

С. П. Ковалёв, д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотр., kovalyov@sibnet.ru,  
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва

## Проектирование гетерогенных киберфизических систем с применением теории категорий

*Гетерогенные киберфизические системы управления на основе цифровых двойников востребованы Индустрией 4.0. В соответствии с современной методологией системной инженерии такие системы проектируются на уровне цифровых моделей. В статье предложены подходы к формализации и последующей автоматизации решения задач их проектирования в прямой и обратной постановке. В целях унифицированного описания разнородных составных частей применяется подход к проектированию в разрезе точек зрения на систему, соответствующий международному стандарту ISO/IEC/IEEE 42010. Следуя современным тенденциям, в качестве математического аппарата для формального описания и решения задач проектирования используется теория категорий — раздел высшей алгебры, направленный на унифицированное представление объектов различной природы и взаимосвязей между ними. Пространство проектирования гетерогенных киберфизических систем строится как подкатегория в категории мультизаятой, объекты которой описывают возможные архитектуры систем с заданной схемой структурной иерархии, представленные с той или иной точки зрения в виде диаграмм, а морфизмы отвечают действиям по подбору и замене составных частей. Категорию мультизаятой можно построить с помощью универсальных конструкций произведения, экспоненты и декартова квадрата, что позволяет установить ряд ее свойств. Прямые задачи проектирования заключаются в оценке свойств системы как целого по архитектуре и решаются с помощью универсальной теоретико-категорной конструкции копредела диаграммы. Решение обратных задач, требующих найти для системы варианты архитектуры, (суб-, Парето-) оптимальные по критериям потребительского качества, состоит в реконструкции диаграмм по ребрам их копределов. Описаны на языке теории категорий и проиллюстрированы типовые приемы сборки киберфизических систем, такие как модульная компоновка и аспектное связывание. В качестве примера приведено проектирование энергоэффективных роботизированных производственных линий, представленных с точки зрения поведения в виде дискретно-событийных имитационных моделей.*

**Ключевые слова:** киберфизическая система, порождающее проектирование, автоматическое производство, архитектурное представление, теория категорий, копредел, категория мультизаятой

Техническая система называется киберфизической, если она интегрирует физический мир действий над материальными объектами и цифровой мир моделирования и управления [1]. Киберфизические системы включают в себя разнородное оборудование, оснащенное цифровыми датчиками и исполнительными механизмами, программно-аппаратное обеспечение для мониторинга и/или управления. Например, системы автоматизированного производства охватывают станки, инженерные сети, контроллеры, каналы связи, серверы, программное обеспечение и т. д. [2, 3].

В рамках парадигмы Индустрии 4.0 связующим звеном между двумя мирами выступает цифровой двойник — виртуальная модель физического оригинала, достоверно воспроизводящая и задающая его структуру, состояние и поведение в реальном времени [4, 5]. Киберфизические системы проектируются на уровне цифровых моделей в соответствии с современ-

ной методологией системной инженерии. Варианты системной архитектуры порождаются в виртуальном пространстве подбором и заменой составных частей (СЧ) на уровне моделей. Задача проектирования в прямой постановке состоит в сборке модели системы из моделей СЧ и верификации на предмет соответствия требованиям заинтересованных сторон. Очень важна и обратная постановка — поиск состава СЧ, (суб-, Парето-) оптимального с точки зрения целевых функций потребительского качества системы, таких как стоимость владения, производительность, надежность, энергоемкость. Требования к системе ограничивают пространство ее проектирования, в котором выполняется поисковая оптимизация. Технологии автоматической генерации и реализации архитектуры системы посредством такой оптимизации известны под общим названием порождающего проектирования (Generative Design) [6].

Для сложного объекта управления задачи проектирования киберфизической системы существенно усложняются ввиду разнородности моделей, вызванной различной природой СЧ [7]. Фактически, требуется виртуально воспроизвести жизненный цикл объекта на гетерогенных информационных и математических моделях. Для этого используются многочисленные инструменты: MATLAB, Simulink, Modelica, Ptolemy II и др. Однако они часто оказываются либо слишком общими по назначению и поэтому трудоемкими в применении, либо слишком частными и способными охватить лишь небольшую часть системы. Поэтому востребованы многокомпонентные инструментальные комплексы, интегрированные на основе формального семантического представления системно-инженерного знания [8].

В настоящей статье предложена формальная математическая основа для широкого класса методов автоматизации решения задач проектирования гетерогенных киберфизических систем в прямой и обратной постановках. Следуя современным тенденциям [9, 10], в целях достижения надлежащего уровня общности в качестве математического аппарата используется теория категорий — раздел высшей алгебры, направленный на унифицированное представление объектов различной природы и взаимосвязей между ними [11]. Основу приложения теории категорий к системной инженерии составляет представление структуры систем диаграммами в категориях типа "каталогов", объектами которых служат алгебраические модели СЧ всех уровней (от деталей до систем), а морфизмы описывают на языке моделей действия по сборке СЧ более высокого уровня из компонентов [12]. Сборке системы из СЧ отвечает известная универсальная алгебраическая конструкция копредела (colimit) диаграммы, представляющей структуру системы и взаимосвязи между СЧ. Решение обратных задач проектирования состоит в реконструкции диаграмм по ребрам их копределов [13]. Отметим, что существуют и другие, более частные подходы к теоретико-категорному представлению систем, например, представление схем потоков сигналов струнными диаграммами в подходящей моноидальной категории [14].

Для гетерогенных киберфизических систем нерационально размещать модели СЧ всех видов в одном общем каталоге: лучше завести отдельную категорию-каталог для каждого вида СЧ.

Архитектура такой системы формально описывается схемой деления — ориентированным графом, вершины которого размечены моделями СЧ различных видов. Однако такой граф не является корректной диаграммой с точки зрения теории категорий, поскольку в разных вершинах находятся объекты из разных категорий. Чтобы восстановить корректность, целесообразно следовать стандарту ISO/IEC/IEEE 42010:2011 (в России принят как ГОСТ Р 57100—2016 "Системная и программная инженерия. Описание архитектуры"), который рекомендует отображать схему деления в различные точки зрения на систему (architecture viewpoint). Стандарт поощряет использование различных языков и инструментов моделирования для представления архитектуры с различных точек зрения, однако требует единообразно описывать все СЧ в рамках любой фиксированной точки зрения. Поэтому при выборе некоторой точки зрения архитектура системы приобретает корректную теоретико-категорную диаграммную семантику. Пространство проектирования, описывающее варианты архитектуры в разрезе точек зрения, строится на базе конструкции категории мультизапятой (multicomma) [15].

### Приложения теории категорий в системной инженерии

Напомним, что категория  $C$  — это класс абстрактных объектов  $Ob C$ , попарно связанных множествами морфизмов (абстрактных аналогов отображений): каждый морфизм  $f$  имеет область  $dom f \in Ob C$  и кообласть  $codom f \in Ob C$ . Соотношения вида  $dom f = A$  и  $codom f = B$  наглядно записываются в форме стрелки  $f: A \rightarrow B$ . Для любой пары морфизмов  $f, g$ , такой что  $codom f = dom g$ , определена композиция — морфизм  $g \circ f: dom f \rightarrow codom g$ . Композиция ассоциативна: для любой тройки морфизмов  $f, g, h$ , если  $codom f = dom g$  и  $codom g = dom h$ , то  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ . Наконец, любой объект  $A$  обладает тождественным морфизмом  $1_A: A \rightarrow A$ , таким что для любого морфизма  $f: A \rightarrow B$  выполняется соотношение  $f \circ 1_A = 1_B \circ f = f$ . Заметим, что аксиомы категории устойчивы относительно обращения направления всех стрелок: таким обращением категория  $C$  превращается в категорию, которая называется двойственной к ней и обозначается  $C^{op}$ . Ярким примером категории служит **Set**, состоящая из всех мно-

жеств и отображений. Вместе с категориями вводятся функторы — отображения категорий, переводящие объекты в объекты и морфизмы в морфизмы, с сохранением композиции и тождественных морфизмов. Все категории и функторы образуют "катеорию" **CAT**.

В системной инженерии категориями описываются "каталоги" алгебраических моделей системных единиц и действий по сборке систем. Каталог моделей образует категорию, поскольку в нем имеется композиция морфизмов (последовательное выполнение действий) и тождественные морфизмы (холостое "ничегонеделание" с любой моделью). Во многих известных приложениях модели представляют собой множества, снабженные некоторой структурой (алгебры, графы, системы переходов, векторные пространства, многообразия и т. д.), и тогда каталог является конкретной категорией над **Set**.

Подходящие диаграммы в категории-каталоге представляют возможные структуры системы. Напомним, что диаграмма в категории  $C$  — это функтор

$$\Delta : I \rightarrow C,$$

где  $I$  — малая категория, порожденная (ориентированным мульти)графом диаграммы и называемая схемой или формой диаграммы. Множество объектов категории  $I$  образуют все вершины графа, а морфизмами служат все конечные пути; композиция морфизмов задается конкатенацией путей.

Для диаграммы структуры системы теория категории позволяет строго сформировать и проверить модель системы как целого универсальной конструкцией копредела диаграммы. Понятие копредела выражает в алгебраических терминах общепринятый взгляд на систему как на "контейнер", который включает в себя все части с учетом их структурных взаимосвязей, и ничего другого. Формально, копредел — это объект, снабженный морфизмами из каждой вершины диаграммы, удовлетворяющими определенным условиям естественности и универсальности. Простейший нетривиальный копредел, называемый кодекартовым квадратом, строится для диаграммы в форме "распорки":

$$f : P \leftarrow G \rightarrow S : g.$$

Такая диаграмма может быть интерпретирована как структура системы, состоящей из частей  $P$  и  $S$ , соединенных "клеем"  $G$ . Система

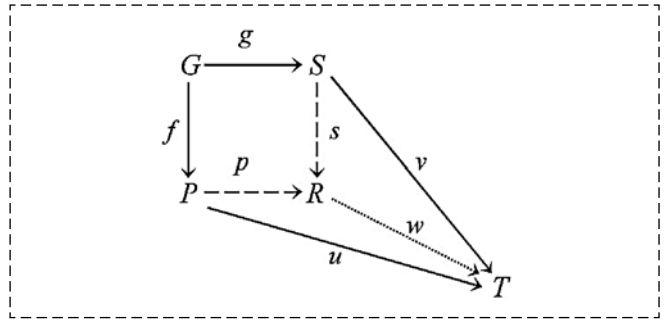


Рис. 1. Кодекартов квадрат  
Fig. 1. Pushout

должна включать в себя обе части и учитывать склеивание в том смысле, что прослеживание включения клея через любую из частей дает одно и то же композитное действие (условие естественности). Более того, система не должна содержать ничего, кроме двух склеенных частей, т. е. она должна быть однозначно идентифицируема в любой единице, содержащей части с учетом склеивания (условие универсальности). Копредел, представляющий такую систему, — это объект  $R$  вместе с морфизмами  $p : P \rightarrow R$  и  $s : S \rightarrow R$ , удовлетворяющими следующим двум условиям (рис. 1):

(i)  $p \circ f = s \circ g$  (естественность);

(ii) для любых объекта  $T$  и морфизмов  $u : P \rightarrow T$ ,  $v : S \rightarrow T$ , если  $u \circ f = v \circ g$ , то существует единственный морфизм  $w : R \rightarrow T$  такой, что  $w \circ p = u$  и  $w \circ s = v$  (универсальность).

Легко проверить, что объект копредела  $R$ , при условии, что он существует, определяется единственным образом с точностью до изоморфизма. При необременительных технических ограничениях копредел любой конечной диаграммы может быть вычислен как последовательность кодекартовых квадратов. Ниже приведены примеры копределов, возникающих в процессе проектирования киберфизических производственных систем.

Путем обобщения кодекартова квадрата строится теоретико-категорная семантика *аспектного связывания* (weaving) — способа синтеза систем многократным встраиванием повторяющихся "рассеянных" (scattered) функций в различные контексты. Аспектное связывание относится к числу ключевых приемов повышения эффективности разработки киберфизических систем, поскольку рассеяние является неотъемлемым свойством ряда их сервисных функций, таких как обеспечение безопасности, контроль ошибок ввода-вывода, ведение конфигурационных данных [16]. Связывание состоит в под-

ключении программы  $W$ , называемой советом (advice) или аспектом (aspect), к базовой программе (base)  $B$  в заданных местах, называемых точками соединения (join points) [17]. Каждый раз, когда при исполнении базовой программы встречается точка соединения, должен вызываться совет. Инструмент связывания принимает на вход две спецификации:

- описание точек соединения в базовой программе — срез (pointcut);
- описание точек вызова совета в точках соединения.

При связывании на первом шаге (виртуально) создается достаточное число копий совета, по одной на каждую точку соединения, с маркировкой соответствующих им точек вызова. Далее на втором шаге эти точки "склеиваются" друг с другом так, чтобы не разрушить аспектную структуру базы и совета. Для формальной записи правил связывания привлекается дополнительная модель  $C$ , называемая связкой (connector), которая интегрируется с базой в точках соединения, а с советом — в точках вызова. В аспектно-ориентированном программировании в роли связки выступает регулярное выражение, выделяющее в тексте базовой программы синтаксические единицы, образующие срез. Соответствие точек соединения точкам вызова задается парой морфизмов

$$j : B \leftarrow C \rightarrow W : e.$$

Первому шагу связывания отвечает построение произведения  $C \times W$  вместе с морфизмом

$$\langle 1_C, e \rangle : C \rightarrow C \times W,$$

который однозначно определяется условиями

$$p_C \circ \langle 1_C, e \rangle = 1_C \text{ и } p_W \circ \langle 1_C, e \rangle = e,$$

где  $p_C : C \times W \rightarrow C$  и  $p_W : C \times W \rightarrow W$  — проекции произведения на компоненты.

Второй шаг связывания формально представляет собой склеивание — кодекартов квадрат над парой морфизмов

$$j : B \leftarrow C \rightarrow C \times W : \langle 1_C, e \rangle.$$

Результатом связывания является вершина этого квадрата, обозначаемая  $j \bowtie e$ , при условии, что произведение  $C \times W$  и кодекартов квадрат существуют (рис. 2) [18].

Теория категорий предлагает широкий ассортимент более сложных конструкций для прило-

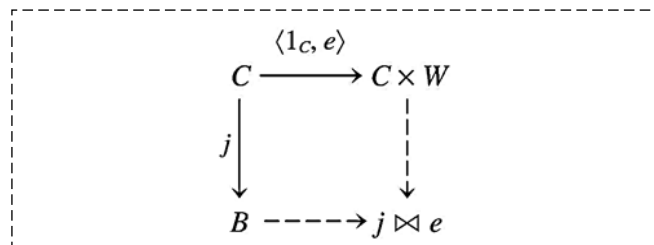


Рис. 2. Аспектное связывание как кодекартов квадрат  
Fig. 2. Aspectual weaving represented as a pushout

жения в системной инженерии. Однако их рассмотрение выходит за рамки настоящей статьи.

### Алгебраический подход к проектированию в разрезе точек зрения

Для киберфизических систем можно составить категории-каталоги по видам СЧ: производственное оборудование, средства электропитания, датчики и контроллеры, алгоритмы управления и т. д. Однако априори неясно, в каких терминах можно строго и семантически корректно описать сборку целостных систем из таких разнородных СЧ [7]. Можно зафиксировать лишь схему деления — граф структурной иерархии СЧ, обусловленной их природой. Для построения архитектуры требуется отобразить схему деления в различные точки зрения на систему, такие как:

- пространственное расположение (геометрическая форма);
- поведение;
- потребительское качество;
- материал;
- управление;
- безопасность;
- диагностика;
- иные подходящие точки зрения.

Алгебраические описания всех возможных СЧ всех видов с некоторой фиксированной точки зрения образуют категорию, морфизмы в которой выражают выбранную точку зрения на действия по сборке. Например, геометрическая форма любой СЧ представляется подмножеством в  $\mathbb{R}^3$ , которое является ограниченным (содержится внутри некоторой сферы), регулярным (совпадает с замыканием своей внутренности в стандартной топологии) и полуаналитическим (допускает задание граничных поверхностей в декартовых координатах вещественными аналитическими функциями) [19]. Чтобы специфицировать всевозмож-

ные соединения СЧ, такие как склеивание по фрагментам поверхности, рассматриваются все ограниченные регулярные полуаналитические множества в  $\mathbb{R}^n$ ,  $0 \leq n \leq 3$ . На классе всех таких множеств выполняется факторизация: отождествляются множества, переходящие друг в друга под действием аффинных изометрий и растяжений. Морфизмы таких классов эквивалентности, описывающие действия по сборке систем с точки зрения пространственного расположения, порождаются изометрическими вложениями множеств и растяжениями. Возникает подкатегория в **Set**, обозначаемая **SBM** (от Solid Body Modeling). Наглядным примером представления сборки системы копределом служит кодекартов квадрат в **SBM**, изображающий склеивание двух деталей "Part B" и "Part C" в сборочную единицу "Unit BC" по двумерной контактной поверхности, на которую наносится слой клея "Glue" (рис. 3) [12]. Отметим, что по сравнению с теоретико-категорной диаграммой кодекартова квадрата из предыдущего раздела, здесь квадрат повернут на  $135^\circ$  против часовой стрелки (т. е. клеим вниз), чтобы соблюсти принятый в системной инженерии принцип изображения системной иерархии сверху вниз.

Для описания производственных и других систем с точки зрения поведения широко используется имитационное моделирование, в том числе дискретно-событийное [20]. Здесь модель имеет вид сценария — фрагмента предполагаемой истории поведения СЧ, представленного потоком дискретных событий различных видов. Описания действий по сборке сценариев поведения сложных систем отражают вклад сценариев поведения СЧ. Так, сценарий работы производственной линии составляется из сценариев работы станков, увязанных друг с другом в рамках технологического процесса. Формально сценарий — это множество событий, частично упорядоченное причинно-следственными зависимостями и размеченное видами событий. Ни события, ни зависимости, ни виды событий не "теряются" при сборке сложных сценариев, поэтому действия по сборке сценариев описываются отображениями, сохраняющими порядок и разметку [21]. Все сценарии и такие действия образуют категорию **Pomset**,

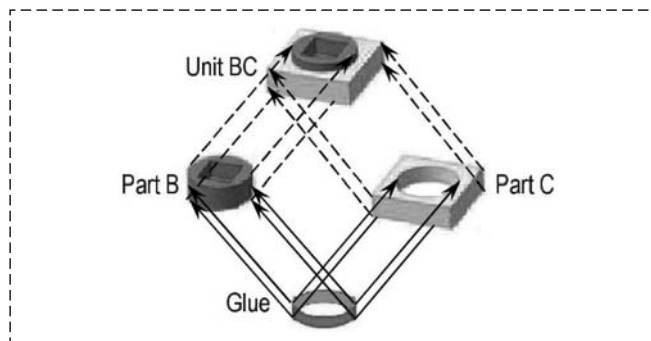


Рис. 3. Склеивание двух деталей как кодекартов квадрат  
Fig. 3. Gluing two mechanical parts represented as a pushout

снабженную функтором в категорию **Set**, "забывающим" порядок и разметку.

Копределы и другие универсальные конструкции в **Pomset** описывают приемы сборки имитационных моделей систем. В качестве упрощенного примера рассмотрим формирование сценария, предназначенного для исполнения киберфизической системой управления автоматической производственной линией [12]. Линия состоит из трех СЧ низшего уровня: двух сборочных роботов "Robot A", "Robot B" и конвейера "Conveyor", выступающего в роли "клея". Технологическая карта каждого робота назначает ему сценарий взаимодействия с конвейером, порождая две СЧ промежуточного уровня — задачи "Task M3" и "Task M4". В ходе выполнения этих сценариев три детали "Part A", "Part B", "Part C" (две из которых рассмотрены выше) собираются в изделии "Product ABC". Общий сценарий производства (СЧ высшего уровня) конструируется из этих сценариев посредством копредела в **Pomset** (рис. 4). Вычис-

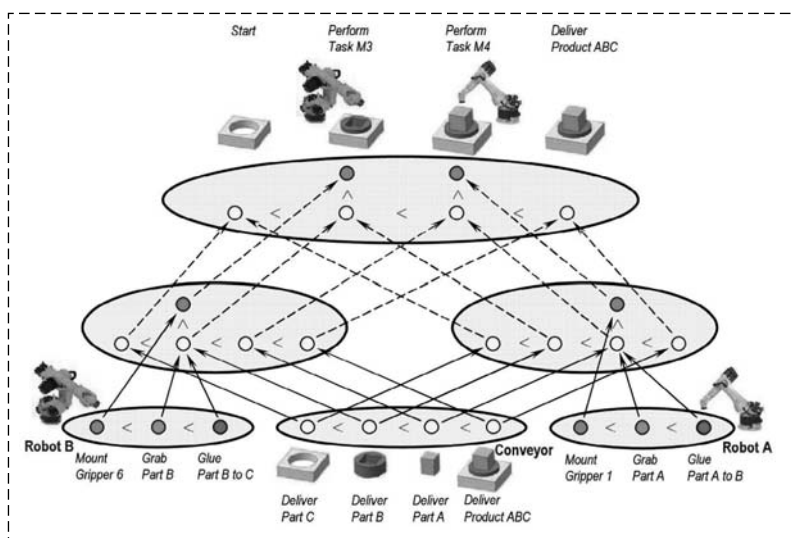


Рис. 4. Сборка сценария автоматического производства копределом  
Fig. 4. Composing an automatic manufacturing scenario by a colimit

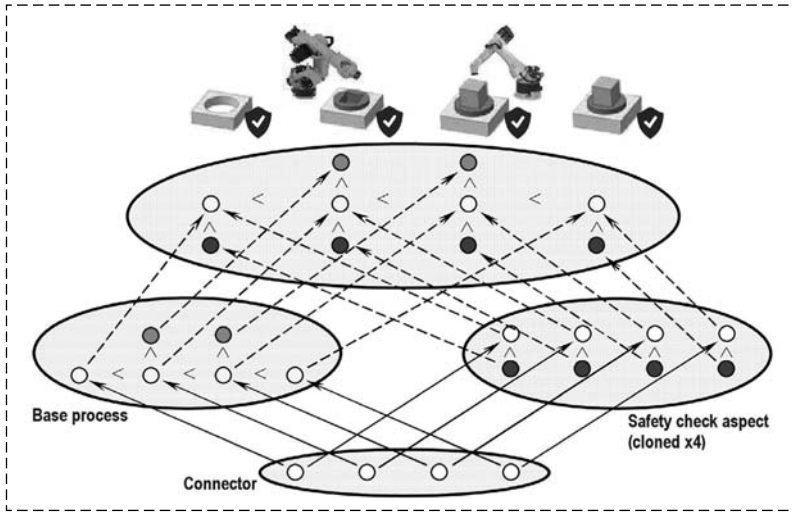


Рис. 5. Связывание аспекта проверки безопасности со сценарием автоматического производства

Fig. 5. Weaving the safety check aspect with the automatic manufacturing scenario

ление этого копредела сводится к кодекартову квадрату.

Предположим, что на каждом шаге получившегося технологического процесса требуется выполнить проверку безопасности. Покажем, как это сделать аспектным связыванием. Укрупненный сценарий аспекта проверки безопасности  $W$  (safety check) состоит из двух последовательных событий: оценка обстановки и выдача заключения о степени безопасности. Необходимо размножить этот сценарий в четырех экземплярах (по числу шагов) и связать каждый экземпляр со своим шагом. Связывание выполняется кодекартовым квадратом в **Pomset** (рис. 5). В результате получается сценарий процесса, каждый шаг которого проходит проверку безопасности.

### Категория мультизапятой в проектировании киберфизических систем

Обозначим  $C$  категорию, отвечающую некоторой точке зрения. Представление архитектуры системы с точки зрения  $C$  сводится к диаграмме в  $C$ , в вершинах которой находятся представления СЧ, а стрелки представляют действия по сборке системы из этих СЧ. Пусть  $I$  — малая категория, задающая форму (схему) этой диаграммы. Каталоги моделей СЧ различных видов задаются семейством категорий  $D_i$ ,  $i \in \text{Ob } I$ . Для  $i$ -й СЧ имеется правило представления с точки зрения  $C$ , которое по соображениям корректности задается функтором вида  $F_i: D_i \rightarrow C$  (будем обозначать  $F$  такое семейство

функторов, индексированное множеством вершин формы). Таким образом, теоретико-категорное описание архитектуры некоторой конкретной системы получается, если выбрать по одному объекту  $A_i \in D_i$ ,  $i \in \text{Ob } I$ , и некоторую диаграмму  $\Delta: I \rightarrow C$ , удовлетворяющую условию  $\Delta i = F_i A_i$ ,  $i \in \text{Ob } I$ . Заметим, что такую форму имеют и комплексные описания архитектуры с нескольких точек зрения одновременно: если отдельные точки зрения образуют множество  $Q$  и им отвечают категории  $C_q$ ,  $q \in Q$ , то комплексное представление задается произведением категорий  $\prod_{q \in Q} C_q$ , которое и выступает в качестве  $C$ .

Процедуры подбора и замены СЧ в ходе проектирования алгебраически описываются преобразованиями описаний архитектуры, сохраняющими как схему деления, так и правила представления всех СЧ. Такими преобразованиями естественным образом служат естественные преобразования диаграмм, индуцированные действиями из каталогов СЧ. В явной форме: преобразованием архитектуры

$$\begin{aligned} & ((A_i, i \in \text{Ob } I), \Delta: I \rightarrow C) \\ & \text{в } ((A'_i, i \in \text{Ob } I), \Delta': I \rightarrow C) \end{aligned}$$

является любое семейство морфизмов

$$f_i: A_i \rightarrow A'_i, i \in \text{Ob } I$$

(где каждый морфизм  $f_i$  принадлежит категории  $D_i$ ) такое, что для любых вершин  $i, j \in \text{Ob } I$  и стрелки  $s: i \rightarrow j$  выполняется условие естественности

$$F_j f_j \circ \Delta s = \Delta' s \circ F_i f_i.$$

Именно это условие выражает на языке теории категорий структурную целостность преобразования архитектуры, соответствующего замене СЧ [15] (рис. 6).

При любых фиксированных  $I$  и  $F$  совокупность всех описаний архитектуры и всех их преобразований образует категорию. Будем обозначать ее  $\Downarrow F$  и называть *категорией мультизапятой (multicomma)* [15]. Такое название связано с тем, что, если  $I$  состоит из двух точек и единственной нетождественной стрелки из одной точки в другую, то мультизапятая переходит в хорошо известную категорию запятой [11, § II.6].

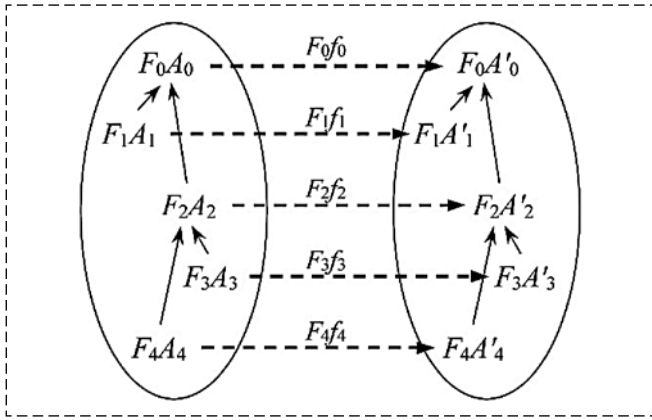


Рис. 6. Структурно целостный переход между описаниями архитектуры

Fig. 6. A structurally consistent transformation of architecture descriptions

Процедуры проектирования систем формально описываются функторами, действующими на категории  $\Downarrow_I F$ . Например, если любая диаграмма формы  $I$  в категории  $C$  имеет копредел, то его вычисление, т. е. решение прямой задачи проектирования, — это функтор из  $\Downarrow_I F$  в  $C$ . Анализируя определенные свойства копредела, можно верифицировать архитектурное решение на предмет соответствия требованиям, предъявленным к системе как целому.

Для решения обратных задач категория мультизапятой служит удобным "строительным материалом" пространства проектирования, поскольку целевые функции оптимизации состава СЧ можно задавать функторами. Действительно, областью значений любой целевой функции является линейно упорядоченное множество, а его можно представить категорией [11, § I.2]: объектами такой категории служат все элементы множества, а морфизмами — все пары  $(x, y)$  такие, что  $x \leq y$  (так что между любыми двумя объектами имеется не более одного морфизма). Интересна ситуация, когда целевая функция выступает функцией объектов функтора, действующего в такую категорию из нетривиальной (достаточно богатой морфизмами) подкатегории в  $\Downarrow_I F$  или в двойственной категории  $(\Downarrow_I F)^{op}$ . В этом случае можно применять алгоритмы оптимизации типа градиентного спуска, выполняющие навигацию вдоль морфизмов этой подкатегории, гарантирующих структурную целостность решения. При этом можно эффективно вычислять путь вдоль морфизмов инструментами компьютерной алгебры. Для таких вычислений существуют мощные категорные решатели [22].

Например, при проектировании энергоэффективной производственной системы минимизируется энергоемкость технологических процессов при сохранении приемлемой производительности. Чтобы оценить энергоемкость дискретно-событийным имитационным моделированием, в модели вводятся числовые значения энергопотребления для событий, отвечающих технологическим операциям. Для сценария процесса, конфигурация которого задана некоторой диаграммой в **Pomset**, полное потребление вычисляется как сумма значений потребления событий, составляющих ее копредел. В качестве упражнения читатель может рассчитать энергопотребление сценария автоматического производства, изображенного на рис. 4. Пусть  $\Downarrow_I F$  — категория мультизапятой, представляющая варианты архитектуры проектируемой системы с точки зрения поведения, т. е. имеющая категорию **Pomset** в качестве  $C$ . Пространство проектирования задается подкатегорией в  $(\Downarrow_I F)^{op}$ , объекты которой представляют допустимые конфигурации технологических процессов (в частности, такие, копределы которых имеют допустимые значения показателей производительности), а у любого морфизма полное энергопотребление области не превышает потребления кообласти. Расчет энергоемкости вариантов архитектуры определяет функтор из этой подкатегории в категорию вещественных чисел.

Отметим, что теория категорий позволяет представить схему деления киберфизической системы не только как малую категорию. Например, если схема деления задана блочной диаграммой, описывающей потоки управления и данных между СЧ, то ее удобно представить струнной диаграммой в подходящей моноидальной категории  $\mathbf{W}$  [23]. Вводится функтор  $F : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{CAT}$ , сопоставляющий каждой СЧ ее каталог, так что описание архитектуры системы строится выбором по одному объекту в категории  $F_X$  для каждого блока  $X$  и связыванием выбранных объектов функторами  $F_f$  для каждой межблочной связи  $f$ . Можно задавать и верифицировать требования к системе, записывая на языке теории категорий ограничения на входы и выходы блоков. Однако получающиеся представления архитектуры отражают лишь ограниченное подмножество точек зрения на систему — поведение и семантически родственные ему. Не ясно, как описать блочной диаграммой, например, геометрическую форму.

## Заклучение

Теория категорий обладает большим потенциалом применения в технологиях Индустрии 4.0, в том числе в цифровом проектировании гетерогенных киберфизических систем. Предложенные в статье теоретико-категорные методы могут быть использованы при решении ряда прикладных задач проектирования киберфизических систем, в том числе при создании, модернизации и наладке роботизированных производственных линий.

## Список литературы

1. **Khaitan S. K., McCalley J. D.** Design techniques and applications of cyber physical systems: a survey // *IEEE Systems Journal*. 2015. Vol. 9, N. 2. P. 350–365.
2. **Городецкий В. И., Ларюхин В. Б., Скобелев П. О.** Концептуальная модель цифровой платформы для киберфизического управления современным предприятием. Часть 1. Цифровая платформа и цифровая экосистема // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2019. Т. 20, № 6. С. 323–332.
3. **Городецкий В. И., Ларюхин В. Б., Скобелев П. О.** Концептуальная модель цифровой платформы для киберфизического управления современным предприятием. Часть 2. Цифровые сервисы // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2019. Т. 20, № 7. С. 387–397.
4. **Кычкин А. В., Николаев А. В.** Архитектура киберфизической системы управления проветриванием подземного горнодобывающего предприятия на базе платформы интернета вещей // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2021. Т. 22, № 3. С. 115–123.
5. **Андрюшкевич С. К., Ковалёв С. П., Нефедов Е. И.** Разработка цифрового двойника энергетической системы на основе онтологической модели // *Автоматизация в промышленности*. 2020. № 1. С. 51–56.
6. **Sun H., Ma L.** Generative design by using exploration approaches of reinforcement learning in density-based structural topology optimization // *Designs*. 2020. Vol. 4, N. 2. P. 10.
7. **Rajhans A.** et al. Supporting heterogeneity in cyber-physical systems architectures // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2014. Vol. 59, N. 12. P. 3178–3193.
8. **Larsen P. G.** et al. Integrated tool chain for model-based design of Cyber-Physical Systems: The INTO-CPS project // 2nd International Workshop on Modelling, Analysis, and Control of Complex CPS (CPS Data). 2016. P. 1–6. doi: 10.1109/CPS-Data.2016.7496424.
9. **Breiner S., Subrahmanian E., Jones A.** Categorical foundations for system engineering // *Disciplinary Convergence in Systems Engineering Research* / Eds. A. Madni, B. Boehm, R. Ghanem, D. Erwin, D. Wheaton. Springer, 2018. P. 449–463.
10. **Mordecai Y., Fairbanks J. P., Crawley E. F.** Category-theoretic formulation of the model-based systems architecting cognitive-computational cycle // *Applied Sciences*. 2021. Vol. 11. P. 1945. doi:10.3390/app11041945.
11. **Маклейн С.** Категории для работающего математика. М.: Физматлит. 2004. 352 с.
12. **Ковалёв С. П.** Алгебраические методы проектирования гетерогенных киберфизических систем // *Математические методы в технологиях и технике*. 2021. № 2. С. 144–147.
13. **Ковалёв С. П.** Теория категорий как математическая прагматика модельно-ориентированной системной инженерии // *Информатика и ее применения*. 2018. Т. 12, Вып. 1. С. 95–104.
14. **Baez J. C., Erbele J.** Categories in control // *Theory and Applications of Categories*. 2015. Vol. 30, N. 24. P. 836–881.
15. **Ковалёв С. П.** Методы теории категорий в цифровом проектировании гетерогенных киберфизических систем // *Информатика и ее применения*. 2021. Т. 15, Вып. 1. С. 23–29.
16. **Kuschnerus D., Bilgic A., Musch T.** Aspect-oriented data and safety modeling for cyber-physical systems in process automation // *Proc. 8th European Congress on Embedded Real Time Software and Systems*. Toulouse, France, 2016. URL: <https://hal-irsn.archives-ouvertes.fr/ERTS2016/hal-01289440v1>.
17. **Aspect-Oriented Software Development**. Reading: Addison Wesley, 2004. 800 p.
18. **Ковалёв С. П.** Семантика аспектно-ориентированного моделирования данных и процессов // *Информатика и ее применения*. 2013. Т. 7, Вып. 3. С. 70–80.
19. **Requicha A. G.** Representations for rigid solids: theory, methods, and systems // *Journal ACM Computing Surveys*, 1980. Vol. 12, N. 4. P. 437–464.
20. **Prajapat N., Tiwari A.** A review of assembly optimisation applications using discrete event simulation // *International Journal of Computer Integrated Manufacturing*. 2017. Vol. 30, N. 2-3. P. 215–228.
21. **Pratt V. R.** Modeling concurrency with partial orders // *International Journal of Parallel Programming*. 1986. Vol. 15, N. 1. P. 33–71.
22. **Gross J., Chlipala A., Spivak D. I.** Experience implementing a performant category-theory library in Coq // 5th Conference (International) on Interactive Theorem Proving Proceedings / Eds. G. Klein, R. Gamboa. Lecture Notes in Computer Science ser. Springer. 2014. Vol. 8558. P. 275–291.
23. **Bakirtzis G., Fleming C. H., Vasilakopoulou C.** Categorical semantics of cyber-physical systems theory // *ACM Transactions on Cyber-Physical Systems*. 2021. Vol. 5, Iss. 3. Article N. 32. P. 1–32.

## Design of Heterogeneous Cyber-Physical Systems Employing Category Theory

S. P. Kovalyov, kovalyov@sibnet.ru,

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences RAS, Moscow, 117997, Russian Federation

Corresponding author: **Kovalyov Sergei P.**, Dr. Sci, Lead Scientist, V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences RAS, Moscow, 117997, Russian Federation, e-mail: [kovalyov@sibnet.ru](mailto:kovalyov@sibnet.ru)

Accepted on November 10, 2021

### Abstract

*Heterogeneous cyber-physical control systems based on digital twins are in demand by Industry 4.0. In accordance with the contemporary systems engineering methodology, such systems are designed at the level of digital models. The paper proposes approaches to formalization and subsequent automation of solving direct and inverse problems of their design.*

To unify descriptions of heterogeneous components, we follow a viewpoint-based approach to architecture design recommended by the international standard ISO/IEC/IEEE 42010. Following recent trends, we employ category theory as a mathematical framework for the formal description and solution of design problems. Indeed, category theory is a branch of higher algebra specifically aimed at a unified representation of objects of different nature and relationships between them. The design space of a heterogeneous cyber-physical system is constructed as a subcategory of the multicoma category, the objects of which describe possible system architectures with a fixed structural hierarchy represented from a certain viewpoint as diagrams, and morphisms denote actions associated with the parts selection and replacement during the system design. Direct design problems consist in evaluating the properties of the system as a whole by its architecture and are solved using a universal category-theoretic construction of the colimit of the diagram. The solution of inverse problems that require finding variants of the system architecture, which are (sub-, Pareto-) optimal according to the consumer quality criteria, consists in reconstructing diagrams by their colimit edges. For such reconstruction, optimization algorithms of gradient descent type are reasonable to employ, which navigate along the system design space morphisms calculating the path by means of computer algebra. Typical techniques of assembling cyber-physical systems, such as modular composition and aspect weaving, are described in the language of category theory and illustrated. As an example, we outline the design of energy-efficient robotic production lines represented from the behavior viewpoint as discrete-event simulation models.

**Keywords:** cyber-physical system, generative design, automatic manufacturing, architecture viewpoint, category theory, colimit, multicoma category

For citation:

**Kovalyov S. P.** Design of Heterogeneous Cyber-Physical Systems Employing Category Theory, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 2, pp. 59–67.

DOI: 10.17587/mau.23.59-67

### References

1. **Khaitan S. K., McCalley J. D.** Design techniques and applications of cyber physical systems: a survey, *IEEE Systems Journal*, 2015, vol. 9, no. 2, pp. 350–365.
2. **Gorodetsky V. I., Laryukhin V. B., Skobelev P. O.** Conceptual model of a digital platform for cyber-physical management of a modern enterprises. Part 1. Digital platform and digital ecosystem, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 6, pp. 323–332.
3. **Gorodetsky V. I., Laryukhin V. B., Skobelev P. O.** Conceptual model of a digital platform for cyber-physical management of a modern enterprises. Part 2. Digital services, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 7, pp. 387–397.
4. **Kychkin A. V., Nikolaev A. V.** Architecture of a cyber-physical system for the mining enterprise ventilation control based on the Internet of Things platform, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 3, pp. 115–123.
5. **Andryushkevich S. K., Kovalyov S. P., Nefedov E.** Development of a power system digital twin based on an ontological model, *Automation in Industry*, 2020, no. 1, pp. 51–56.
6. **Sun H., Ma L.** Generative design by using exploration approaches of reinforcement learning in density-based structural topology optimization, *Designs*, 2020, vol. 4, no. 2, p. 10.
7. **Rajhans A.** et al. Supporting heterogeneity in cyber-physical systems architectures, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, vol. 59, no. 12, pp. 3178–3193.
8. **Larsen P. G.** et al. Integrated tool chain for model-based design of Cyber-Physical Systems: The INTO-CPS project, *2nd International Workshop on Modelling, Analysis, and Control of Complex CPS (CPS Data)*, 2016, pp. 1–6, doi: 10.1109/CPS-Data.2016.7496424.
9. **Breiner S., Subrahmanian E., Jones A.** Categorical foundations for system engineering, *Disciplinary Convergence in Systems Engineering Research*, Eds. A. Madni, B. Boehm, R. Ghanem, D. Erwin, D. Wheaton, Springer, 2018, pp. 449–463.
10. **Mordecai Y., Fairbanks J. P., Crawley E. F.** Category-theoretic formulation of the model-based systems architecting cognitive-computational cycle, *Applied Sciences*, 2021, vol. 11, pp. 1945, doi:10.3390/app11041945.
11. **Mac Lane S.** Categories for the working mathematician, 2nd Ed., New York, NY, Springer, 1998.
12. **Kovalyov S. P.** Algebraic means of heterogeneous cyber-physical systems design, *Mathematical Methods in Technics and Technologies*, 2021, no. 2, pp. 144–147.
13. **Kovalyov S. P.** Category theory as a mathematical pragmatics of model-based systems engineering, *Informatics and Applications*, 2018, vol. 12, no. 1, pp. 95–104.
14. **Baez J. C., Erbele J.** Categories in control, *Theory and Applications of Categories*, 2015, vol. 30, no. 24, pp. 836–881.
15. **Kovalyov S. P.** Methods of the category theory in digital design of heterogeneous cyber-physical systems, *Informatics and Applications*, 2021, vol. 15, no. 1, pp. 23–29.
16. **Kuschnerus D., Bilgic A., Musch T.** Aspect-oriented data and safety modeling for cyber-physical systems in process automation, *Proc. 8th European Congress on Embedded Real Time Software and Systems*, Toulouse, France, 2016, available at: <https://hal-irsu.archives-ouvertes.fr/ERTS2016/hal-01289440v1>.
17. **Aspect-Oriented Software Development.** Reading: Addison Wesley, 2004, 800 p.
18. **Kovalyov S. P.** Semantics of aspect-oriented modeling of data and processes, *Informatics and Applications*, 2013, vol. 7, no. 3, pp. 70–80.
19. **Requicha A. G.** Representations for rigid solids: theory, methods, and systems, *Journal ACM Computing Surveys*, 1980, vol. 12, no. 4, pp. 437–464.
20. **Prajapat N., Tiwari A.** A review of assembly optimisation applications using discrete event simulation, *International Journal of Computer Integrated Manufacturing*, 2017, vol. 30, no. 2–3, pp. 215–228.
21. **Pratt V. R.** Modeling concurrency with partial orders, *International Journal of Parallel Programming*, 1986, vol. 15, no. 1, pp. 33–71.
22. **Gross J., Chlipala A., Spivak D. I.** Experience implementing a performant category-theory library in Coq, *5th Conference (International) on Interactive Theorem Proving Proceedings*, Eds. G. Klein, R. Gamboa, Lecture Notes in Computer Science ser., Springer, 2014, vol. 8558, pp. 275–291.
23. **Bakirtzis G., Fleming C. H., Vasilakopoulou C.** Categorical semantics of cyber-physical systems theory, *ACM Transactions on Cyber-Physical Systems*, 2021, vol. 5, iss. 3, article no. 32, pp. 1–32.