

В. И. Ловчаков, д-р техн. наук, проф., lovvi50@mail.ru,
Тульский государственный университет

Аналитический синтез квазиоптимальных по быстродействию регуляторов для линейных объектов на основе условно адекватных моделей низкого порядка. Часть 1

Сложность решения задачи синтеза замкнутых систем управления, оптимальных по быстродействию, многократно, стремительно возрастает с увеличением порядка n объекта управления (известная проблема "проклятия размерности" Р. Беллмана). Поэтому для линейных объектов высокого порядка ($n \geq 4$) практически неизвестны точные, аналитические алгоритмы управления по критерию быстродействия, и для них применяются приближенные быстродействующие законы управления. В работе предлагается подход, на основе которого разрабатываются аналитического характера методики синтеза быстродействующих систем высокого порядка, использующие идею преобразования исходной задачи быстродействия к аналогичной задаче управления для объектов первого или второго порядка, для которых известны оптимальные по быстродействию алгоритмы управления. Данные алгоритмы лежат в основе предлагаемого подхода к синтезу быстродействующих систем управления, который предполагает нахождение специальных функций, описывающих связь фазовых координат моделей объекта низкого порядка (они по аналогии с работами А. А. Колесникова называются агрегированными или макропеременными) с фазовыми координатами исходного объекта высокого порядка, а также расчет параметров используемых моделей низкого порядка, которые обеспечивают в определенном смысле их адекватность исходному объекту и соответственно высокое быстродействие синтезируемых систем. В работе различаются условная и приближенная адекватность моделей объекта управления. В случае условной адекватности параметры моделей низкого порядка находятся точно с использованием собственных чисел и векторов исходного объекта, а при приближенной адекватности — с применением метода наименьших квадратов. В первой части работы используются две методики синтеза быстродействующих регуляторов. Сформулированы условия применимости данных методик. Основное содержание первой части работы посвящено результатам сравнительного анализа свойств быстродействующих регуляторов, получаемых применением предложенных методик синтеза.

Ключевые слова: линейный объект управления, перерегулирование, быстродействие, релейный регулятор, аналитическое конструирование системы, фильтры Баттерворса

Введение

Одним из наиболее широко используемых критериев качества функционирования систем управления (СУ) является критерий быстродействия. Во-первых, для многих технических объектов этот критерий, требующий окончания переходных процессов за минимальное время, напрямую определяет производительность управляемого технологического процесса [1–7]. Во-вторых, для любой СУ время переходных процессов, являющееся основным показателем ее работы, всегда регламентируется некоторым способом [2–4]. При этом строгое решение задач оптимального управления по критерию быстродействия в форме обратной связи представляет серьезную теоретическую проблему даже для линейных объектов относительно невысокого порядка ($n = 4, 5$) [2–7]. Действительно, задача быстродействия полностью решена для объектов второго порядка методом фазовой плоскости [2–4]. Для объектов третьего порядка быстродействующее управление точно (аналитически) найдено только в отдельных

случаях, в частности, для трех последовательно соединенных интеграторов [2, 3], соединения двух интеграторов и апериодического звена [2], соединения интегратора и двух апериодических звеньев [2]. При этом существенным образом использовались геометрические методы, например, построение проекций вынужденных траекторий объекта в трехмерном фазовом пространстве на соответствующие плоскости. Для объектов высокого порядка ($n \geq 4$) применение геометрических методов существенно затруднено и, как следствие, для них практически неизвестны аналитические решения задач оптимального быстродействия [6, 7]. Исключение составляет модельный объект, представляющий собой последовательное соединение четырех интеграторов [6, 8].

Подчеркнем, что реализация строго оптимальных по быстродействию законов управления, отличающихся математической сложностью, серьезно затруднена и требует многократно больших технико-экономических затрат в сравнении, например, с линейными алгоритмами управления. В связи с этим мно-

гие работы по синтезу быстродействующих систем [9–12], как правило, направлены на разработку различных способов нахождения аппроксимационного решения задачи оптимального быстродействия и, в частности, на определение различных аппроксимаций поверхности переключения оптимального релейного регулятора. Результат такого решения называется *квазиоптимальным управлением*.

Важно подчеркнуть, что сложность решения задачи быстродействия стремительно возрастает с увеличением порядка n объекта управления — это известная проблема порядка задачи быстродействия. Например, для объекта первого порядка такой алгоритм управления имеет предельно простую форму $u(t) = -\text{sign}[x(t)]$, где $x(t)$ — регулируемая переменная объекта. Описание аналогичного алгоритма для объекта второго порядка занимает 1...2 строки, а для объекта третьего порядка — уже около и более страницы текста (если он существует). Для объектов четвертого порядка, как отмечалось выше, уже практически неизвестны аналитические законы оптимального управления. В связи с этим в целях получения аналитических алгоритмов управления быстродействующих систем высокого порядка предлагается подход к синтезу квазиоптимальных регуляторов с использованием преобразования исходной задачи быстродействия к аналогичной задаче управления объектом низкого порядка. Он базируется на применении известных оптимальных законов обратной связи для объектов первого или второго порядков и состоит, во-первых, в нахождении функций $\psi_i(t) = F_i[X(t)]$, $i = 1, 2$, описывающих зависимость фазовых координат $\psi_i(t)$ моделей объекта низкого порядка (они по аналогии с работой А. А. Колесникова [13] называются агрегированными или макропеременными) и компонент вектора состояния $X(t)$ исходного объекта высокого порядка, и, во-вторых, в расчете параметров используемых моделей 1-го или 2-го порядков, которые обеспечивают в определенном смысле их адекватность исходному объекту и, соответственно, высокое быстродействие синтезируемых систем управления. Таким образом, основная задача работы состоит в выработке и обосновании рациональных вариантов (методик) определения функций $\psi_i(t) = F_i[X(t)]$, обеспечивающих хорошее приближение квазиоптимальных управлений к строго оптимальным по быстродействию алгоритмам управления.

В работе предложены четыре существенно различные методики аналитического синтеза квазиоптимальных по быстродействию регуляторов для линейных объектов: в первой части работы исследуются две методики синтеза, основанные на использовании условно и приближенно адекватных моделей объекта первого порядка; во второй части работы проводится анализ следующих двух методик синтеза, использующих условно и приближенно адекватные модели объекта второго порядка.

Подчеркнем, что предложенные методики принципиально отличаются от известных способов понижения порядка модели объекта [14] и в идейном плане близки к методикам аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) А. А. Колесникова [13].

Постановка задач управления и исследования

Исследуемые одномерные объекты в линейном приближении описываются векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t), \quad (1)$$

где $X(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$ — вектор состояния объекта, координаты которого имеют физический смысл отклонений от заданного режима работы; $u(t)$ — управляющее воздействие, ограниченное величиной U_m ($|u(t)| \leq U_m$); A, B — матрицы параметров объекта размерности $n \times n$ и $n \times 1$.

Для объектов (1) рассматривается классическая задача конструирования регулятора, оптимального по критерию быстродействия [15]: требуется определить функцию переключения $\varphi(X)$ релейного регулятора

$$u(t) = -U_m \text{sign}[\varphi(X(t))], \quad (2)$$

обеспечивающего перевод объекта из начального состояния $X_0 \in \Omega$, принадлежащего заданной области Ω фазового пространства, в начало координат этого пространства за минимальное время.

Подчеркнем, что данная задача быстродействия полностью аналитически решена только для объектов первого и второго порядков. В данной первой части работы для приближенного определения искомого управления (2) используется известный факт, что для объекта

$$\dot{\psi}(t) = \alpha\psi(t) + \beta u(t) \quad (3)$$

(α, β — параметры модели объекта первого порядка) оптимальный по быстродействию закон управления имеет простую форму [2, 3]:

$$u(t) = -U_m \text{sign}[\psi(t)]. \quad (4)$$

Предлагаемый подход к аналитическому синтезу быстродействующих алгоритмов управления объектами высокого порядка (1) базируется на использовании обратной связи (4), и в его основе лежат следующие две процедуры: 1) определение специальной функции $\psi(t) = F[X(t)]$ и 2) расчет параметров модели (3), которые обеспечивают определенную адекватность моделей (1) и (3) объекта управления и, как следствие этого, высокое быстродействие синтезируемых систем, имеющих управление следующей структуры:

$$u(t) = -U_m \text{sign}\{F[X(t)]\}. \quad (5)$$

Данная структура получена из управления (4) при замене $\psi(t) \rightarrow F[X(t)]$ и не противоречит структуре оптимального управления (2). Поэтому основная задача (задача исследования) работы состоит в выработке и обосновании рациональных вариантов (методик) определения функции $\psi(t) = F[X(t)]$, обеспечивающих хорошее приближение управлений структуры (5) к строго оптимальным по быстродействию управлениям.

Далее в работе, ограничившись анализом линейных функций $F_i[X(t)] = D_i^T X(t)$ (T — символ транспонирования вектора (матрицы)), будем исследовать две методики синтеза квазиоптимальных по быстродействию регуляторов. Эти методики различаются по типу используемой модели (3) объекта — условно адекватной и приближенно адекватной.

Методика 1 синтеза с условно адекватной моделью объекта

Предварительно отметим, что близкая в идейном плане методика использовалась в работе [16] для синтеза энергосберегающих алгоритмов управления. Модифицируем ее для решения задачи быстродействия.

С этой целью введем переменную $\psi(t)$ как линейную функцию фазовых координат объекта

$$\psi(t) = \sum_{i=1}^n d_i x_i(t) \equiv D^T X(t), \quad (6)$$

которую по аналогии с работой [13] будем называть агрегированной переменной или макропеременной. Для ее нахождения умножим уравнение (1) слева на вектор D^T :

$$D^T \dot{X}(t) = D^T A X(t) + D^T B u(t). \quad (7)$$

Для производной $\dot{\psi}(t) = D^T \dot{X}(t)$ на основе уравнения (3) записываем соотношение

$$D^T \dot{X}(t) = \alpha D^T X(t) + \beta u(t). \quad (8)$$

Для равенства производных (7) и (8) должны выполняться условия

$$D^T A = \alpha D^T, \quad \beta = D^T B. \quad (9)$$

Второе соотношение (9) однозначно определяет параметр β модели (3), если известен вектор D . Этот вектор и параметр α можно найти из первого уравнения (9), которое после транспонирования принимает вид

$$A^T D = \alpha D. \quad (10)$$

Соотношение (10) описывает известную задачу определения собственных чисел и собственных векторов матрицы A^T . Используя стандартные методы [17], найдем указанные величины и параметры модели (3):

$$\alpha = p, \quad D = \Lambda, \quad \beta = D^T B, \quad (11)$$

где p — одно из n собственных чисел (корней) матрицы A^T ; Λ — собственный вектор данной матрицы, отвечающий числу p .

Соотношения (11), определяющие параметры модели объекта (3), будем рассматривать как условия адекватности модели (3) исходной модели объекта (1). Эти условия определяют так называемую условную адекватность моделей объекта; если эти условия выполняются приближенно, то они описывают приближенную адекватность указанных моделей объекта.

На основе уравнений (5), (6) и (11) для быстродействующего управления объектом (1) предлагается использовать обратную связь

$$u(t) = -U_m \text{sign}[D^T X(t)]. \quad (12)$$

На основе результатов работы [16] отметим некоторые особенности управления (12).

1. Для исходного объекта (1) параметры закона управления (12) в общем случае определяются неоднозначно. Действительно, так как матрица размерности $n \times n$ имеет n собственных чисел (корней) и векторов, то максимальное число различных управлений (12) может достигать значения n . Вместе с тем, так как алгоритмы управления с комплексными значениями параметров (они соответствуют комплексным собственным числам матрицы A^T) не имеют физического смысла, то число приемлемых для реализации управлений (12) не превышает n .

Таким образом, здесь возникает задача выбора из конечного числа допустимых управлений одного закона управления, обеспечивающего максимальное быстродействие.

2. На траекториях движения системы управления объектом (1) с обратной связью (12) можно выделить два участка: а) активный участок движения к многообразию $\psi(X) = 0$, на котором $\psi \neq 0$ и, соответственно, $u(t) \neq 0$; б) участок пассивного движения системы по многообразию $\psi(X) = 0$ при $u(t) = 0$.

Подчеркнем, что управление (5) обеспечивает устойчивое движение СУ к многообразию $\psi(X) = 0$, оптимальное по быстродействию.

Для анализа движения системы управления по данному многообразию воспользуемся результатом работы [16], сформулированным в форме следующего **утверждения 1**: для СУ, представленной в каноническом фазовом пространстве, движение по многообразию $\psi_k(X) = 0$, отвечающему корню p_k объекта, описывается дифференциальным уравнением $(n-1)$ -го порядка

$$\sum_{j=0}^{n-1} \eta_j y^{(j)}(t) = 0, \quad y(t) = x_1(t), \quad (13)$$

коэффициенты которого определяются корнями $(p_1, p_2, \dots, p_{k-1}, p_{k+1}, \dots, p_n) = (q_1, q_2, q_3, \dots, q_{n-1})$ по формулам Виета:

$$\begin{aligned} \eta_{n-1} &= 1, \quad \eta_{n-2} = -\sum_{i=1}^{n-1} q_i, \quad \eta_{n-3} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n-1} q_i q_j, \\ \eta_{n-4} &= -\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n-1} q_i q_j q_k, \dots, \\ \eta_0 &= (-1)^{n-1} q_1 q_2 \dots q_{n-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из данного утверждения непосредственно следует, что движение СУ по многообразию $\psi(X) = 0$, описываемое уравнением (13), будет устойчивым, если его корни $(q_1, q_2, q_3, \dots, q_{n-1})$ имеют отрицательную вещественную часть. На

этом основании и с учетом того, что невырожденное линейное преобразование фазовых координат объекта (1), используемое при переходе к каноническому вектору состояния объекта, не изменяет его корни [17], приходим к **утверждению 2**: система управления объектом (1) с обратной связью (12) имеет устойчивое движение с максимальным быстродействием в случаях:

а) асимптотической устойчивости исходного объекта управления (1), причем среди его корней существует один вещественный корень p , который выбирается в качестве значения параметра $\alpha = p$ модели (3);

б) асимптотической устойчивости исходного объекта управления с несколькими вещественными корнями; в этом случае вещественный корень p , значение которого по модулю является максимальным, задает быстродействующее управление и определяет параметр $\alpha = p$ модели (3);

в) неустойчивого объекта, если последний имеет только один положительный вещественный корень p , который и определяет параметр $\alpha = p$ модели (3).

Вторая и третья части утверждения требуют пояснений. Выбирая неустойчивый корень в качестве параметра модели (3), во-первых, мы исключаем этот корень из множества корней дифференциального уравнения (13), и это гарантирует устойчивость движения системы управления по многообразию $\psi(X) = 0$. Однако в этом случае модель (3) оказывается неустойчивой, но для нее управление (5) при достаточно большом значении величины U_m обеспечивает устойчивое приближение к многообразию из начального состояния $\psi(X_0) = \psi_0$, принадлежащего ограниченной, приемлемо широкой области $|\psi_0| < \psi_m = \beta U_m / |\alpha|$. Таким образом, для указанного неустойчивого объекта задача выбора корня α и, соответственно, собственного вектора D , определяющего многообразие $\psi(X) = 0$ и далее закон управления, решается однозначно из условия обеспечения устойчивости синтезируемой СУ. Если же исходный объект устойчив, то указанная задача выбора корня α и, соответственно, собственного вектора D , определяющего это многообразие, исключать наименьший по модулю веще-

ственный корень, т. е. исключить наибольшую постоянную времени системы $T_{\max} = 1/p_{\min}$, и соответственно положить $\alpha = p_{\min}$.

Подытоживая вышесказанное, отметим, что для синтеза приближенно оптимальных по быстродействию систем управления объектами высокого порядка можно предложить следующую **методику 1**, включающую выполнение следующих процедур:

1. Используя, например, стандартную программу *eigenvals(A)* математической системы MathCAD, определяем все собственные числа (корни) p_i , $i = 1, 2, \dots, n$, матрицы A^T объекта (1).

2. В соответствии с утверждением 2 выбираем из них одно собственное число p , определяющее искомое быстродействующее управление объектом (1).

3. Вычисляем собственный вектор Λ матрицы A^T , соответствующий ее собственному числу p , который согласно соотношению $D = \Lambda$ определяет искомое быстродействующее управление (12).

Исследуем особенности предложенной методики на примере синтеза системы управления объектом третьего порядка.

Пример 1. Применим методику 1 к решению задачи оптимального по быстродействию управления объектом

$$\gamma T^2 \ddot{x}_1(t) + (1 + \gamma)T \dot{x}_1(t) + x_1(t) = ku(t), \quad (15)$$

$$|u(t)| \leq U_m$$

с параметрами $T > 0$, $k > 0$, $0 < \gamma < 1$, $U_m = 1$. Выбор этого объекта связан с тем, что для него известно оптимальное по быстродействию управление [18]:

$$u(t) = -U_m \text{sign}[\sigma[X(t)]]; \quad \sigma(X) = \gamma^2 \frac{x_3 - x_{1k}}{k} -$$

$$\left[\ln \left| 1 - \gamma \left[(1 - \gamma)x_1 + \gamma x_2 - x_3 \right] \frac{\text{sign} W}{k} \right| - \right. \\ \left. - \ln \left| 2 \left(1 + \sqrt{1 - [1 + (\gamma/k)(x_2 - x_3)\text{sign} W] \times} \right)^\gamma \times \exp(-(\gamma/k)(x_3 - x_{1k})\text{sign} W) \right| \right] - \\ \left. - \left(1 + \sqrt{1 - [1 + (\gamma/k)(x_2 - x_3)\text{sign} W] \times} \right)^{2\gamma} \times \exp(-(\gamma/k)(x_3 - x_{1k})\text{sign} W) \right| \right], \quad (16)$$

где

$$W = \{1 - [1 - (\gamma/k)(x_2 - x_3)\text{sign}(x_3 - x_{1k})] \times \\ \times \exp(-(\gamma/k)(x_3 - x_{1k}))\} \text{sign}(x_3 - x_{1k}),$$

x_{1k} — конечное значение первой фазовой координаты объекта, при этом предполагается $x_{2k} = x_{3k} = 0$. Управление (16) записано с использованием следующих фазовых координат объекта (15):

$$x_2(t) = T\dot{x}_1(t) + x_1(t), \quad x_3(t) = \gamma T\dot{x}_2(t) + x_2(t).$$

Знание закона управления (16) позволяет оценить степень приближения к нему синтезируемых приближенных алгоритмов управления.

При применении методики 1 объект (15) удобнее описывать в каноническом пространстве ($x_2(t) = \dot{x}_1(t)$, $x_3(t) = \dot{x}_2(t)$) в виде матричного уравнения

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t),$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где

$$a_2 = -\frac{1}{\gamma T^2}, \quad a_3 = -\frac{1 + \gamma}{\gamma T}, \quad b_3 = \frac{k}{\gamma T^2}.$$

Первую процедуру методики синтеза для объекта (17) можно выполнить аналитически. Действительно, для него уравнение (10) принимает вид

$$\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 1 & -p & a_2 \\ 0 & 1 & a_3 - p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Матричное уравнение (18) будет иметь ненулевое решение, если его определитель равен нулю:

$$p(p^2 - a_3 p - a_2) = 0.$$

Это характеристическое уравнение объекта управления имеет три корня

$$p_1 = 0, \quad p_{2,3} = \frac{a_3}{2} \pm \sqrt{\frac{a_3^2}{4} + a_2} = \\ = -\frac{1 + \gamma}{2\gamma T} \pm \sqrt{\frac{(1 + \gamma)^2}{4(\gamma T)^2} - \frac{1}{\gamma T^2}}$$

— один неустойчивый (нулевой) и два устойчивых.

Выполняя вторую процедуру методики, в соответствии с утверждением 2 полагаем $\alpha = p_1 = 0$.

Согласно третьей процедуре методики определяем для собственного числа матрицы $p_1 = 0$ соответствующий ему собственный вектор D , компоненты которого удовлетворяют системе уравнений (18) при $p = p_1 = 0$. Она имеет решение

$$d_1 = -a_2 d_3, \quad d_2 = -a_3 d_3. \quad (19)$$

Для простоты в решении (19) полагаем свободный параметр равным $d_3 = 1$. В этом случае искомое управление (12) принимает форму

$$\begin{aligned} u(t) &= -U_m \text{sign}[d_1 x_1(t) + d_2 x_2(t) + d_3 x_3(t)] = \\ &= -U_m \text{sign}[-a_2 x_1(t) - a_3 x_2(t) + x_3(t)] = \\ &= -U_m \text{sign} \left[\frac{1}{\gamma T^2} x_1(t) + \frac{1+\gamma}{\gamma T} x_2(t) + x_3(t) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Замечание. Для объекта (15), который имеет один неустойчивый нулевой корень, управление (20) может быть получено более простым способом. Для этого объект (15) с учетом определения канонического вектора состояния записываем в форме

$$\gamma T^2 \dot{x}_3(t) + (1 + \gamma) T \dot{x}_2(t) + \dot{x}_1(t) = ku(t),$$

или

$$\frac{d}{dt} [\gamma T^2 x_3(t) + (1 + \gamma) T x_2(t) + x_1(t)] = ku(t). \quad (21)$$

Из соотношения (21) непосредственно следует модель объекта первого порядка $\dot{\psi}(t) = \beta u(t)$ с макропеременной

$$\psi(t) = \gamma T^2 x_3(t) + (1 + \gamma) T x_2(t) + x_1(t)$$

и быстродействующее управление $u(t) = -U_m \text{sign}[\psi(t)]$. Это управление на основе тождества $\text{sign}[ax(t)] = \text{sign}[x(t)]$ при $a = \gamma T^2 > 0$ совпадает с алгоритмом управления (20).

Результат, указанный в замечании, легко распространяется на аналогичные объекты высокого порядка, движение которых описывается дифференциальным уравнением вида

$$\begin{aligned} a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + \\ + a_2 x^{(2)}(t) + a_1 x^{(1)}(t) = ku(t) \end{aligned} \quad (22)$$

со значениями коэффициентов $a_0 = 0$, $a_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, которые образуют гурвицев полином

$$a(s) = a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \dots + a_2 s + a_1.$$

Для объектов (22) в результате аналогичных преобразований получаем, что быстродействующее управление определяется выражением

$$u(t) = -U_m \text{sign}[\psi(t)] = -U_m \text{sign}[a_n x_n(t) + a_{n-1} x_{n-1}(t) + \dots + a_2 x_2(t) + a_1 x_1(t)]. \quad (23)$$

Таким образом, для объектов (22) методика 1 синтеза быстродействующих систем управления описывается одной формулой (23).

Результаты сравнительного моделирования предложенных быстродействующих алгоритмов управления представляются в следующем разделе.

Методика 2 синтеза с приближенно адекватной моделью объекта

Предложенная методика 1 синтеза имеет существенный недостаток — она применима далеко не ко всем линейным объектам управления, так как обеспечивает устойчивость системы регулирования только для объектов, выделенных в утверждении 2. В соответствии с данным утверждением подчеркнем, что методика 1 синтеза неприменима к исследуемому объекту, если все его собственные числа являются комплексными или два или более его корней являются неустойчивыми (имеют положительные вещественные части).

В целях расширения класса рассматриваемых объектов отметим следующую особенность методики 1: параметры α , β условно адекватной модели (3) были точно найдены в процессе решения задачи определения собственных чисел и собственных векторов матрицы A^T исходного объекта, но они, однако, не используются в предлагаемом управлении (12). Отсюда вытекает, что эти параметры можно определять из других условий и соотношений. Например, задавшись желаемым вектором D , который обеспечивает устойчивость и высокое быстродействие синтезируемой системы, рассчитываем их приближенно путем решения переопределенной системы линейных уравнений (9) методом наименьших квадратов [17]:

$$\alpha = \frac{D^T A^T D}{D^T D}, \quad \beta = D^T B. \quad (24)$$

Эти значения параметров, в отличие от предыдущей методики, обеспечивают только приближенную адекватность модели (3) исходному объекту.

Данный способ определения параметров α , β и управления (12), как показывает последующий анализ, имеет следующие преимущества. Во-первых, легко решается задача устойчивости синтезируемой системы для любого линейного объекта (1), описываемого в каноническом фазовом пространстве: согласно утверждению 1 достаточно выбрать компоненты вектора D равными положительным коэффициентам гурвица полинома $G(s)$ степени $(n - 1)$.

Во-вторых, для этих объектов относительно просто решается проблема повышения быстродействия системы с управлением (12), которая достаточно продолжительное время движется в скользящем режиме вдоль многообразия $\psi(X) = 0$. В этом режиме релейная система эквивалентна линейной системе регулирования с передаточной функцией $W(s) = 1/G(s)$ [9]. На этом основании в соответствии с результатами работы [19] можно рекомендовать выбирать компоненты вектора D равными коэффициентам модифицированного полинома Баттерворса n -го порядка. Этот полином обеспечивает линейной динамической системе максимальное быстродействие в классе систем с комплексными корнями. Для данных нормированных полиномов $G(q)$ порядка $n = 2, \dots, 6$

$$G(q) = \prod_{i=1}^n (q + p_i) = q^n + g_{n-1}q^{n-1} + g_{n-2}q^{n-2} + \dots + g_1q + 1 \quad (25)$$

в Приложении (см. таблицу) даны значения коэффициентов g_i и корней p_i , $i = 1, 2, \dots, n$, при которых динамические системы с передаточной функцией $W_0(q) = 1/G(q)$ имеют перерегулирование, равное $\sigma_z = 4,321\%$. В таблице указаны также значения относительного (нормированного) времени регулирования τ_p этих систем, которое определялось с использованием "трубки" $\Delta = \sigma_z = 4,321\%$.

Напомним, что нормированной передаточной функцией (ПФ), или передаточной функцией в форме Вышнеградского, называется ПФ, у которой в знаменателе свободный член a_n и коэффициент a_0 при старшей степени равны единице [20]. Произвольная ПФ $W(s)$ системы может быть преобразована в нормированную $W(q)$ заменой переменной Лапласа s новой переменной $q = \alpha s$ $\alpha = \sqrt[n]{a_0/a_n}$. Между свойствами систем с передаточными функциями $W(s)$ и $W(q)$ существует тесная связь [20]: характер их переходных процессов совпадает, т. е. для

процессов одинаковы монотонность, аperiodичность, перерегулирование, показатели точности в установившемся режиме. Исключение составляет только длительность переходных процессов данных систем — время регулирования t_p системы $W(s)$ и время регулирования τ_p системы $W(q)$ связаны соотношением

$$\mu = t_p/\tau_p. \quad (26)$$

В данной методике синтеза естественно принять $t_p = t_{opt}$, где t_{opt} — время регулирования оптимальной по быстродействию системы, которое предполагается известным на том основании, что его можно оценить в результате расчета оптимального программного управления по стандартной методике. Используя известный коэффициент преобразования (26) и данные таблицы, рассчитываем коэффициенты ненормированного модифицированного полинома Баттерворса, которые в свою очередь определяют составляющие вектора

$$D = (1 \quad g_1\mu \quad g_2\mu^2 \quad g_{n-1}\mu^{n-1}). \quad (27)$$

Таким образом, в методике 2 при конструировании быстродействующих систем управления линейными объектами (1), описываемых в каноническом фазовом пространстве, предлагается использовать алгоритм управления (12), имеющий с учетом (27) вид

$$u(t) = -U_m \text{sign}[g_{n-1}\mu^{n-1}x_n(t) + g_{n-2}\mu^{n-2}x_{n-1}(t) + \dots + g_1\mu x_2(t) + x_1(t)]. \quad (28)$$

В нем параметр μ в первом приближении рассчитывается по формуле (26) и в дальнейшем уточняется в процессе моделирования системы из условия ее максимального быстродействия при допустимом значении перерегулирования.

Если описание объекта (1) представлено с использованием неканонического вектора состояния, то предлагается предварительно осуществить линейное преобразование фазовых координат объекта $X(t) = CZ(t)$ с невырожденной матрицей C , при которой описание объекта принимает каноническую форму Фробениуса (C определяется известными способами [2, 19]). С использованием полученного решения (27), (28) и матрицы C^{-1} искомое управление объектом (1) с неканоническим вектором состояния определяется выражением

$$u(t) = -U_m \text{sign}[D^T C^{-1} X(t)]. \quad (29)$$

Соответственно, для объектов (1) общего вида методика 2 синтеза быстродействующих систем управления описывается формулами (27), (29).

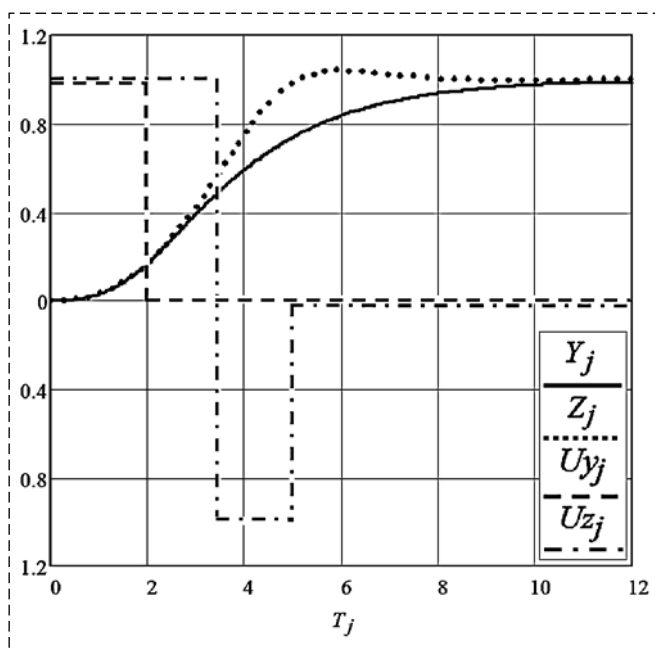
Пример 2 (продолжение примера 1). Применим методику 2 к синтезу быстродействующей системы управления объектом (17).

Для этого объекта управление (28) принимает форму

$$u(t) = -U_m \text{sign}[g_2 \mu^2 x_3(t) + g_1 \mu x_2(t) + x_1(t)]. \quad (30)$$

Результаты моделирования систем управления объектом (17), имеющим параметры $T = 2$, $\gamma = 0,5$, $k = 1$, $U_m = 1$, с алгоритмами управления (20) и (30) представлены на рисунке. Необходимо отметить, что при моделировании систем использовался релейный элемент с небольшой зоной нечувствительности 0,001.

На рисунке приняты следующие обозначения: компоненты вектора Y_j равны значениям фазовой координаты $x_1(t)$ в дискретные моменты времени $T_j = \Delta T j$, $\Delta T = 0,012$ с, $j = 0, 1, \dots, 1000$, системы с алгоритмом управления (20), значения которого в те же моменты времени обозначены как компоненты вектора U_{y_j} ; соответственно, компоненты векторов Z_j , U_{z_j} отвечают аналогичным значениям фазовой координаты и управляющего сигнала системы с алгоритмом управления (30).



Переходные процессы систем с алгоритмами управления (20) и (30)
Transient processes of systems with control algorithms (20) and (30)

В управлении (30) значение параметра μ уточнено при моделировании до значения $\mu = 0,8$ исходя из его начального значения, рассчитанного по формуле (26): $\mu = t_p / \tau_p = 4,412 / 2,9744 = 1,483$.

Графики на рисунке описывают обработку системами единичного командного сигнала (уставки) при нулевых начальных условиях объекта. Для сравнения укажем, что строго оптимальная система управления при указанных условиях имеет следующие моменты переключения управляющего сигнала: $t_1 = 2,188$, $t_2 = 3,864$, $t_3 = 4,412$ (ее графики не показаны, чтобы не перегружать рисунок). Отметим, что время переходного процесса $t_p = 4,82$ системы с управлением (30), определяемое с использованием "трубки" $\Delta = 4,321$ %, в отличие от системы с управлением (20) ($t_p = 8,67$) достаточно близко к моменту $t_3 = 4,412$ строго оптимальной системы управления. Большое значение времени регулирования системы с управлением (20) объясняется тем, что в ней при обработке начального отклонения наблюдается один интервал с максимальным значением управления ($+U_m$ или $-U_m$), а далее система продолжительное время движется при нулевом управляющем сигнале.

Подчеркнем, что указанный вид сигнала управления системы с законом обратной связи (20) характерен для всех СУ, синтезированных с использованием методики 1. **Утверждение 3:** при обработке постоянного задания системой, функционирующей по алгоритму управления (6), (11), (12), управляющий сигнал имеет следующий характерный вид: от начального момента времени до некоторого момента t_1 он имеет максимальное по модулю значение U_m , а в момент переключения t_1 принимает нулевое значение, которое сохраняет до конца переходного процесса.

Это утверждение непосредственно следует из факта, что функция переключения управления (6), (11), (12) точно описывается дифференциальным уравнением (3) при $u(t) = U = \pm U_m$. Решение этого дифференциального уравнения первого порядка имеет вид $\psi(t) = e^{\alpha t} \psi(0) + \beta(1 - e^{\alpha t})U$. Эта экспоненциальная функция, как известно [3, 15], принимает нулевое значение только в единственный момент времени, что и доказывает утверждение 3.

В работе [16] это свойство алгоритмов управления структуры (6), (11), (12) используется при синтезе энергосберегающих систем.

Выводы

1. Предложен подход к синтезу приближенно оптимальных по быстродействию алгоритмов управления линейными объектами высокого порядка, основанный на использовании известных оптимальных алгоритмов управления объектами первого и второго порядков. Он предполагает разработку способов (методик) преобразования модели объекта высокого порядка к моделям низкого порядков.

2. В системе управления, синтезированной с применением методики 1, при отработке начального отклонения наблюдается один интервал с максимальным значением управления ($+U_m$ или $-U_m$), а далее система продолжительное время движется при нулевом сигнале управления до окончания переходных процессов. Поэтому такие системы рекомендуется применять в случаях, когда желательно дополнительно получить экономию энергии управляющего сигнала.

3. Как показывает моделирование, в системах управления, синтезированных с использованием методики 2, время переходных процессов может отличаться от времени регулирования оптимальной системы приблизительно до 10 %. Так как при этом алгоритмы управления имеют простую структуру (используются только релейный элемент и линейные обратные связи), то методика синтеза рекомендуется к применению.

4. Предложенный подход к синтезу квазиоптимальных регуляторов можно применять при оценке качества управления другими разнообразными функционалами, в частности, кри-

териум энергосбережения, комбинированным критерием энергосбережения—быстродействия.

Приложение. Модифицированные полиномы и фильтры Баттерворса

Согласно работе [19] модифицированные фильтры Баттерворса имеют передаточную функцию

$$W_0(q) = 1 / G(q) = 1 / (q^n + g_{N-1}q^{n-1} + g_{N-2}q^{n-2} + \dots + g_1q + 1) \quad (\text{П-1})$$

определяемую модифицированным полиномом Баттерворса $G(q)$, удовлетворяющим соотношению

$$G(q)G(-q) = (-1)^n q^{2n} - aq^2 + 1. \quad (\text{П-2})$$

Результаты факторизации полинома (П-2) при значениях $n = 2, \dots, 6$ представлены в таблице с указанием значений параметра a , при котором динамическая система (П-1) имеет заданное перерегулирование, равное $\sigma_z = 4,321 \%$. Отметим, что факторизацией полинома (П-2) при $a = 0$ находятся стандартные полиномы Баттерворса, при этом фильтр Баттерворса второго порядка имеет значение перерегулирования 4,321 %, которое принято за заданное (желаемое) перерегулирование рассматриваемых динамических систем.

В данной таблице параметры T_i, ζ_i соответствуют постоянным времени и коэффициентам демпфирования элементарных, последователь-

Параметры и показатели систем с ПФ $W_0(q)$
Parameters and indicators of systems with the NTFS $W_0(q)$

n	a	Коэффициенты $G(q)$	Корни $G(q)$	T_i	ζ_i	τ_p
2	0	$g_1 = \sqrt{2}$	$p_{1,2} = -\sqrt{2}/2 \pm \sqrt{2}/2 i$	1	$\zeta_1 = \sqrt{2}/2 = 0,707107$	2,9744
3	0,4760	$g_1 = 2,150236$ $g_2 = 2,073758$	$p_1 = -0,918078$ $p_{2,3} = -0,57784 \pm 0,869099i$	$T_1 = 1,089232$ $T_2 = 0,958164$	$\zeta_1 = 1$ $\zeta_2 = 0,553665$	3,8124
4	0,79572	$g_1 = 2,850881$ $g_2 = 3,665902$ $g_3 = 2,707730$	$p_{1,2} = -0,461477 \pm 0,966015i$ $p_{3,4} = -0,892388 \pm 0,275923i$	$T_1 = 0,9340713$ $T_2 = 1,070582$	$\zeta_1 = 0,431054$ $\zeta_2 = 0,955374$	4,5736
5	1,06233	$g_1 = 3,541902$ $g_2 = 5,741368$ $g_3 = 5,598041$ $g_4 = 3,346055$	$p_1 = -0,858401$ $p_{2,3} = -0,372580 \pm 1,010266i$ $p_{4,5} = -0,871247 \pm 0,495656i$	$T_1 = 1,164957$ $T_2 = 0,928695$ $T_3 = 0,997635$	$\zeta_1 = 1$ $\zeta_2 = 0,346013$ $\zeta_3 = 0,869187$	5,3220
6	1,29958	$g_1 = 4,227217$ $g_2 = 8,284891$ $g_3 = 9,99870$ $g_4 = 7,946964$ $g_5 = 3,986719$	$p_{1,2} = -0,887857 \pm 0,114812i$ $p_{3,4} = -0,796768 \pm 0,665763i$ $p_{5,6} = -0,308735 \pm 1,030546i$	$T_1 = 1,117007$ $T_2 = 0,963107$ $T_3 = 0,929542$	$\zeta_1 = 0,991742$ $\zeta_2 = 0,767373$ $\zeta_3 = 0,286982$	6,0633

но соединенных звеньев апериодического и колебательного характера, которые можно выделить в системе с передаточной функцией $W_0(q)$.

Подчеркнем, что передаточная функция $W_0(q)$, полученная указанным способом, описывает динамическую систему, которая имеет минимальное относительное время переходных процессов τ_p при заданном значении перерегулирования $\sigma_z = 4,321\%$, причем время τ_p определяется с использованием "трубки" $\Delta = \sigma_z = 4,321\%$.

Список литературы

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматлит, 1961. 302 с.
2. Athans M., Falb P. L. Optimal Control, An Introduction to the Theory and Its Applications. New York: McGraw-Hill, 1966.
3. Иванов В. А., Фалдин Н. В. Теория оптимальных систем автоматического управления. М.: Наука, 1981. 336 с.
4. Ключев А. С., Колесников А. А. Оптимизация автоматических систем управления по быстродействию. М.: Энергоиздат, 1982. 240 с.
5. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. Гибридная схема решения задачи линейного быстродействия на основе формализма полиэдральной оптимизации // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 7. С. 3–9.
6. Каюмов О. Р. Глобально управляемые механические системы. М.: Физматлит, 2007. 168 с.
7. Weinberg L. Network Analysis and Synthesis. New York: McGraw-Hill, 1962.
8. Ловчаков В. И. Функции переключения оптимального по быстродействию регулятора для четырехкратного интегратора // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 9. С. 3–6.
9. Сурков В. В., Сухинин Б. В., Ловчаков В. И., Соловьев А. Э. Аналитическое конструирование оптимальных

регуляторов по критериям точности, быстродействию, энергосбережению. Тула: Изд-во ТулГУ, 2005. 300 с.

10. Нейдорф Р. А. Эффективная аппроксимация кусочных функций в задачах квазиоптимального по быстродействию управления // Сб. трудов междунар. науч. конф. "Математические методы в технике и технологиях ММТТ—2000". СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2000. № 2. С. 18–22.

11. Нейдорф Р. А. Рекуррентно—диффеоморфный синтез квазиоптимальных по быстродействию ограниченных законов управления // Информатика и системы управления. 2006. № 2. С. 119–128.

12. Крючков В. В., Козлов Д. В., Шопин А. С. Аппроксимация поверхности переключения релейного регулятора с использованием уравнения в частных производных и нейросетей // Известия ТулГУ. Технические науки. 2010. № 1. С. 198–205.

13. Колесников А. А. Основы теории синергетического управления. М.: Фирма "Испо-Сервис", 2000. 264 с.

14. Dorf R. C., Bishop R. H. Modern Control Systems, Tenth Edition, Pearson Prentice Hall, 2005.

15. Пупков К. А. Методы классической и современной теории автоматического управления. Т. 2: Синтез регуляторов и теория оптимизации систем автоматического управления. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. 736 с.

16. Ловчаков В. И., Ловчаков Е. В., Сухинин Б. В. Энергосберегающие управления электротехническими объектами. // Повышение эффективности электрического хозяйства в условиях ресурсных ограничений: Материалы XXXIX Всеросс. науч.-практ. конф. с международ. участием. Т. 2. Электрооборудование и менеджмент. 2009. С. 97–108.

17. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с.

18. Техническая кибернетика. Теория автоматического управления. Книга 3. Часть II. / Под ред. В. В. Солодовникова. М.: Машиностроение, 1969. 368 с.

19. Ловчаков В. И. Синтез линейных систем управления с максимальным быстродействием и заданным перерегулированием // Мехатроника, автоматизация, управление. 2020. Т. 21, № 9. С. 499–510.

20. Ким Д. П. Алгебраические методы синтеза САУ. М.: Физматлит, 2014. 164 с.

Analytical Synthesis of Quasi-Optimal Regulators for Linear Objects Based on Conditionally Adequate Low-Order Models. Part 1

V. I. Lovchakov, lovvi50@mail.ru,
Tula State University, Tula, 300600, Russian Federation

Corresponding author: Lovchakov Vladimir I., Full Professor, Tula State University, Department of Electrical Engineering and Electrical Equipment, Tula, 300600, Russian Federation e-mail: lovvi50@mail.ru

Accepted on November 3, 2022

Abstract

The complexity of solving the problem of synthesizing closed-loop control systems that are optimal in terms of rapid response multiply, rapidly increases with increasing order n of the control object — the well-known problem of the "curse of dimension" by R. Bellman. Therefore, for high-order linear objects ($n \geq 4$), exact, analytical control algorithms by the rapid response criterion are practically unknown, and for them approximate rapid response control laws are applied. The paper proposes an approach and, on its basis, develops analytical techniques for the synthesis of rapid response high-order systems, which use the idea of transforming the original performance problem to a similar control problem for objects of the first or second order, for which the optimal control algorithms are known. These algorithms underlie the proposed approach to the synthesis of rapid response control systems, which involves finding special functions describing the relationship between the phase coordinates of models of a low-order object (by analogy with the works of A. A. Kolesnikov, they are called aggregated or macrovariables) with the phase coordinates of the original high-order object, as well as the calculation of the parameters of the low-order models used, which provide, in a certain sense, their adequacy to the original object and, accordingly, the rapid response of the synthesized systems. The work distinguishes between the conditional and ap-

proximate adequacy of the models of the control object. In the case of conditional adequacy, the parameters of low-order models are found exactly using the eigenvalues and vectors of the original object, and with approximate adequacy, using the least squares method. In the first part of the work, two first-order models (conditionally and approximately adequate) are used, on the basis of which two methods of synthesis of rapid response controllers are developed. In the form of statements 1 and 2, the conditions for the applicability of these techniques are formulated. Accordingly, the main content of the first part of the work is devoted to the results of a comparative analysis of the properties of rapid response controllers obtained by using the proposed synthesis techniques. In the second part of the work, it is proposed to carry out a similar analysis of rapid response control systems synthesized using conditionally and approximately adequate models of a second-order object.

Keywords: linear control object, overshoot, rapid response, relay controller, analytical system design, Butterworth filters

For citation:

Lovchakov V. I. Analytical Synthesis of Quasi-Optimal Regulators for Linear Objects Based on Conditionally Adequate Low-Order Models. Part 1, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 2, pp. 68–78.

DOI: 10.17587/mau.23.68-78

References

1. **Pontriagin L. S., Boltianskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F.** Mathematical theory of optimal processes, Moscow, Fizmatlit, 1961, 302 p (in Russian).
2. **Athans M., Falb P. L.** Optimal Control, An Introduction to the Theory and Its Applications, McGraw-Hill, New York, 1966.
3. **Ivanov V. A., Faldin N. V.** The theory of optimal control systems, Moscow, Nauka, 1981, 336 p (in Russian).
4. **Kliuev A. S., Kolesnikov A. A.** The optimization of control systems by time-optimality, Moscow, Energoizdat, 1982, 240 p (in Russian).
5. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** The hybrid scheme of the task solution of linear time-optimality based on the formalism of the polyhedral optimization, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2014, no. 7, pp. 3–9 (in Russian).
6. **Kayumov O. R.** Globally controlled mechanical systems, Moscow, Fizmatlit, 2007, 168 p (in Russian).
7. **Weinberg L.** Network Analysis and Synthesis, New York, McGraw-Hill, 1962.
8. **Lovchakov V. I.** The functions of switching optimal time-optimality controller for the quadruple integrator, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2014, no. 9, pp. 3–5 (in Russian).
9. **Surkov V. V., Suhinin B. V., Lovchakov V. I., Solov'ev A. Je.** Analytical design of optimal controllers according to the criteria of accuracy, speed, energy saving, Tula, Publishing house of TulGU, 2005, 300 p. (in Russian).
10. **Nejdorf R. A.** Effective approximation of piecewise functions in problems of quasi-optimal control in terms of speed, *Sb. trudov mezhdunar. nauch. konf. "Matematicheskie metody v tekhnike i tekhnologijah MMTT–2000"*, 2000, no. 2, pp. 18–22 (in Russian).
11. **Nejdorf R. A., Chan N. N.** Recurrent-diffeomorphic synthesis of bounded control laws that are quasi-optimal in speed, *Informatika i Sistemy Upravleniya*, 2006, no. 2, pp. 119–128 (in Russian).
12. **Krjuchkov V. V., Kozlov D. V., Shopin A. S.** Approximation of the switching surface of a relay controller using partial differential equations and neural networks, *Izvestiya TulGU. Tehnicheskie nauki*, 2010, no. 1, pp. 198–205 (in Russian).
13. **Kolesnikov A. A.** Fundamentals of the theory of synergetic control, Moscow, Firma "Ispo-Servis", 2000, 264 p (in Russian).
14. **Dorf R. C., Bishop R. H.** Modern Control Systems, Pearson Prentice Hall, 2005.
15. **Pupkov K. A.** Methods of classical and modern control theory: 3 volumes, Moscow, MGTU im. N. E. Baumana, 2000 (in Russian).
16. **Lovchakov V. I., Lovchakov E. V., Suhinin B. V.** Energy-saving control of electrical facilities object, *Povyshenie jeffektivnosti jelektricheskogo hozjajstva v uslovijah resursnyh ogranichenij: Materialy XXXIX Vseros. nauch.-prak. konf. s mezhdunarod. uchastiem, T.2. Jelektrooborudovanie i menedzhment*, Moscow, Tehnetika, 2009, vol. 2, pp. 97–108 (in Russian).
17. **Korn G., Korn T.** A guide to mathematics for scientists and engineers, Moscow, Nauka, 1974, 832 p (in Russian).
18. **Solodovnikov V. V. ed.** Technical cybernetic. Theory of automatic control. Book 3. Part II. Theory of nonstationary, non-linear, self-tuning systems of automatic control, Moscow, Mashinostroenie, 1969, 368 p (in Russian).
19. **Lovchakov V. I.** Synthesis of linear control systems with maximum speed and given overshoot, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, no. 9, pp. 499–510 (in Russian).
20. **Kim D. P.** Algebraic methods for the synthesis of ACS, Moscow, Fizmatlit, 2014, 164 p. (in Russian).

15–18 марта 2022 г.



XXIII конференция молодых ученых "НАВИГАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ"

Санкт-Петербург, Россия



В формат конференции включаются обзорные лекции ведущих ученых в области теории и практики построения современных систем навигации и управления движением и доклады участников конференции.

Контактная информация:

Тел.: +7 (812) 499 82 10 +7 (812) 499 81 57
Факс: +7 (812) 232 33 76 E-mail: icins@eprlib.ru