Реализация строго оптимальных по быстродействию законов управления, отличающихся математической сложностью, серьезно затруднена и требует многократно больших технико-экономических затрат в сравнении, например, с линейными алгоритмами управления. В связи с этим многие работы по синтезу быстродействующих систем [9—12], как правило, направлены на определение различных аппроксимаций функции переключения оптимального релейного регулятора. Получаемые при этом регуляторы называются *квазиоптимальными*.

Необходимо подчеркнуть, что сложность решения задачи быстродействия стремительно возрастает с увеличением порядка n объекта управления — это известная проблема порядка задачи быстродействия. Например, для объекта первого порядка такой алгоритм управления имеет предельно простую форму

$$u(t) = -\text{sign}[x(t)],$$

где $x(t)$ — регулируемая переменная объекта. Описание аналогичного алгоритма для объекта второго порядка занимает одну-две строки, а для объекта третьего порядка — уже около и более страницы текста (если он существует). Для объектов четвертого порядка уже неизвестны аналитические законы оптимального управления за исключением модельного объекта, представляющего последовательное соединение четырех интеграторов [6, 8]. В связи с этим в целях получения аналитических алгоритмов управления быстродействующих систем высокого порядка предлагается подход к синтезу квазиоптимальных регуляторов с использованием преобразования исходной задачи быстродействия к аналогичной задаче управления объектом низкого порядка. Он базируется на использовании известных оптимальных законов обратной связи для объектов первого или второго порядков и состоит, во-первых, в нахождении функций $\psi_i(t) = F_i[X(t)]$, $i = 1, 2$, описывающих зависимость фазовых координат $\psi_i(t)$ моделей объекта низкого порядка (они по аналогии с работой А. А. Колесникова [13] называются агрегированными переменными или макропеременными) с компонентами вектора состояния $X(t)$ исходного объекта высокого порядка, и, во-вторых, в расчете параметров используемых моделей 1-го или 2-го порядков, которые обеспечивают в определенном смысле их адекватность исходному объекту и, соответственно, высокое быстродействие синтезиру-

емых систем. Таким образом, основная задача работы состоит в выработке и обосновании рациональных вариантов (методик) определения функций $\psi_i(t) = F_i[X(t)]$, обеспечивающих хорошее приближение квазиоптимальных управлений к строго оптимальным по быстродействию алгоритмам управления. В первой части работы были исследованы две методики аналитического синтеза квазиоптимальных по быстродействию регуляторов для линейных объектов, основанные на использовании условно и приближенно адекватных моделей объекта первого порядка [15]. Вторая часть работы посвящена анализу следующих двух методик синтеза, использующих условно и приближенно адекватные модели объекта второго порядка.

Постановка задач управления

Исследуемые одномерные объекты в линейном приближении описываются векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t), \quad (1)$$

где $X(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$ — вектор состояния объекта, координаты которого имеют физический смысл отклонений от заданного режима работы (здесь и далее T — символ транспонирования вектора или матрицы); $u(t)$ — управляющее воздействие, ограниченное величиной U_m ($|u(t)| \leq U_m$); A , B — матрицы параметров объекта размерности $n \times n$ и $n \times 1$.

Для объектов (1) исследуется классическая задача конструирования регулятора, оптимального по критерию быстродействия [3, 14]: требуется определить функцию переключения $f(X)$ релейного регулятора

$$u(t) = -U_m \text{sign}[f(X(t))], \quad (2)$$

обеспечивающего перевод объекта из начального состояния $X_0 \in \Omega$, принадлежащего заданной области Ω фазового пространства, в начало координат этого пространства за минимальное время.

Еще раз подчеркнем, что данная задача быстродействия полностью аналитически решена только для объектов первого и второго порядка. В текущей части работы для приближенного определения искомого управления (2) используется тот известный факт, что для объекта

$$\dot{\psi}_1(t) = \alpha_{11}\psi_1(t) + \alpha_{12}\psi_2(t) + \beta_1 u(t); \quad (3a)$$

$$\dot{\psi}_2(t) = \alpha_{21}\psi_1(t) + \alpha_{22}\psi_2(t) + \beta_2 u(t) \quad (3б)$$

(α_{ij} , β_i — параметры модели объекта второго порядка, записанной в наиболее общей форме) оптимальный по быстродействию закон управления относительно несложно определить [2, 3, 14]. Для нахождения функции переключения $f(\psi_1, \psi_2) = \psi_1 - \varphi(\psi_2)$, определяющей управление (2) для объекта (3), который не имеет комплексных корней (для него выполняется теорема А. А. Фельдбаума о "n интервалах управления"), достаточно рассчитать две фазовые траектории этого объекта, проходящие через начало координат $\psi_1 = \psi_2 = 0$. Первую траекторию $\psi_1 = \varphi_1(\psi_2)$ при действии управления $u(t) = +U_m$ можно найти аналитическим или численным решением дифференциального уравнения

$$\frac{d\psi_1}{d\psi_2} = \frac{\alpha_{11}\psi_1 + \alpha_{12}\psi_2 + \beta_1 U_m}{\alpha_{21}\psi_1 + \alpha_{22}\psi_2 + \beta_2 U_m}, \quad \varphi_1(0) = 0.$$

Вторая фазовая траектория $\psi_1 = \varphi_2(\psi_2)$ объекта (3), соответствующая действию управления $u(t) = -U_m$, определяется решением аналогичного дифференциального уравнения, в котором вместо слагаемых $+\beta_i U_m$, $i = 1, 2$, присутствуют слагаемые $-\beta_i U_m$. Соответственно, искомая функция $\varphi(\psi_2)$ находится объединением функций $\varphi_1(\psi_2)$ и $\varphi_2(\psi_2)$ [2, 3].

Развиваемый подход к аналитическому синтезу быстродействующих алгоритмов управления объектами высокого порядка (1) базируется на использовании закона обратной связи

$$u(t) = -U_m \text{sign}[\psi_1(t) - \varphi(\psi_2(t))] \quad (4)$$

и в его основе лежат следующие две процедуры:

1) определение специальных функций $\psi_i(t) = F_i[X(t)]$, $i = 1, 2$, и

2) расчет параметров модели (3), которые обеспечивают высокое быстродействие синтезируемых систем, имеющих управление следующей структуры:

$$u(t) = -U_m \text{sign}\{F_1[X(t)] - \varphi[F_2[X(t)]]\}. \quad (5)$$

Структура (5) вытекает из управления (4) при замене $\psi_i(t) \rightarrow F_i[X(t)]$. Соответственно, основная задача данной работы состоит в выработке и обосновании рациональных вариантов (методик) выполнения указанных двух процедур, которые обеспечивают в некотором, определенном смысле адекватность моделей (1) и (3) объекта и, соответственно, хорошее приближение управлений структуры (5) к строго оптимальным по быстродействию управлениям.

Методики синтеза систем управления

Далее, ограничившись анализом линейных функций $F_i[X(t)] = D_i^T X(t)$, будем исследовать две методики синтеза квазиоптимальных по быстродействию регуляторов, которые различаются по типу используемой модели (3) объекта второго порядка — условно адекватной и приближенно адекватной по отношению к исходной модели (1) объекта управления (эти понятия введены в первой части работы [15]).

Параметры модели (3) для объекта (1) найдем в соответствии с подходом, аналогичным используемому в первой части работы при построении модели объекта первого порядка, в котором вместо одного вектора Λ [15] определяются два линейно независимых вектора

$$\Lambda_1^T = (\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_n), \quad \Lambda_2^T = (\bar{\lambda}_1 \ \bar{\lambda}_2 \ \dots \ \bar{\lambda}_n) \quad (6)$$

со свойствами, подобными Λ , — они, как минимум, должны обеспечивать устойчивость синтезируемой системы управления. Векторам (6) отвечают агрегированные переменные

$$\psi_1(t) = \Lambda_1^T X(t), \quad \psi_2(t) = \Lambda_2^T X(t)$$

— фазовые координаты модели (3). С их использованием рассмотрим следующую задачу: для объекта (1) найти линейную модель второго порядка (3), которая в смысле работы [15] была бы адекватна исходному объекту.

Предварительно определим условия, которым должны удовлетворять векторы (6), чтобы для объекта (1) было возможно построение хотя бы одного описания (3). Умножением следа модели объекта (1) на вектор Λ_1^T получаем

$$\dot{\psi}_1(t) = \Lambda_1^T A X(t) + \Lambda_1^T B u(t). \quad (7)$$

Для производной $\dot{\psi}_1(t)$ на основе уравнения (3a) записываем соотношение

$$\dot{\psi}_1(t) = \alpha_{11}\Lambda_1^T X(t) + \alpha_{12}\Lambda_2^T X(t) + \beta_1 u(t). \quad (8)$$

Для равенства производных (7) и (8) должны выполняться соотношения

$$\beta_1 = \Lambda_1^T B; \quad (9a)$$

$$\alpha_{11}\Lambda_1^T + \alpha_{12}\Lambda_2^T = \Lambda_1^T A. \quad (9b)$$

Применительно к функции $\psi_2(t)$ получаем аналогичные соотношения

$$\beta_2 = \Lambda_2^T B, \quad (10a)$$

$$\alpha_{21}\Lambda_1^T + \alpha_{22}\Lambda_2^T = \Lambda_2^T A. \quad (10б)$$

Уравнения (9a), (10a) однозначно определяют параметры β_1, β_2 , если известны векторы Λ_1, Λ_2 . В свою очередь, искомые векторы Λ_1, Λ_2 должны удовлетворять уравнениям (9б), (10б), которые после транспонирования принимают вид

$$\alpha_{11}\Lambda_1 + \alpha_{12}\Lambda_2 = A^T \Lambda_1; \quad (11a)$$

$$\alpha_{21}\Lambda_1 + \alpha_{22}\Lambda_2 = A^T \Lambda_2. \quad (11б)$$

Соотношения (11), определяющие совместно с уравнениями (9a), (10a) параметры модели объекта (3), будем рассматривать как условия адекватности модели (3) исходной модели объекта (1). Эти условия определяют так называемую условную адекватность моделей объекта. Если эти условия выполняются приближенно, то они определяют приближенную адекватность указанных моделей объекта.

Система $2n$ линейных алгебраических уравнений (11) содержит $2n + 4$ неизвестных ($2n$ неизвестных компонент векторов Λ_1, Λ_2 и 4 параметра $\alpha_{ij}, i, j = 1, 2$, модели объекта) и поэтому имеет бесконечно большое число решений. Соответственно, на первом этапе анализа необходимо установить множество решений системы уравнений (11), обеспечивающих устойчивость синтезируемой системы управления. Как показано в первой части статьи [15], таким множеством является множество векторов Λ_1, Λ_2 со всеми положительными компонентами, значения которых определяют коэффициенты некоторых гурвицевых полиномов. На втором этапе из этих допустимых решений выделяется одно, обеспечивающее максимальное быстродействие системы управления.

Приведем анализ двух способов (методик) определения такого решения. Изложим вначале методику синтеза более простую в вычислительном плане и применимую к более широкому классу объектов управления.

Методика 3 синтеза с приближенно адекватной моделью объекта

Методика 3 во многом аналогична методике 2, изложенной в первой части работы [15] и основана не на определении, а на априорном задании компонент векторов Λ_1, Λ_2 , которые обеспечивают желаемые свойства системы по

показателям устойчивости и быстродействия. Опишем ее основные этапы, сопроводив их соответствующими пояснениями.

1. Вектор Λ_1 задается или аналогично тому, как это делается в методике 2 на основе модифицированного полинома Баттерворса $(n - 1)$ -го порядка [15], или на основе гурвицева полинома $G(s) = (1 + \mu_1 s)^{n-1}$:

$$\Lambda_1^T = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n) = (1 \ (n-1)\mu_1 \dots \mu_1^{n-1}) \quad (12)$$

с компонентами, равными коэффициентам указанного полинома. Этот полином обеспечивает линейной системе управления с передаточной функцией $W(s) = 1/G(s)$ максимальное быстродействие в классе систем с вещественными корнями (собственными числами) [14, 16]. Отметим, что модифицированный полином Баттерворса обеспечивает аналогичное быстродействие в классе систем управления с комплексными корнями при заданном ограничении на перерегулирование $\sigma_z = \Delta$ системы, где Δ — значение "трубки", используемой для оценки времени переходных процессов динамической системы.

Параметр μ_1 выбирается в процессе моделирования системы из условия ее максимального быстродействия при допустимом значении перерегулирования.

2. Вектор Λ_2 определяется подобным образом, но с другим коэффициентом преобразования $\mu_2 \neq \mu_1$:

$$\Lambda_2^T = (\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \dots \bar{\lambda}_n) = (1 \ (n-1)\mu_2 \dots \mu_2^{n-1}). \quad (13)$$

3. При известных векторах (12), (13) с использованием уравнений (11) рассчитываются параметры модели (3).

С этой целью матричное уравнение (11a) записываем в виде

$$\Lambda \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{pmatrix} = A^T \Lambda_1, \quad \Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2) \quad (14)$$

с известной матрицей $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$. Находим приближенное решение переопределенной системы уравнений (14) с использованием метода наименьших квадратов (МНК) [17]:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{pmatrix} = (\Lambda^T \Lambda)^{-1} \Lambda^T A^T \Lambda_1. \quad (15)$$

Аналогичным решением уравнения (11б) определяем параметры

$$\begin{pmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix} = (\Lambda^T \Lambda)^{-1} \Lambda^T A^T \Lambda_2. \quad (16)$$

4. Для объекта второго порядка (3) с параметрами (15), (16) и $\beta_1 = \Lambda_1^T B$, $\beta_2 = \Lambda_2^T B$ известным методом [2, 3] определяется функция переключения оптимального по быстродействию регулятора.

5. С использованием векторов (12), (13) и результата п. 4 для объекта с каноническим вектором состояния формируется искомое быстродействующее управление структуры (5):

$$u(t) = -U_m \text{sign}\{\Lambda_1^T X(t) - \phi[\Lambda_2^T X(t)]\}.$$

6. Если описание объекта (1) представлено в неканоническом фазовом пространстве, то известными способами [2, 16] находится линейное преобразование фазовых координат объекта $X(t) = CZ(t)$ с невырожденной матрицей C , при которой описание объекта принимает каноническую форму Фробениуса. С использованием результата п. 5 и матрицы C^{-1} искомое управление структуры (5) объектом с неканоническим вектором состояния определяется выражением вида

$$u(t) = -U_m \text{sign}\{\Lambda_1^T C^{-1} X(t) - \phi[\Lambda_2^T C^{-1} X(t)]\}. \quad (17)$$

Исследуем особенности данной методики синтеза на примере решения задачи быстродействия для объекта третьего порядка.

Пример 1. Применим методику 3 к конструированию быстродействующей системы управления объектом

$$\gamma T^2 \ddot{x}_1(t) + (1 + \gamma)T \ddot{x}_1(t) + \dot{x}_1(t) = ku(t); \quad |u(t)| \leq U_m \quad (18)$$

с параметрами $T > 0$, $k > 0$, $0 < \gamma < 1$, $U_m = 1$. Этот объект рассматривался в первой части работы, и его выбор связан с тем, что для него известно строго оптимальное по быстродействию управление [18]:

$$u(t) = -U_m \text{sign}[\sigma(X(t))]; \quad \sigma(X) = \gamma^2 \frac{x_3 - x_{1k}}{k} - \left\{ \ln \left\{ 1 - \gamma[(1 - \gamma)x_1 + \gamma x_2 - x_3] \frac{\text{sign}(W)}{k} \right\} - \ln \left\{ 2 \left\{ 1 + \sqrt{1 - [1 + (\gamma/k)(x_2 - x_3)\text{sign}(W)] \times \exp(-(\gamma/k)(x_3 - x_{1k})\text{sign}(W))} \right\}^\gamma - \left\{ 1 + \sqrt{1 - [1 + (\gamma/k)(x_2 - x_3)\text{sign}(W)] \times \exp(-(\gamma/k)(x_3 - x_{1k})\text{sign}(W))} \right\}^{2\gamma} \right\} \right\}, \quad (19)$$

где

$$W = \{1 - [1 - (\gamma/k)(x_2 - x_3)\text{sign}(x_3 - x_{1k})] \times \exp(-(\gamma/k)(x_3 - x_{1k}))\} \text{sign}(x_3 - x_{1k}),$$

x_{1k} — конечное значение первой фазовой координаты объекта, при этом предполагается $x_{2k} = x_{3k} = 0$. Управление (19) записано с использованием следующих фазовых координат объекта (18):

$$x_2(t) = T\dot{x}_1(t) + x_1(t), \quad x_3(t) = \gamma T\ddot{x}_2(t) + x_2(t).$$

Знание оптимального управления (19) позволяет оценить степень приближения к нему синтезируемых приближенных алгоритмов управления.

При применении методики 3 объект (18) удобнее описывать в каноническом фазовом пространстве ($x_2(t) = \dot{x}_1(t)$, $x_3(t) = \dot{x}_2(t)$) уравнением

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где

$$a_2 = -\frac{1}{\gamma T^2}, \quad a_3 = -\frac{1 + \gamma}{\gamma T}, \quad b_3 = \frac{k}{\gamma T^2}$$

Последовательно выполняем процедуры методики синтеза.

1. Вектор Λ_1 задаем на основе соотношения (12) при $n = 3$:

$$\Lambda_1^T = (1 \quad 2\mu_1 \quad \mu_1^2), \quad \mu_1 = 1,15.$$

2. Вектор Λ_2 определяем аналогично, но с коэффициентом $\mu_2 = 0,9$:

$$\Lambda_2^T = (1 \quad 2\mu_2 \quad \mu_2^2).$$

3. Находим параметры модели (3) с использованием уравнений (15), (16):

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,136 \\ 1,144 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,610 \\ 0,620 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$\beta_1 = 0,405, \quad \beta_2 = 0,661.$$

4. Для объекта второго порядка (3) с параметрами (21) определяем функцию переключения оптимального по быстродействию регулятора.

Так как этот объект имеет вещественные корни $p_1 = -0,528$, $p_2 = 0,013$, то синтез опти-

мального регулятора проведем с использованием результата работы [2]. Для этого осуществим преобразование координат $\Psi(t) = PZ(t)$ объекта (3) с матрицей

$$P = M \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,883 & -0,706 \\ -0,469 & -0,708 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} -1,156 & 0 \\ 0 & -106,523 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,021 & 75,182 \\ 0,542 & 75,465 \end{pmatrix},$$

где M — матрица, составленная из собственных векторов матрицы параметров объекта (3); k_1 , k_2 — масштабирующие коэффициенты, обеспечивающие в преобразованных уравнениях объекта равенство параметров его корням:

$$\dot{z}_1(t) = p_1 z_1(t) + p_1 u(t); \quad (22a)$$

$$\dot{z}_2(t) = p_2 z_2(t) + p_2 u(t). \quad (22b)$$

Для объекта (22) оптимальное по быстродействию управление согласно работе [2] описывается уравнениями

$$u(t) = -U_m \text{sign}[z_2(t) - \varphi(z_1(t))]; \quad (23) \\ \varphi(z_1) = \text{sign}(z_1)[(1 + |z_1|)^\alpha - 1], \alpha = p_2/p_1.$$

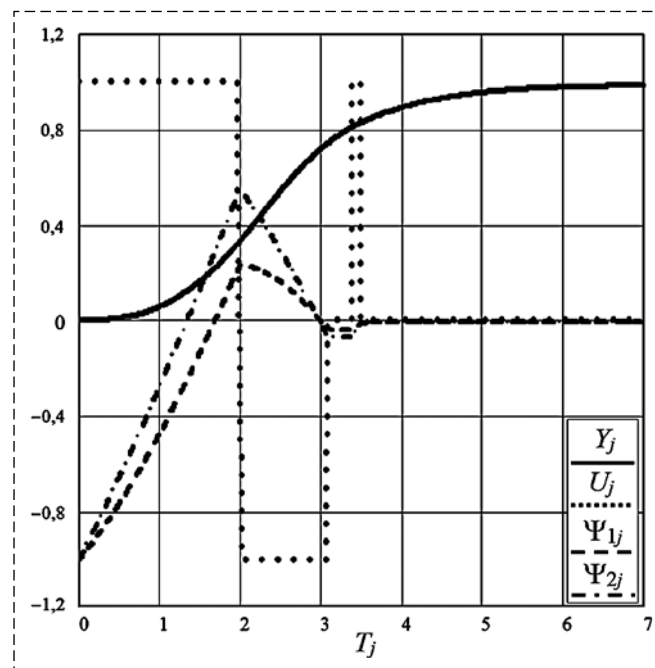
5. С использованием результатов предыдущих пунктов формируется квазиоптимальное по быстродействию управление. Оно получается заменой в алгоритме управления (23) компонент вектора Z соотношениями

$$Z(t) = P^{-1}\Psi(t) = \begin{pmatrix} 2,081 & -2,073 \\ -0,015 & 0,028 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1^T X(t) \\ \Lambda_2^T X(t) \end{pmatrix}, \quad (24)$$

т. е. искомое управление описывается совокупностью уравнений (23), (24).

Переходные процессы системы с данным управлением при отработке задания $X_z = 1$ представлены на рисунке. Необходимо отметить, что при моделировании системы использовался релейный элемент с небольшой зоной нечувствительности 0,0001. На рисунке приняты следующие обозначения: компоненты вектора Y_j равны значениям фазовой координаты $x_1(t)$ в дискретные моменты времени $T_j = \Delta T j$, $\Delta T = 0,007$ с, $j = 0, 1, \dots, 1000$, системы с управлением (23), (24), значения которого в те же моменты времени обозначены как компоненты вектора U_j ; соответственно, компоненты векторов Ψ_{1j} , Ψ_{2j} отвечают аналогичным значениям макропеременных $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ системы.

Анализ графиков на рисунке показывает, что исследуемая система управления в сравнении с системами, рассмотренными в первой части статьи [15], имеет не один и не два, а три интервала с максимальным значением управления ($+U_m$ или $-U_m$) — это качественно ближе к строго оптимальной системе. Однако она отличается относительно большим временем регулирования $t_p = 5,00$ в сравнении с оптимальной системой ($t_3 = 4,412$). Это время не удалось уменьшить за счет дальнейших вариаций коэффициентов преобразования μ_1 , μ_2 в векторах Λ_1 , Λ_2 . Минимальное время регулирования было получено изменением в данных векторах параметра $d = 2$ до значения $d = 1,58$. При указанных параметрах система управления приобретает комплексные корни и допустимое перерегулирование $\sigma = 4,11\%$ — меньшее, чем заданное $\sigma_z = 4,321\%$. При этом система имеет моменты переключения $t_1 = 2,256$, $t_2 = 4,056$, $t_3 = 4,712$, достаточно близкие к моментам $t_1 = 2,188$, $t_2 = 3,864$, $t_3 = 4,412$ строго оптимальной системы управления. Интересно отметить, что время переходных процессов сравниваемых систем, определяемое с использованием "трубки" $\Delta = \sigma_z = 4,321\%$, соответственно равно 3,50 и 3,64. Меньшее время регулирования квазиоптимальной системы объясняется наличием в ней принятого допустимого перерегулирования.



Переходные процессы системы с алгоритмом управления (23), (24)

Transient processes of systems with control algorithm (23), (24)

Методика 4 синтеза с условно адекватной моделью объекта

Данная методика в отличие от методики 3 предполагает точное определение параметров модели (3) с использованием известных методов нахождения собственных чисел и векторов матриц [17].

Из уравнения (11a) выражаем вектор

$$\Lambda_2 = \frac{1}{\alpha_{12}}(A^T - \alpha_{11}E)\Lambda_1 \quad (25)$$

и подставляем в уравнение (11б):

$$\begin{aligned} \alpha_{21}\Lambda_1 &= (A^T - \alpha_{22}E)\Lambda_2 = \\ &= (A^T - \alpha_{22}E)\frac{1}{\alpha_{12}}(A^T - \alpha_{11}E)\Lambda_1. \end{aligned}$$

Записав это уравнение в форме

$$(A^T - \alpha_{22}E)(A^T - \alpha_{11}E)\Lambda_1 = \alpha_{12}\alpha_{21}\Lambda_1, \quad (26)$$

сводим исходную задачу синтеза к решению задачи определения собственных чисел $\alpha = \alpha_{12}\alpha_{21}$ и собственных векторов матрицы

$$A_2 = (A^T - \alpha_{22}E)(A^T - \alpha_{11}E). \quad (27)$$

Соответственно, предлагаемая методика 4 синтеза предполагает выполнение следующих процедур.

1. С использованием, например, стандартной программы *eigenvals(A)* математической системы MathCAD определяем все собственные числа (корни) α_i , $i = 1, 2, \dots, n$, матрицы A_2 и все ее собственные векторы Λ_1 .

2. На основе результатов п. 1 с использованием соотношения (25) рассчитываем возможные значения вектора Λ_2 .

3. С использованием утверждений 1 и 2 [15] для каждого вектора Λ_1 и Λ_2 в отдельности выбираем единственное значение вектора и соответствующее им собственное число α , определяющие быстродействующее управление объектом (1).

4. На основе результатов п. 3 определяем искомое управление структуры (17).

Исследуем особенности предложенной методики на примере синтеза системы управления объектом третьего порядка.

Пример 2. С использованием методики 4 проведем синтез быстродействующей системы управления объектом (20). При синтезе дополнительно предположим, что последняя компонента вектора Λ_1 нулевая ($\lambda_3 = 0$), это в соответ-

ствии с выражением $\beta_1 = \Lambda_1^T B = 0$ упрощает модель объекта (3), которая будет представлять типовое аperiodическое звено второго порядка. Для этого звена непосредственно применим алгоритм оптимального управления работы [2].

Синтез осуществим в аналитической форме в целях выявления общих особенностей методики синтеза и, в частности, покажем, что для объекта (20) существует множество допустимых значений векторов Λ_1 и Λ_2 (оно определяется значениями двух непрерывных параметров), при которых система управления устойчива.

Последовательно выполняем процедуры методики синтеза.

1. Определяем собственные числа и векторы матрицы (27):

$$\begin{aligned} A_2 &= (A^T - \alpha_{22}E)(A^T - \alpha_{11}E) = \\ &= \begin{pmatrix} -\alpha_{22} & 0 & 0 \\ 1 & -\alpha_{22} & a_2 \\ 0 & 1 & a_3 - \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha_{11} & 0 & 0 \\ 1 & -\alpha_{11} & a_2 \\ 0 & 1 & a_3 - \alpha_{11} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{22} & 0 & 0 \\ -\alpha_{11} - \alpha_{22} & \alpha_{11}\alpha_{22} + a_2 & -\alpha_{22}a_2 + a_2(a_3 - \alpha_{11}) \\ 1 & -\alpha_{11} - \alpha_{22} + a_3 & a_2 + (a_3 - \alpha_{11})(a_3 - \alpha_{22}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (28)$$

С учетом вида матрицы (28) для искомого вектора $\Lambda_1 = (\lambda_1 \lambda_2 0)^T$ уравнение (26) принимает вид системы уравнений

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{22} & 0 \\ -\alpha_{11} - \alpha_{22} & \alpha_{11}\alpha_{22} + a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \alpha_{12}\alpha_{21} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}; \quad (29)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2(-\alpha_{11} - \alpha_{22} + a_3) = 0.$$

Задача (29) на собственные значения параметра $\alpha = \alpha_{12}\alpha_{21}$ имеет решение, если

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha & 0 \\ -\alpha_{11} - \alpha_{22} & \alpha_{11}\alpha_{22} + a_2 - \alpha \end{vmatrix} = 0, \quad (30)$$

т. е. $(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha)(\alpha_{11}\alpha_{22} + a_2 - \alpha) = 0$.

Квадратное уравнение (30) относительно переменной α имеет два решения

$$\alpha_1 = \alpha_{11}\alpha_{22}, \quad \alpha_2 = \alpha_{11}\alpha_{22} + a_2, \quad (31)$$

которые являются искомыми собственными числами матрицы (28).

Теперь найдем собственные векторы этой матрицы вида $\Lambda_1 = (\lambda_1 \lambda_2 0)^T$. Если положить $\alpha = \alpha_2 = \alpha_{11}\alpha_{22} + a_2$, то из уравнений (29) следует $\lambda_1 = 0$, что неприемлемо (в дальнейшем система управления получается неустойчивой). Поэтому полагаем собственное значение

$\alpha = \alpha_2 = \alpha_{11}\alpha_{22}$, для которого уравнения (29) принимают вид

$$\begin{aligned}\lambda_1(-\alpha_{11} - \alpha_{22}) + \lambda_2 a_2 &= 0; \\ \lambda_1 + \lambda_2(-\alpha_{11} - \alpha_{22} + a_3) &= 0.\end{aligned}\quad (32)$$

Эта система однородных уравнений имеет ненулевое решение, если ее определитель равен нулю:

$$(-\alpha_{11} - \alpha_{22})(-\alpha_{11} - \alpha_{22} + a_3) - a_2 = 0. \quad (33)$$

Квадратное уравнение (33) относительно переменной $\chi = -(\alpha_{11} + \alpha_{22})$ имеет два решения

$$\chi_{1,2} = -0,5a_3 \pm \sqrt{0,25a_3^2 + a_2}. \quad (34)$$

Подставляя в (34) значения параметров объекта (20), получаем

$$\chi_{1,2} = \frac{1+\gamma}{2\gamma T} \pm \sqrt{\left(\frac{1+\gamma}{2\gamma T}\right)^2 - \frac{1}{\gamma T^2}} = \frac{1+\gamma}{2\gamma T} \pm \frac{1-\gamma}{2\gamma T}.$$

Отсюда следует, что переменная $\chi = -(\alpha_{11} + \alpha_{22})$ может принимать два значения

$$\chi_1 = 1/\gamma T, \quad \chi_2 = 1/T. \quad (35)$$

Они согласно уравнениям (32) определяют значения собственного вектора

$$\Lambda_1^T = (\lambda_1 \ \lambda_2 \ 0), \quad \lambda_2 = -\lambda_1 \chi / a_2, \quad (36)$$

где $\lambda_1 = \text{var}$ — свободный параметр, подлежащий выбору.

2. На основе результата (36) с использованием соотношения (25) рассчитываем значения вектора

$$\begin{aligned}\Lambda_2 &= \frac{1}{\alpha_{12}} \begin{pmatrix} -\alpha_{11} & 0 & 0 \\ 1 & -\alpha_{11} & a_2 \\ 0 & 1 & a_3 - \alpha_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\alpha_{12}} \begin{pmatrix} -\alpha_{11}\lambda_1 \\ \lambda_1 - \alpha_{11}\lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \frac{\lambda_1}{\alpha_{12}} \begin{pmatrix} -\alpha_{11} \\ 1 + \alpha_{11}\chi/a_2 \\ -\chi/a_2 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (37)$$

для двух возможных значений (35) параметра χ .

3. Для каждого вектора Λ_1 и Λ_2 выбираем единственное значение вектора, определяющее быстродействующее управление объектом (20).

Во-первых, для устойчивости синтезируемой системы обеспечим положительные значения компонентам векторов. Для вектора (36) это можно сделать простым выбором значений свободного параметра $\lambda_1 > 0$, так как $a_2 < 0$ согласно уравнениям объекта (20).

Компоненты вектора (37) определяются параметрами, которые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_{12}\alpha_{21} = \alpha_{11}\alpha_{22}; \\ \chi &= -(\alpha_{11} + \alpha_{22}) = 1/\gamma T.\end{aligned}\quad (38)$$

В этих и последующих уравнениях указывается одно первое значение переменной (35), так как из него просто получается второе значение переменной при $\gamma = 1$. В уравнениях (38) параметр α — это свободный параметр, подлежащий выбору.

Рассматривая (38) как систему уравнений относительно неизвестных α_{11} , α_{22} , находим

$$\begin{aligned}\alpha_{11} &= -1/2\gamma T + \sqrt{(1/2\gamma T)^2 - \alpha}; \\ \alpha_{22} &= -1/2\gamma T - \sqrt{(1/2\gamma T)^2 - \alpha}.\end{aligned}\quad (39)$$

В выражениях (39) полагаем значение параметра $\alpha \leq (1/2\gamma T)^2$, так как коэффициенты α_{11} , α_{22} модели (3) должны быть вещественными.

Рассмотрим граничное значение $\alpha = (1/2\gamma T)^2$, при котором получается вариант модели (3) с параметрами

$$\begin{aligned}\alpha_{11} &= \alpha_{22} = -1/(2\gamma T) < 0; \\ \alpha_{21} &= 1/(4\gamma^2 T^2 \alpha_{12}) > 0.\end{aligned}\quad (40)$$

При данных значениях параметров (40) и свободного параметра $\lambda_1 > 0$ компоненты вектора (37) принимают положительные значения, обеспечивающие устойчивость синтезируемой системы управления. При значениях $\alpha \leq (1/2\gamma T)^2$ из (39) можно найти параметры

$$\alpha_{11} \neq \alpha_{22} < 0, \quad \alpha_{21} = \alpha/\alpha_{12} > 0,$$

при которых с учетом $\lambda_1 > 0$ компоненты вектора (37) принимают также положительные значения. Таким образом, множество допустимых значений векторов Λ_1 и Λ_2 , при которых система управления устойчива, задается двумя свободными параметрами со значениями $\alpha \leq (1/2\gamma T)^2$ и $\lambda_1 > 0$.

В последующем моделировании системы можно определить значения α и λ_1 , при которых она имеет максимальное быстродействие.

4. С использованием векторов (36) и (37), имеющих указанные допустимые значения, находим искомое управление структуры (17). Данный этап полностью совпадает с аналогичным этапом примера 1.

Моделирование синтезированной системы управления объектом (20) с параметрами $T = 2$, $\gamma = 0,5$, $k = 1$, $U_m = 1$ показало ее работоспособность, но время переходных процессов в ней не удалось получить менее, чем в системе примера 1, что согласуется с результатами первой части статьи [15].

Выводы

1. В работе развивается подход к синтезу квазиоптимальных по быстродействию алгоритмов управления линейными объектами высокого порядка, предложенный в первой части работы, на основе применения известных оптимальных алгоритмов управления объектами второго порядка. Он предполагает разработку способов (методик) преобразования модели объекта высокого порядка к моделям второго порядка. В работе предложены и исследованы две методики синтеза, использующие условно и приближенно адекватные модели объекта второго порядка.

2. Алгоритмы управления, синтезированные по методике 3, являются более сложными в сравнении с алгоритмами, полученными с применением методик 1 и 2 первой части работы (они используют не только линейные обратные связи), но позволяют, как показывает моделирование, получить время переходных процессов системы управления, практически не отличающееся от времени регулирования оптимальной системы. Более того, при наличии небольшого допустимого перерегулирования ($\sigma \leq 4,3\%$) время регулирования может быть даже меньше, чем в оптимальной системе. Так как реализация данных алгоритмов управления с применением цифровой техники не вызывает принципиальных затруднений, то методика 3, как и методики 1, 2 синтеза, рекомендуется к применению.

3. Реализация методики 4 отличается относительной сложностью и требует конкретизации способа выбора наилучшего управления из множества допустимых управлений.

4. Предложенный подход и методики синтеза квазиоптимальных регуляторов применимы при использовании также других функционалов качества управления, в частности, критерия энергосбережения, а также комбинированного критерия энергосбережения—быстродействия.

Список литературы

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматлит, 1961. 302 с.
2. Athans M., Falb P. L. Optimal Control, An Introduction to the Theory and Its Applications. New York: McGraw-Hill, 1966.
3. Иванов В. А., Фалдин Н. В. Теория оптимальных систем автоматического управления. М.: Наука, 1981. 336 с.
4. Ключев А. С., Колесников А. А. Оптимизация автоматических систем управления по быстродействию. М.: Энергоиздат, 1982. 240 с.
5. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. Гибридная схема решения задачи линейного быстродействия на основе формализма полиэдральной оптимизации // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 7. С. 3—9.
6. Каюмов О. Р. Глобально управляемые механические системы. М.: Физматлит, 2007. 168 с.
7. Weinberg L. Network Analysis and Synthesis. New York: McGraw-Hill, 1962.
8. Ловчаков В. И. Функции переключения оптимального по быстродействию регулятора для четырехкратного интегратора // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 9. С. 3—6.
9. Сурков В. В., Сухинин Б. В., Ловчаков В. И., Соловьев А. Э. Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов по критериям точности, быстродействию, энергосбережению. Тула: Изд-во ТулГУ, 2005. 300 с.
10. Нейдорф Р. А. Эффективная аппроксимация кусочных функций в задачах квазиоптимального по быстродействию управления // Сб. трудов междунар. науч. конф. "Математические методы в технике и технологиях ММТТ—2000". СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2000. № 2. С. 18—22.
11. Нейдорф Р. А. Рекуррентно-диффеоморфный синтез квазиоптимальных по быстродействию ограниченных законов управления // Информатика и системы управления. 2006. № 2. С. 119—128.
12. Крючков В. В., Козлов Д. В., Шопин А. С. Аппроксимация поверхности переключения релейного регулятора с использованием уравнения в частных производных и нейросетей // Известия ТулГУ. Технические науки. 2010. № 1. С. 198—205.
13. Колесников А. А. Основы теории синергетического управления. М.: Фирма "Испо-Сервис", 2000. 264 с.
14. Пупков К. А. Методы классической и современной теории автоматического управления: в 3 т. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. Т. 2: Синтез регуляторов и теория оптимизации систем автоматического управления. 736 с.
15. Ловчаков В. И. К аналитическому синтезу приближенно оптимальных по быстродействию регуляторов для линейных объектов. Ч. 1. Использование модели объекта первого порядка // Мехатроника, автоматизация, управление. 2022. Т. 23, № 2. С. 68—78.
16. Ловчаков В. И. Синтез линейных систем управления с максимальным быстродействием и заданным перерегулированием // Мехатроника, автоматизация, управление. 2020. Т. 21, № 9. С. 499—510.
17. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с.
18. Техническая кибернетика. Теория автоматического управления. Книга 3. Часть II. / Под ред. В. В. Солодовникова. М.: Машиностроение, 1969. 368 с.

Analytical Synthesis of Quasi-Optimal Regulators for Linear Objects Based on Conditionally Adequate Low-Order Models. Part 2

V. I. Lovchakov, lovvi50@mail.ru,

Tula State University, Tula, 300600, Russian Federation

Corresponding author: **Lovchakov Vladimir I.**, Full Professor, Tula State University, Department of Electrical Engineering and Electrical Equipment, Tula, 300600, Russian Federation e-mail: lovvi50@mail.ru

Accepted on November 3, 2021

Abstract

For linear high-order plants ($n \geq 4$), analytical (exact) control algorithms in the form of feedback that are optimal in terms of the rapid response criterion are practically unknown, and for them the problem of synthesizing approximately rapid response control laws remains relevant. In this part of the work, an approach to the synthesis of rapid response high-order systems is developed, proposed in its first part, using the idea of transforming the original rapid response problem to a similar problem of controlling objects described by models of the first or second order, for which the optimal control algorithms in terms of rapid response are known. These algorithms underlie the investigated approach to the synthesis of rapid response control systems, which involves finding special functions that describe the relationship between the phase coordinates of models of a low-order object (by analogy with the works of A. A. Kolesnikov, they are called aggregated or macro-variables) with the phase coordinates of the original high-order object as well as the calculation of the parameters of the low-order models used, which in a certain sense ensure their adequacy to the original object and, accordingly, the rapid response of the synthesized systems. In this part of the work, in contrast to its first part, the synthesis uses two models of an object, not of the first, but of the second order, which are characterized by conditional and approximate adequacy in relation to the original model of a high-order object. In the case of conditional adequacy, the parameters of the low-order model are found exactly using the eigenvalues and vectors of the original object, and with approximate adequacy, using the least squares method. On the basis of these two second-order models, two methods for the synthesis of quasi-optimal controllers are developed, which differ in the use of nonlinear feedbacks that provide an increased rapid response of the designed control system that is sufficiently close to the limiting values. In particular, by the example of modeling, it is shown that Accordingly, the main content of the work is devoted to the results of a comparative analysis of the properties of these rapid response controllers, as well as the analysis of the features and conditions of applicability of the proposed synthesis methods.

Keywords: linear control object, rapid response, overshoot, relay controller, analytical design of the system

For citation:

Lovchakov V. I. Analytical Synthesis of Quasi-Optimal Regulators for Linear Objects Based on Conditionally Adequate Low-Order Models. Part 2, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 3, pp. 115–124.

DOI: 10.17587/mau.23.115-124

References

1. Pontriagin L. S., Boltianskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. Mathematical theory of optimal processes, Moscow, Fizmatlit, 1961, 302 p (in Russian).
2. Athans M., Falb P. L. Optimal Control, An Introduction to the Theory and Its Applications, McGraw-Hill, New York, 1966.
3. Ivanov V. A., Faldin N. V. The theory of optimal control systems, Moscow, Nauka, 1981, 336 p (in Russian).
4. Kliuev A. S., Kolesnikov A. A. The optimization of control systems by time-optimality, Moscow, Energoizdat, 1982, 240 p (in Russian).
5. Filimonov A. B., Filimonov N. B. The hybrid scheme of the task solution of linear time-optimality based on the formalism of the polyhedral optimization, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2014, no. 7, pp. 3–9 (in Russian).
6. Kayumov O. R. Globally controlled mechanical systems, Moscow, Fizmatlit, 2007, 168 p (in Russian).
7. Weinberg L. Network Analysis and Synthesis, New York, McGraw-Hill, 1962.
8. Lovchakov V. I. The functions of switching optimal time-optimality controller for the quadruple integrator, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2014, no. 9, pp. 3–5 (in Russian).
9. Surkov V. V., Suhinin B. V., Lovchakov V. I., Solov'ev A. Je. Analytical design of optimal controllers according to the criteria of accuracy, speed, energy saving, Tula, Publishing house of TulGU, 2005, 300 p. (in Russian).
10. Nejdorf R. A. Effective approximation of piecewise functions in problems of quasi-optimal control in terms of speed, *Sb. trudov mezhdunar. nauch. konf. "Matematicheskie metody v tekhnike i tekhnologiyah MMTT–2000"*, 2000, no. 2, pp. 18–22 (in Russian).
11. Nejdorf R. A., Chan N. N. Recurrent-diffeomorphic synthesis of bounded control laws that are quasi-optimal in speed, *Informatika i Sistemy Upravleniya*, 2006, no. 2, pp. 119–128 (in Russian).
12. Krjuchkov V. V., Kozlov D. V., Shopin A. S. Approximation of the switching surface of a relay controller using partial differential equations and neural networks, *Izvestiya TulGU. Tekhnicheskie nauki*, 2010, no. 1, pp. 198–205 (in Russian).
13. Kolesnikov A. A. Fundamentals of the theory of synergetic control, Moscow, Firma "Ispo-Servis", 2000, 264 p (in Russian).
14. Pupkov K. A. Methods of classical and modern control theory: 3 volumes, Moscow, Publishing house of MG TU im. N. E. Bauman, 2000 (in Russian).
15. Lovchakov V. I. Analytical Synthesis of Quasi-Optimal Regulators for Linear Objects Based on Conditionally Adequate Low-Order Models. Part 1, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 2, pp. 68–78 (in Russian).
16. Lovchakov V. I. Synthesis of linear control systems with maximum speed and given overshoot, *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2020, no. 9, pp. 499–510 (in Russian).
17. Korn G., Korn T. A guide to mathematics for scientists and engineers, Moscow, Nauka, 1974, 832 p (in Russian).
18. Solodovnikov V. V. ed. Technical cybernetic. Theory of automatic control. Book 3. Part II. Theory of nonstationary, nonlinear, self-tuning systems of automatic control, Moscow, Mashinostroenie, 1969, 368 p (in Russian).