

С. А. Вражевский<sup>1, 2</sup>, канд. техн. наук, науч. сотр., vrazhevskij.s@gmail.com,

Ю. В. Чугина<sup>1</sup>, канд. техн. наук, науч. сотр., yofrid@mail.ru,

И. Б. Фуртат<sup>1</sup>, д-р техн. наук, проф., вед. науч. сотр., cainenash@mail.ru,

Д. Е. Коновалов<sup>2</sup>, магистрант, d.e.konvalov@mail.ru,

<sup>1</sup>ИПМаш РАН, Санкт Петербург,

<sup>2</sup>Университет ИТМО, Санкт Петербург

## Развитие метода инвариантных эллипсоидов для проектирования разреженных регуляторов\*

*Рассматривается метод синтеза линейных регуляторов с разреженными матрицами обратных связей для управления объектами в условиях возмущений. Алгоритм поиска разреженных матриц основан на методе инвариантных эллипсоидов и формулируется в виде решения системы линейных матричных неравенств с дополнительными ограничениями. Предложен специальный набор оптимизационных условий, который для возмущенной системы обеспечивает минимизацию перерегулирования и выбросов в переходных процессах возмущенной замкнутой системы одновременно с минимизацией ошибки в установившемся режиме. Предложенный метод также предполагает возможность минимизации как строчной нормы матрицы обратных связей, так и столбцовой, с сохранением свойств робастности, что позволяет решать задачу разреженного управления (под разреженным управлением понимается линейный регулятор с разреженной матрицей обратных связей). Эффективность работы предложенной схемы управления подтверждена результатами компьютерного моделирования и сравнения с некоторыми аналогами.*

**Ключевые слова:** выпуклая оптимизация, метод инвариантных эллипсоидов, разреженное управление, линейные регуляторы

### Введение

**Метод инвариантных эллипсоидов.** Метод инвариантных эллипсоидов предлагает несколько иной взгляд на задачу обеспечения устойчивости, чем известные и часто используемые классические подходы. В отличие от большинства методов управления, для которых достаточным условием успешной реализации является обеспечение асимптотической устойчивости или устойчивости по Ляпунову (фундаментальных свойств с точки зрения теории автоматического управления), метод инвариантных эллипсоидов позволяет оттолкнуться от задачи обеспечения требуемого качества переходных процессов для замкнутой

системы, что гарантирует требуемое качество сигналов в установившемся режиме. Данный подход также позволяет управлять системами с ограничениями по состоянию без дополнительных надстроек в алгоритме управления. Естественной областью применения метода инвариантных эллипсоидов являются различные оптимизационные задачи в качестве альтернативы классическим методам, таким как, например, линейный квадратичный регулятор, градиентные методы или  $H_\infty$ . Ключевой идеей метода является переход от традиционной задачи обеспечения устойчивости к задаче выпуклой оптимизации, которая, в свою очередь, может быть решена с помощью методов вариационного исчисления и теории линейных матричных неравенств (linear matrix inequalities — LMI) [1–4].

**Разреженное управление.** Результаты, представленные в данной статье, основаны на алгоритмах, опубликованных в работах [1] и [5], каждая из которых предлагает свою вариацию метода инвариантных эллипсоидов. В статье

\*Основной результат получен за счет гранта Президента РФ (проект № МД-1054.2020.8) в ИПМаш РАН. Задача выпуклого программирования выполнена за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-08-00610) в ИПМаш РАН. Численные исследования выполнены за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-08-00246) в ИПМаш РАН.

[1] впервые сформулирована и решена задача "разреженного" управления на базе данного метода, т. е. задача поиска матрицы линейных обратных связей с минимальным возможным рангом. Результат статьи [1] развивает идею, сформулированную ранее в работе [6] и более подробно исследованную в работах [7—9].

Важность свойства разреженности в обратной связи можно объяснить двумя факторами. Во-первых, при минимизации столбцовой нормы матрицы обратной связи в схеме управления становится возможным использовать минимальное число измерительных устройств. Во-вторых, при минимизации строчной нормы матрицы обратной связи обеспечивается минимизация необходимого числа исполнительных (управляющих) устройств. Оба свойства, если они достижимы при синтезе регулятора, удешевляют стоимость системы и позволяют повысить отказоустойчивость и качество регулирования за счет уменьшения структурной сложности. Таким образом, объясняется практический интерес к регуляторам, основанным на работе [1]. Аналогичной задаче, наряду с результатом [1], посвящены работы [10, 11].

Различные алгоритмы на основе метода инвариантного эллипсоида также представлены в работах [12—14]. В статье [12] задача разреженного управления решена для возмущенных объектов. Результат, полученный в [12], модифицируется в работе [5] двумя способами. Во-первых, считается, что траектории замкнутых систем способны превышать границы эллипсоида на некоторую величину, зависящую от величины возмущений. Таким образом, робастность метода инвариантного эллипсоида заключается в том, что траектории замкнутой системы остаются внутри эллипсоида с некоторой точностью при функционировании системы в условиях возмущений. Такое свойство непосредственно требует учитывать влияние возмущений на переходные процессы замкнутой системы и минимизировать их воздействие.

Другая идея в работе [5] заключается в изменении условий минимизации в LMI, которые вычисляют матрицу обратной связи. В работе предлагается аппроксимировать эллипсоид сферой с диаметром, равным норме вектора начальных условий, а не минимизировать его объем. Основная идея заключается в том, чтобы предотвратить синтез регулятора, который допускает эллипсоид с высокой непропорциональностью полуосей, что, в свою очередь,

способствует появлению перерегулирования в переходных процессах.

**Основные результаты статьи.** В данной работе предложен новый подход к синтезу разреженных регуляторов с оптимизацией переходных процессов для возмущенных линейных систем. Отличия предлагаемого метода от представленных в работах [1, 5, 12, 15, 16] заключаются в следующем. В отличие от работ [12, 15, 16] добавлено условие минимизации наибольшей полуоси инвариантного эллипсоида, что приводит к минимизации перерегулирования и выбросов в переходных процессах. Одновременно с этим ошибка в установившемся режиме минимизируется по аналогии с работой [5]. Однако в отличие от статьи [5] условия минимизации формулируются таким образом, что позволяют конструировать эллипсоид, наибольшая полуось которого определяется начальными условиями. Дополнительно регулятор может быть приведен к разреженному виду методом, предложенным в статье [1].

## 1. Постановка задачи

### ◀ Модель объекта

Объект описывается линейной непрерывной моделью следующего вида:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Df(t), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times m}$ ,  $D \in R^{n \times l}$ ;  $x(t) \in R^n$  — вектор состояния;  $x_0$  — вектор начальных условий;  $u(t) \in R^m$  — вектор управляющих сигналов;  $f(t) \in R^l$  — неизвестное возмущение.

Полагается, что матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $D$  известны и пара  $(A, B)$  — управляема. Вектор состояния  $x(t)$  полностью доступен измерению. Функция возмущений  $f(t)$  ограничена известной величиной  $\gamma$ :  $\|f(t)\| \leq \gamma$ .

### ◀ Цель управления

Основной целью управления является решение задачи стабилизации возмущенного объекта с минимизацией выбросов в переходных процессах

$$\|x(t)\| \leq \varepsilon, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

одновременно с минимизацией размера ошибки в установившемся режиме

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\sup \|x(t)\|) \leq \delta, \quad (3)$$

где  $\varepsilon > 0$  — точность регулирования в переходном режиме, оценка которой будет получена в процессе синтеза регулятора;  $\delta > 0$  — некоторая достижимая точность стабилизации в установившемся режиме.

Второстепенная задача заключается в построении разреженного регулятора для достижения условий (1), (2) в целях минимизации числа используемых измерительных либо исполнительных устройств. Без ограничения общности можно рассматривать задачу минимизации строчной нормы матрицы обратных связей, тогда для линейного регулятора задачу разреженного управления можно представить в виде

$$u(t) = Kx(t) : \|K\|_{r1} \rightarrow \min. \quad (4)$$

## 2. Основной результат

Сформируем закон управления в виде линейного статического регулятора

$$u(t) = Kx(t), \quad (5)$$

где  $K \in R^{m \times n}$  — некоторая матрица линейных обратных связей, выбор которой гарантирует выполнение целевых условий (2)—(4), при этом матрица  $A + BK$  является гурвицевой. Таким образом, замкнутая система

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + Df(t) \quad (6)$$

будет устойчивой в силу ограниченности  $f(t)$ . Определим способ расчета матрицы  $K$ .

Для решения основной задачи использован метод инвариантных эллипсоидов и метод функции Ляпунова. В общем виде метод инвариантных эллипсоидов заключается в построении эллипсоидальной аппроксимации некоторого подмножества в  $R^n$ , содержащего решения замкнутой системы (6), по заранее выбранному оптимизационному критерию. Такое подмножество может быть найдено через решение линейных матричных неравенств с помощью набора линейных ограничений, в которых учитываются начальные условия объекта и критерии устойчивости замкнутой системы, определенные с помощью функции Ляпунова. В данной работе искомый набор ограничений на решения замкнутой системы формируется исходя из условий (2)—(4).

Так, для минимизации перерегулирования и выбросов в переходных процессах одно из

требований к мажорирующему эллипсоиду формулируется как минимизация наибольшей из его полуосей. В работах [5, 12, 15], также посвященных повышению качества переходных процессов возмущенных систем через метод инвариантных эллипсоидов, для минимизации выбросов используются другие критерии. В статьях [12, 15] осуществляется минимизация следа матрицы эллипсоида, в работе [5] предлагается обеспечить близость формы инвариантного эллипсоида к шару:  $\|P - I\| \rightarrow \min$ , где  $P$  — искомый эллипсоид,  $I$  — единичная матрица. Сравнение эффективности всех трех подходов вместе с некоторыми комментариями предложены в последней части работы.

Для минимизации ошибки  $\delta$  в установившемся режиме используется оптимизация с использованием настраиваемого параметра [5]. Сформулируем основной результат в виде следующей теоремы.

**Теорема.** Рассмотрим систему управления, состоящую из объекта (1) и закона управления (5). Если для заданного числа  $\alpha > 0$  найдутся положительно определенная матрица  $P > 0$  и параметр  $\beta > 0$  такие, что

$$\beta + \lambda_{\max}(P) + H[m - 2]\|Y\|_{r1} \rightarrow \min; \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} I & x_0^T \\ x_0 & P \end{bmatrix} \geq 0;$$

$$\begin{bmatrix} PA^T + AP + Y^T B^T + BY + \alpha P & D \\ D^T & -\beta I \end{bmatrix} \leq 0,$$

тогда траектории замкнутой системы (6), состоящей из объекта управления (1) и закона управления (5), будут удовлетворять целевым условиям (2)—(3) и не будут покидать эллипсоид вида

$$E_x = \{x(t) : x^T(t)P^{-1}x(t) \leq 1\}, \quad P > 0, \quad (8)$$

при выборе  $K = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$ , где  $\hat{Y}$  и  $\hat{P}$  — решения (7).  
*Доказательство.*

### 1. Ограниченность траекторий замкнутой системы

Эллипсоид вида (8) инвариантен по  $x(t)$ , если  $x(t) \in E_x$  для  $t \geq 0$ . Для того чтобы сформировать аппроксимированное подмножество (8), покрывающее  $x(t)$ , необходимо, во-первых, чтобы начальные условия объекта принадлежали эллипсоиду (8), что интерпретируется в виде условия  $x_0^T P^{-1} x_0 \leq 1$ . Данное условие приводимо

к виду  $I - x_0^T P^{-1} x_0 \geq 0$ , где правую часть можно рассмотреть как дополнение Шура к матрице  $P$  в линейном матричном неравенстве

$$\begin{bmatrix} I & x_0^T \\ x_0 & P \end{bmatrix} \geq 0, \quad (9)$$

которое, в свою очередь, становится первой частью ограничений и гарантирует включение начальных условий в множестве, ограниченном эллипсоидом (8).

## 2. Асимптотическая устойчивость

Асимптотическая устойчивость следует из условия

$$\dot{V}(x(t)) + 2\alpha V(x(t)) - \beta f^T(t)f(t) \leq 0, \quad (10)$$

где  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  и  $V(x(t))$  — функционал Ляпунова в виде вышеупомянутого эллипсоида

$$V(x(t)) = x^T(t)Qx(t), \quad (11)$$

где  $Q = P^{-1}$ . Производная (11) вдоль траекторий системы (6) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dV(x)}{dx} &= x^T(t)(A + BK)^T Qx(t) + \\ &+ x^T(t)Q(A + BK)x(t) + \\ &+ f^T(t)D^T Qx(t) + x^T(t)QDf(t). \end{aligned} \quad (12)$$

Принимая во внимание соотношения (11) и (12), а также переписывая неравенство (10) в матричной форме, получим:

$$z^T(t)\Phi z(t) \leq 0, \quad (13)$$

где  $z^T(t) = [x(t) \ f(t)]$ ,

$$\Phi = \begin{bmatrix} (A + BK)^T Q + Q(A + BK) + \alpha Q & QD \\ D^T Q & -\beta I \end{bmatrix}.$$

Неравенство (13) нелинейно по своим переменным. Чтобы уйти от нелинейности, рассмотрим следующее эквивалентное условие:

$$z^T(t)M\Phi Mz(t) \leq 0,$$

где  $M = \begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} > 0$ . Вычисляя произведение матриц  $M\Phi M$  и введя обозначения  $Y = KP$  с учетом  $P = Q^{-1}$ , получим:

$$\begin{bmatrix} PA^T + AP + Y^T B^T + BY + \alpha P & D \\ D^T & -\beta I \end{bmatrix} \leq 0. \quad (14)$$

Если  $\alpha$  — заданная константа, то неравенство (14) является линейным. Разрешимость (14) гарантирует асимптотическую устойчивость замкнутой системы (1), (5).

## 3. Выполнение целевых условий

Для обеспечения целевого условия (3) оценим точность стабилизации  $\delta$  через решение неравенства (10):

$$V(x(t)) \leq V(x(0))e^{-\alpha t} + \frac{\beta f^2(t)}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}).$$

Принимая во внимание известную верхнюю границу возмущения, для  $t \rightarrow \infty$  получаем следующую оценку:

$$V(x(t)) \leq \frac{\beta \gamma^2}{\alpha}.$$

Так как (11) может быть ограничено снизу как

$$V(x(t)) \geq \lambda_{\min}(P^{-1})\|x(t)\|^2,$$

то  $\delta$  в выражении (3) можно оценить как

$$\delta = \sqrt{\frac{\beta \gamma^2 \lambda_{\min}(P)}{\alpha}}. \quad (15)$$

Заметим, что  $\lambda_{\min}(P)$  — квадрат наименьшей полуоси эллипсоида. Его минимизация потенциально приводит к увеличению диаметра эллипсоида, т. е. его наибольшей полуоси, что является нежелательным свойством. Поэтому, предполагая, что  $\gamma$  задано заранее и фиксируя  $\alpha$  как константу, можно минимизировать область диссипативности за счет выбора следующего функционала качества:

$$J_e = \beta \rightarrow \min. \quad (16)$$

Для выполнения цели управления (2) эллипсоид минимального диаметра может быть построен путем решения задачи минимизации собственных значений

$$J_r = \lambda_{\max}(P) \rightarrow \min, \quad (17)$$

где  $\lambda_{\max}(P)$  — квадрат наибольшей полуоси эллипсоида.

## 4. Разреженное управление

Для достижения целевого условия (4) воспользуемся теоремой 1 из работы [1]. Используя обозначения, введенные в настоящей работе, теорему можно сформулировать следующим образом.

Если задача

$$\|Y\|_{r_1} \rightarrow \min \text{ при условии } K = YP^{-1},$$

где  $Y \in R^{m \times n}$ ,  $m < n$ ,  $K \in R^{m \times n}$ ,  $P \in R^{n \times n}$ , разрешима, то существует такое решение, которое имеет не более  $m$  ненулевых строк.

Здесь используется  $r_1$ -норма

$$\|Y\|_{r_1} = \sum_{i=1}^m \max_{1 \leq j \leq n} |y_{ij}|.$$

Доказательство можно найти в работе [1].

Поскольку в данном случае существуют и другие ограничения, помимо упомянутого в теореме, то не гарантируется, что найдется разреженное решение. Кроме того, можно получить не совсем нулевые строки, т. е. получить элементы, значения которых на несколько порядков меньше, чем в других строках. При обнулении таких значений (ниже определенного порога) и выполнении условия гурвицевости матрицы  $A + BK$  получается разреженное управление.

Если матрица регулятора состоит только из одной строки, то нет места для оптимизации и нет необходимости использовать это дополнение. Таким образом, функционал качества для максимизации разреженности формулируется следующим образом:

$$J_{sp} = H[m - 2] \|Y\|_{r_1} \rightarrow \min, \quad (18)$$

где  $H[\cdot]$  — единичная шаговая функция

$$H[k] = \begin{cases} 0, & k < 0, \\ 1, & k \geq 0. \end{cases}$$

При  $m = 1$  получим  $H[m - 2] = 0$ . Полный набор оптимизационных условий (16)–(18) для решения задачи выпуклой оптимизации можно привести к виду

$$J_e + J_r + J_{sp} \rightarrow \min. \quad (19)$$

Теорема доказана.

### 3. Задача выпуклого программирования

Конечная форма задачи выпуклого программирования может быть сформулирована двумя способами. Первый способ сформулирован в *Теореме* и позволяет быстрее рассчитать матрицу регулятора  $K$ . Данный способ

полностью достаточен для случая  $m = 1$ . Второй, предложенный ниже, позволяет достичь большей разреженности или лучшей точности в стационарном режиме, но выполняется в три этапа. Этот подход аналогичен тому, который использовался в работе [1].

*Замечание.* Решим редуцированную оптимизационную задачу

$$J_e + J_r \rightarrow \min \quad (20)$$

с учетом (9), (14) и  $\beta > 0$ , с переменными  $P$ ,  $Y$ ,  $\beta$  и фиксированным  $\alpha > 0$ . Предположим, что  $\beta$  — это решение (20). Теперь установим, какие строки можно игнорировать в законе управления без потери устойчивости путем решения следующей задачи:

$$J_{sp} \rightarrow \min, \quad (21)$$

с учетом (9), (14),  $\beta > 0$  и  $\beta \leq \varepsilon \hat{\beta}$ , с переменными  $P$ ,  $Y$ ,  $\beta$  и фиксированным  $\alpha > 0$ ,  $\varepsilon > 1$ . Если на данном шаге получается разреженная матрица  $Y$ , то необходимо решить задачу (19), дополнительно уточнив фиксированные нулевые строки в  $Y$ . Если задача выполнима, то цели, определенные в разделе "Постановка задачи", удовлетворяются для системы (6).

Задачи (17), (21) являются выпуклыми, так как функционалы являются суммами положительных переменных и нормы.

### 4. Моделирование

Качество работы предложенного алгоритма иллюстрируется серией результатов компьютерного моделирования, выполненных в среде MATLAB. Задачи выпуклого программирования решаются с помощью CVX [1, 2] и с помощью решателя SeDuMi.

#### ◀ Решение основной задачи

Рассмотрим объект третьего порядка и  $m = 1$ . Предположим, что объект описывается моделью (1), где матрицы имеют следующие числовые значения:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1,259 & 1,623 & -1,492 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Начальные условия  $x(0)^T = [1,654 \ 0,529 \ -1,61]$ , возмущение моделируется с помощью функции  $f(t) = 0,5 + 0,5\cos(t)$ .

Закон управления вычисляется, согласно *Теореме*, путем решения задачи линейных матричных неравенств (9), (14) с соблюдением набора оптимизационных условий (19) при  $\alpha = 0,01$ . Вектор коэффициентов обратной связи имеет следующий вид:

$$K = [-1416 \quad -2546 \quad -3122].$$

Эллипсоидная матрица выглядит следующим образом:

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} 4,465 & -0,744 & -1,417 \\ -0,744 & 2,577 & -1,76 \\ -1,417 & -1,76 & 3,572 \end{bmatrix}.$$

На рис. 1 показана траектория системы внутри мажорирующего эллипсоида. Траектория сходится в область с  $\delta = 0,006$ .

Как можно заметить, эллипсоид ориентирован таким образом, что наиболее удаленная от положения равновесия точка траектории совпадает с наибольшей осью эллипсоида. Результаты компьютерного моделирования для различных случайно заданных матриц объекта показывают, что эта точка находится в малой окрестности положения равновесия. Таким образом, значение максимального отклонения в переходных процессах не может превосходить значение начальных условий. Траектория сходится к устойчивому состоянию с точностью  $\delta = 0,006$ .

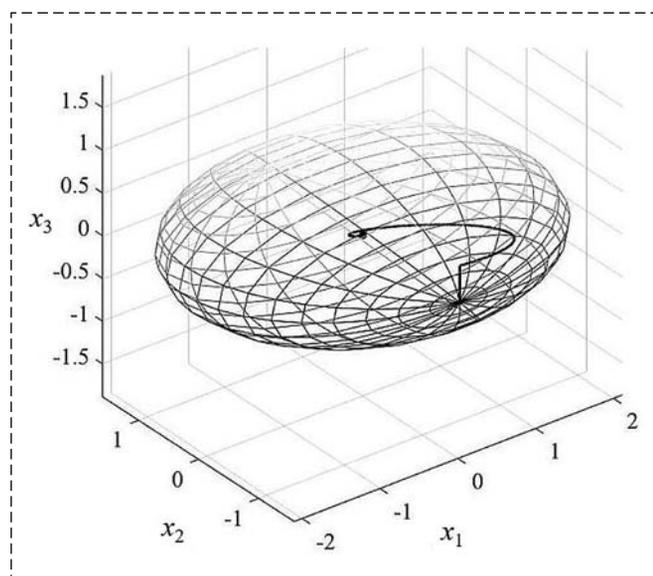


Рис. 1. Фазовая траектория системы и мажорирующий эллипсоид

Fig. 1. Phase trajectory of the system and the majorizing ellipsoid

### « Разреженное управление

Рассмотрим разомкнутый неустойчивый объект, определенный моделью (1) со следующими матрицами:

$$A = \begin{bmatrix} -0,886 & 1,86 & 1,83 \\ 0,188 & -1,37 & -0,06 \\ 1,83 & 1,882 & 1,201 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -1,433 & 1,169 & -1,857 \\ -0,313 & 1,838 & 1,397 \\ 1,663 & 0,623 & 1,736 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0,715 \\ 1,031 \\ 0,973 \end{bmatrix}.$$

Зададим  $x(0)^T = [-0,431 \quad 0,622 \quad -1,315]$ . Возмущение моделируется с использованием той же функции, что и в предыдущем примере.

Закон управления находится с использованием метода, определенного в *Замечании*. Параметры  $\alpha = 0,01$ ,  $\varepsilon = 1,2$ . После второго шага значения  $Y$  сравниваются по уровню 0,1. Получаем матрицу обратной связи в виде

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0,665 & -0,621 & -1,779 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Условие гурвицевости матрицы  $A + BK$  выполнено, поэтому замкнутая система устойчива. Фактическое число необходимых приводов равно единице. Матрица эллипсоида имеет вид

$$P = \begin{bmatrix} 1,58 & 0,112 & 0,191 \\ 0,112 & 1,745 & -0,694 \\ 0,191 & -0,694 & 1,873 \end{bmatrix}.$$

На рис. 2 показана фазовая траектория внутри охватывающего эллипсоида с точностью  $\delta = 0,43$  в установившемся режиме.

Для сравнения рассчитаем закон управления для того же объекта, используя утверждение *Теоремы* с пороговым значением  $5 \cdot 10^{-3}$  для элементов  $Y$ . Тогда

$$K = \begin{bmatrix} 0,568 & 2,636 & 0,525 \\ -4,962 & -11,056 & -4,754 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Как видно, получена "менее разреженная" матрица, чем в предыдущем случае. Установившаяся погрешность в данном случае составляет  $\delta = 0,87$ . Фазовая траектория показана на рис. 3.

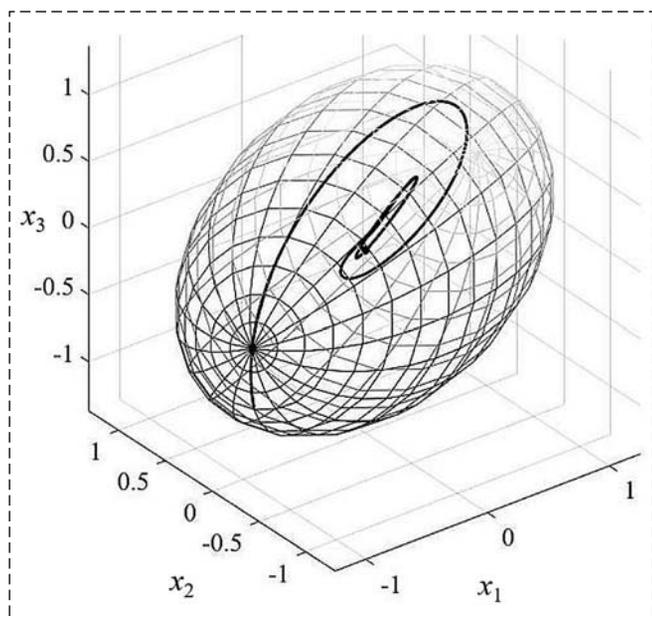


Рис. 2. Фазовая траектория замкнутой системы с разреженным регулятором (см. Замечание)

Fig. 2. The phase trajectory of the closed-loop system with a sparse controller (see Remark)

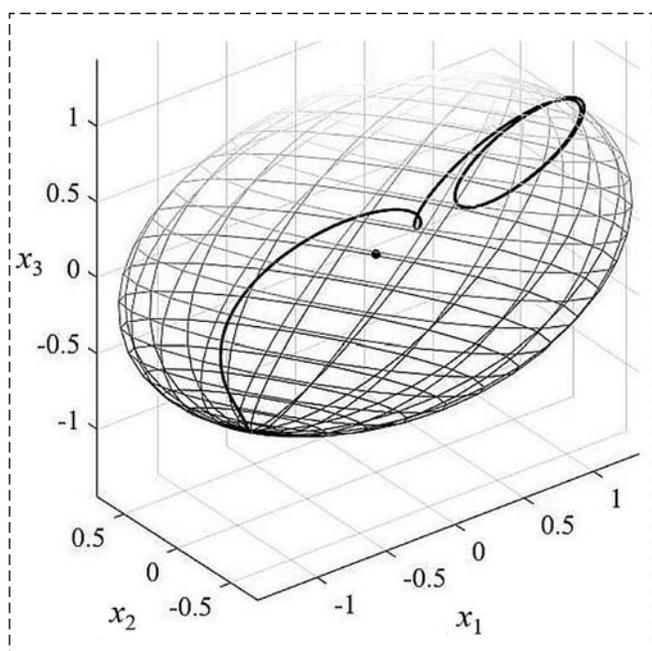


Рис. 3. Фазовая траектория замкнутой системы с разреженным регулятором (см. Теорему)

Fig. 3. The phase trajectory of the closed-loop system with a sparse controller (see Theorem)

#### ◀ Сравнение с аналогами

Сравним результаты, полученные в работах [5] и [12], с результатом работы предложенного алгоритма. Для визуального сравнения результатов рассмотрим объект с размерностью  $n = 2$ . Матрицы имеют следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1,259 & 1,623 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Пусть  $x(0)^T = [-1,492 \ 1,653]$ . Возмущение используется такое же, как и в предыдущем примере. Закон управления вычисляется так же, как и в первом примере. Матрица обратной связи определяется как

$$K = [-958 \ -1817].$$

Матрица эллипса выглядит следующим образом:

$$P = \begin{bmatrix} 3,132 & -1,649 \\ -1,649 & 3,472 \end{bmatrix}.$$

Сравним предложенную в данной работе систему управления с системой, рассчитанной для того же объекта в соответствии с алгоритмом работы [5]. Главное отличие предложенного алгоритма от результата статьи [5] заключается в том, что в работе [5] используется минимизация нормы  $\|P - I\|_1$  вместо (17) для оптимизации переходных процессов. Результаты моделирования представлены на рис. 4.

Полученные показатели качества представлены в таблице. Предложенный алгоритм в данном примере достигает большей точности за значительно меньший промежуток времени, чем алгоритм, предложенный в работе [5].

Теперь сравним с алгоритмом работы [12]. Для системы (1) данный алгоритм может быть

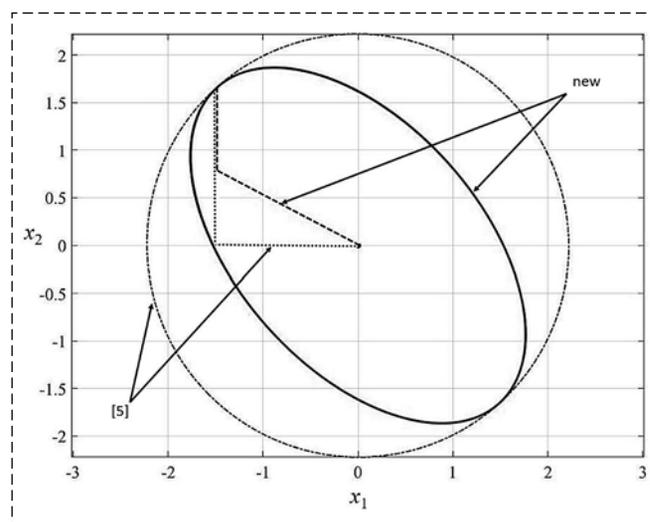


Рис. 4. Фазовые траектории и инвариантные эллипсоиды замкнутых систем: результат [5] и предложенный регулятор  
Fig. 4. Phase trajectories and invariant ellipsoids of the closed-loop systems: result [5] and the proposed controller

описан в виде следующей задачи выпуклого программирования:

$$\text{tr}(P + Z) \rightarrow \min,$$

где  $\text{tr}(\cdot)$  — след матрицы и  $Z = Z^T \in R^{m \times m}$ , с учетом условия (9), а также

$$AP + PA^T + \alpha P + BY + Y^T B^T + \frac{1}{\alpha} DD^T \leq 0$$

и

$$\begin{bmatrix} Z & Y^T \\ Y & P \end{bmatrix} \geq 0$$

с переменными  $P, Y, Z$  и фиксированным  $\alpha > 0$ .

Заметим, что в работе [12] задача управления формулируется для системы, замкнутой по выходу, с функционалом качества вида  $\text{tr}(CPC^T + B_2 Z B_2^T)$ , где  $C$  — выходная матрица, которая в нашем случае является единичной.

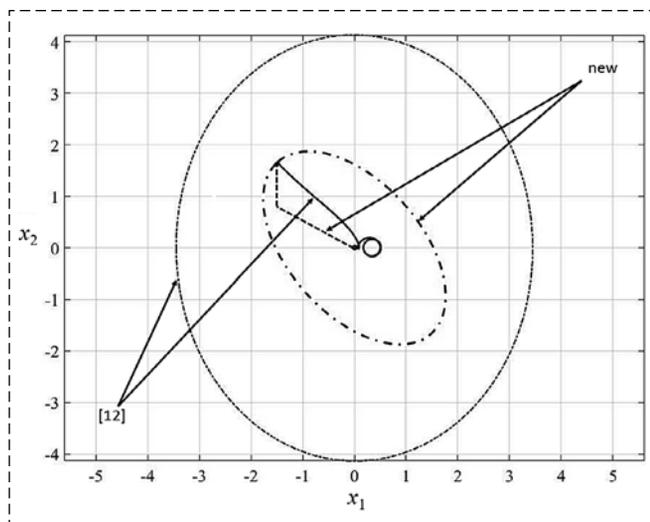


Рис. 5. Фазовые траектории и инвариантные эллипсоиды замкнутых систем: результат [12] и предложенный регулятор  
Fig. 5. Phase trajectories and invariant ellipsoids of closed-loop system systems: result [12] and the proposed controller

#### Параметры в алгоритмах управления

##### The control law parameters

Параметр	Алгоритм		
	Предложенный в данной работе	Алгоритм из работы [5]	Алгоритм из работы [12]
$\delta$	$2 \cdot 10^{-3}$	0,07	0,32
$\text{tr}(P)$	6,6	9,87	29
$\Delta P$	$2 \cdot 10^{-6}$	0,21	$8 \cdot 10^{-3}$
$T, \text{ с}$	5,6	355	—

Использование матриц  $B_2$  и  $Z$  обусловлено введением в систему обратной связи по выходу  $y(t) = Cx(t) + B_2 u(t)$  с условием, что  $B_2^T C = 0$ , где  $B_2$  — ненулевое. Такое дополнение сделано для того, чтобы избежать больших значений в управляющих сигналах. В случае обратной связи по состоянию получаем условие  $B_2^T I = 0$ , которое не может быть обеспечено выбором ненулевой матрицы  $B_2$ . Поэтому в данной работе составляющая  $B_2 u(t)$  не учитывалась при реализации системы управления из статьи [12], но оптимизационная задача переформулирована без упразднения компоненты  $Z$ . Такая адаптация результата статьи [12] к задаче управления по состоянию позволяет получить требуемые в постановке задачи значения в матрице  $K$ . В противном случае коэффициенты обратной связи могут достигать значений порядка  $10^9$ .

Результаты моделирования представлены на рис. 5 и в таблице.

В таблице параметр  $\Delta P$  определяет верхнюю границу для  $\limsup_{t \rightarrow \infty} [x^T(t) P^{-1} x(t)]$ , а  $T$  — время до входа в область ошибки 5 % и рассчитывается как

$$T = \{t : x(t) = 0,05 \sup(|x(t)|)\}.$$

Заметим, что для работы [12] значение  $T$  не указано, так как установившаяся ошибка никогда не достигает области 5 %. Время переходного процесса в этом случае составляет 1,3 с.

## Заключение

Предложенный алгоритм управления на основе метода инвариантных эллипсоидов обеспечивает лучшую (относительно рассмотренных аналогов) минимизацию возможных отклонений вектора состояния в переходных процессах от положения равновесия. Задача оптимизации сформулирована в терминах минимизации собственных значений матрицы эллипсоида вместо минимизации объема эллипсоида. Кроме того, сам выбор метода инвариантных эллипсоидов позволяет получить предварительную оценку дисперсии состояния системы за все время функционирования. Данные свойства особенно важны для систем с ограничениями по состоянию.

Кроме того, предложенный алгоритм позволяет получить разреженные по строке регуляторы без существенной потери качества функ-

ционирования за счет простой модификации исходного закона управления. Разреженность по столбцам также может быть получена без существенных изменений в структуре регулятора. В этом случае функционал качества в предлагаемом алгоритме может быть переформулирован с использованием  $c_1$ -нормы, которая накладывает разреженность столбцов и в результате минимизирует число необходимых датчиков. Такая вариация может быть интересна в некоторых практических задачах, поскольку позволяет учесть ограничения имеющейся аппаратной базы.

Результаты моделирования демонстрируют значительное улучшение качества регулирования по ряду показателей в сравнении с ближайшими аналогами и подтверждают выводы теоретической части работы.

#### Список литературы

1. Поляк Б. Т., Хлебников М. В., Щербаков П. С. Разреженная обратная связь в линейных системах управления // Автоматика и телемеханика. 2014. № 12. С. 13–27.
2. Grant M., Boyd S. CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 2.0 beta. URL: <http://cvxr.com/cvx>, September 2013.
3. Grant M., Boyd S. Graph implementations for nonsmooth convex programs, Recent Advances in Learning and Control (a tribute to M. Vidyasagar). Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, 2008. P. 95–110. URL: [http://stanford.edu/boyd/graph\\_dcp.html](http://stanford.edu/boyd/graph_dcp.html).
4. Boyd S. et al. Linear matrix inequalities in system and control theory // SIAM studies in applied mathematics. 1994. Vol. 15.

5. Фуртат И. Б., Гушин П. А., Перегудин А. А. Подавление возмущений с минимизацией эллипсоидов, ограничивающих фазовые траектории системы в переходном и установившемся режимах // Мехатроника, автоматизация, управление. 2020. Т. 21, № 4. С. 195–199.
6. Барабанов А. Е., Граничин О. Н. Оптимальный регулятор линейного объекта с ограниченной помехой // Автоматика и телемеханика. 1984. № 5. С. 39–46.
7. Tibshirani R. Regression shrinkage and selection via the lasso // Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological). 1996. Vol. 58, N. 1. P. 267–288.
8. Donoho D. L. Compressed sensing // IEEE Transactions on information theory. 2006. Vol. 52, N. 4. P. 1289–1306.
9. Kim S. J. et al.  $l_1$ -trend filtering // SIAM review. 2009. Vol. 51, N. 2. P. 339–360.
10. Lin F., Fardad M., Jovanovic M. Sparse feedback synthesis via the alternating direction // American Control Conference (ACC). 2012. P. 4765–4770.
11. Lin F., Fardad M., Jovanovic M. Augmented Lagrangian approach to design of structured optimal state feedback gains // IEEE Transactions on Automatic Control. 2011. Vol. 56, N. 12. P. 2923–2929.
12. Назин С. А., Поляк Б. Т., Топунов М. В. Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // Автоматика и телемеханика. 2007. № 3. С. 106–125.
13. Lin F., Fardad M., Jovanovic M. A linear matrix inequality approach to peak-to-peak gain // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 1996. Vol. 6. P. 899–927.
14. Blanchini F., Szafer M. Persistent disturbance rejection via static-state feedback // IEEE Transactions on Automatic Control. 1995. Vol. 40, N. 6. P. 1127–1131.
15. Furtat I. B. Robust Synchronization of the Structural Uncertainty Nonlinear Network with Delay and Disturbances // IFAC-PapersOnline. 2013 (Proc. of the 11th IFAC International Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing, ALCOSP 2013). P. 227–232.
16. Furtat I. B., Fradkov A. L. Robust Control of Multi-machine Power Systems with Compensation of Disturbances // International Journal of Electrical Power & Energy Systems. 2015. Vol. 73. P. 584–590.

## Optimization of Invariant Ellipsoid Technique for Sparse Controllers Design

S. A. Vrazhevsky<sup>1, 2</sup>, [vrazhevskij.s@gmail.com](mailto:vrazhevskij.s@gmail.com), J. V. Chugina<sup>1</sup>, [chugina.yulya@mail.ru](mailto:chugina.yulya@mail.ru),  
I. B. Furtat<sup>1</sup>, [cainenash@mail.ru](mailto:cainenash@mail.ru), D. E. Kononov<sup>2</sup>, [d.e.kononov@mail.ru](mailto:d.e.kononov@mail.ru) (corresponding author),

<sup>1</sup>Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences,  
St. Petersburg, 199178, Russian Federation,

<sup>2</sup>ITMO University, St. Petersburg, 197101, Russian Federation

Corresponding author: Kononov D. E., Student, ITMO University,  
St. Petersburg, 197101, Russian Federation, e-mail: [d.e.kononov@mail.ru](mailto:d.e.kononov@mail.ru)

Accepted on September 23, 2021

#### Abstract

The paper deals with the method for the design of linear controllers with sparse state feedback matrices for control the plants under conditions of unknown and bounded disturbances. The importance of the sparsity property in feedback can be explained by two factors. First, by minimizing the columnar norm of the feedback matrix in the control it becomes possible to use a minimum number of measuring devices. Secondly, by minimizing the row norm of the feedback matrix, the required number of executive (control) devices is minimized. Both properties, if they are achievable in the synthesis of the controller, reduce the cost of the system and improve the fault tolerance and quality of regulation by reducing the structural complexity. The search algorithm for sparse matrices is based on the method of invariant ellipsoids and is formulated as a solution to a system of linear matrix inequalities with additional constraints. A special set of optimization conditions is

proposed which for a disturbed system minimizes overshoot and overshoots in transient processes of the disturbed closed-loop system simultaneously with minimizing errors in the steady state. The proposed method also assumes the possibility of minimizing both the row norm of the feedback matrix and the column one, while preserving the robustness properties, which makes it possible to solve the sparse control problem (a sparse control is understood as a linear controller with a sparse feedback matrix). The efficiency of the proposed control scheme is confirmed by the results of computer modeling and comparison with some existing ones.

**Keywords:** optimization problem, convex optimization, invariant ellipsoid methods, sparse control

**Acknowledgements:** The main result was obtained at the expense of a grant from the President of the Russian Federation (project no. MD-1054.2020.8) at IPME RAS. The convex programming problem was supported by a grant from the Russian Foundation for Basic Research (project No. 20-08-00610) at IPME RAS. Numerical studies were carried out with a grant from the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-08-00246) at IPME RAS.

For citation:

Vrazhevsky S. A., Chugina J. V., Furtat I. B., Kononov D. E. Optimization of Invariant Ellipsoid Technique for Sparse Controllers Design, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol.23, no. 1, pp. 3–12.

DOI: 10.17587/mau.23.3-12

### References

1. Polyak B. T., Khlebnikov M. V., Shcherbakov P. S. Sparse feedback in linear control systems, *Automation and Remote Control*, 2014, vol. 75, pp. 2099–2111.
2. Grant M., Boyd S. CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 2.0 beta, available at: <http://cvxr.com/cvx>, September 2013.
3. Grant M., Boyd S. Graph implementations for nonsmooth convex programs, Recent Advances in Learning and Control (a tribute to M. Vidyasagar), Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, 2008, pp. 95–110, available at: [http://stanford.edu/boyd/graph\\_dcp.html](http://stanford.edu/boyd/graph_dcp.html).
4. Boyd S., Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. Linear matrix inequalities in system and control theory, *SIAM studies in applied mathematics*, 1994, vol. 15.
5. Furtat I. B., Gushchin P. A., Peregudin A. A. Disturbance Attenuation with Minimization of Ellipsoids Restricting Phase Trajectories in Transition and Steady State, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 4, pp. 195–199 (in Russian).
6. Barabanov A. E., Granichin O. N. An optimal controller of a linear plant subjected to constrained noise, *Automation and Remote Control*, 1984, vol. 45, no. 5, pp. 578–584.
7. Tibshirani R. Regression shrinkage and selection via the lasso, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 1996, vol. 58, no. 1, pp. 267–288.
8. Donoho D. L. Compressed sensing, *IEEE Transactions on information theory*, 2006, vol. 52, no. 4, pp. 1289–1306.
9. Kim S. J. et al.  $l_1$ -trend filtering, *SIAM review*, 2009, vol. 51, no. 2, pp. 339–360.
10. Lin F., Fardad M., Jovanovic M. Sparse feedback synthesis via the alternating direction, *American Control Conference (ACC)*, 2012, pp. 4765–4770.
11. Lin F., Fardad M., Jovanovic M. Augmented Lagrangian approach to design of structured optimal state feedback gains, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, vol. 56, no. 12, pp. 2923–2929.
12. Nazin S. A., Polyak B. T., Topunov M. V. Rejection of bounded exogenous disturbances by the method of invariant ellipsoids, *Automation and Remote Control*, 2007, vol. 68, pp. 467–486.
13. Lin F., Fardad M., Jovanovic M. A linear matrix inequality approach to peak-to-peak gain, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1996, vol. 6, pp. 899–927.
14. Blanchini F., Szaiaer M. Persistent disturbance rejection via static-state feedback, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, vol. 40, no. 6, pp. 1127–1131.
15. Furtat I. B. Robust Synchronization of the Structural Uncertainty Nonlinear Network with Delay and Disturbances, *IFAC-PapersOnline*, 2013 (Proc. of the 11th IFAC International Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing, ALCOSP 2013), pp. 227–232.
16. Furtat I. B., Fradkov A. L. Robust Control of Multi-machine Power Systems with Compensation of Disturbances, *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 2015, vol. 73, pp. 584–590.

15–18 марта 2022 г.



XXIII конференция молодых ученых  
"НАВИГАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ"  
Санкт-Петербург, Россия



В формат конференции включаются обзорные лекции ведущих ученых в области теории и практики построения современных систем навигации и управления движением и доклады участников конференции.

**Контактная информация:**

Тел.: +7 (812) 499 82 10 +7 (812) 499 81 57  
Факс: +7 (812) 232 33 76 E-mail: [icins@eprib.ru](mailto:icins@eprib.ru)