

Ю. А. Быковцев, аспирант, ассистент, bykovcev@mirea.ru,
МИРЭА—Российский технологический университет, Москва

Анализ и синтез нечеткого регулятора методом фазовой плоскости

Обсуждается решение задачи анализа и синтеза системы управления с нечетким регулятором методом фазовой плоскости. Нелинейное преобразование, построенное по нечеткой модели Сугено, аппроксимировано кусочно-линейной характеристикой, состоящей из трех участков: двух кусочно-линейных и одного кусочно-постоянного. Такой подход позволяет ограничиться тремя листами фазовых траекторий, каждый из которых строится на основе дифференциального уравнения второго порядка. С учетом этой особенности рассмотрена методика "сшивания" трех листов фазовых траекторий и получена аналитическая база, позволяющая определить условия "сшивания" фазовых траекторий для различных вариантов кусочно-линейной аппроксимации характеристики нечеткого регулятора. Ввиду специфики используемой аппроксимированной модели нечеткого регулятора приведены полезные аналитические соотношения, с помощью которых можно вычислить время движения изображающей точки по каждому участку с привлечением аппарата численной оптимизации. Для варианта аппроксимации из трех участков предложена методика синтеза нечеткого регулятора, позволяющая определить область параметров и диапазон входных сигналов, при которых обеспечивается аperiodический процесс и заданное время регулирования. На модели системы автоматического управления приводным уровнем мехатронного модуля показано, что исследование нечеткой системы по такой аппроксимированной характеристике нечеткого регулятора дает вполне достоверные результаты. Проведенные исследования влияния степени аппроксимации на качество управления показывают, что аппроксимированная характеристика нечеткого регулятора дает незначительное ухудшение качества по сравнению с гладкой характеристикой нечеткого регулятора. Поскольку возможности метода фазовой плоскости ограничены вторым порядком линейной части системы автоматического управления, то на примере привода мехатронного модуля рассмотрено влияние третьего порядка на динамику системы. Показано, что учет электрической постоянной времени приводит к перерегулированию в пределах 5...10 %. Такое перерегулирование может быть устранено за счет предложенных рекомендаций по коррекции статической характеристики нечеткого регулятора.

Ключевые слова: анализ, синтез, нечеткий регулятор, фазовая плоскость, нечеткая модель Сугено

Введение

Практика последних двух десятилетий показывает, что область применения нечетких регуляторов постепенно расширяется от первых вариантов бытовой fuzzy-техники до роботов и беспилотных летательных аппаратов [1—3, 10—16]. Несмотря на то, что такие регуляторы обладают рядом интересных свойств, которые позволяют рассматривать их как вполне перспективную альтернативу традиционным ПИД регуляторам, процесс внедрения происходит достаточно медленно. Объясняется это, с одной стороны, отсутствием отработанных аппаратных решений, а с другой — отсутствием удобных инженерных методик анализа и синтеза САУ с нечеткими регуляторами (НР). Несмотря на появление фундаментальных работ типа [4—7], проблема создания инженерных методик остается актуальной.

В настоящей статье САУ с НР рассматриваются с позиции нелинейных систем и показана воз-

можность достаточно эффективного применения метода фазовой плоскости для синтеза НР.

Структурная схема САУ с аппроксимированной моделью НР

Структурная схема САУ с НР представлена на рис. 1. В качестве практического прототипа такой системы может рассматриваться мехатронный модуль на базе двигателя постоянного тока, и, соответственно, линейная часть (ЛЧ) (с учетом ограничений метода фазовой плоскости) описана передаточной функцией второго порядка $W_{\text{лч}}(p) = \frac{K_{\text{л}}}{p(1 + pT)}$.

В подавляющем большинстве работ, посвященных синтезу НР, при подборе параметров используется обобщение экспертных знаний, не учитывающих конкретные требования к качеству САУ, хотя именно здесь заложен большой резерв возможностей НР.

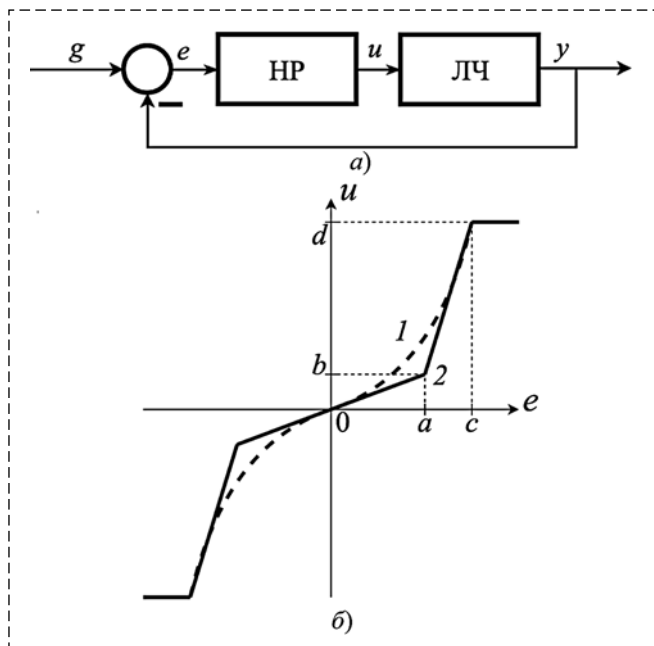


Рис. 1. Структурная схема САУ с НР (а) и статическая характеристика НР (1 — исходная, 2 — аппроксимированная) (б)
Fig. 1. Structural scheme of ACS with FR (a) and static characteristic of FR (1 — initial, 2 — approximated) (б)

Действительно, более глубокий анализ характеристик НР показывает, что:

- НР (с позиции описания его как элемента САУ) является статическим нелинейным элементом (НЭ);
- меняя параметры нечеткого логического вывода (НЛВ), можно менять вид нелинейной характеристики НР $u(e)$ и, соответственно, менять характер управляющего воздействия, подаваемого на ЛЧ;
- при внимательном рассмотрении НЭ видно, что удобно аппроксимировать его характеристику, выделив два участка аппроксимации (рис. 1, б). Полученная характеристика не только объясняет потенциальные возможности НР по улучшению качества управления, но и показывает возможность применения известных в теории автоматического управления инженерных методов для анализа и синтеза САУ с НР.

На рис. 1, б показан наиболее простой способ аппроксимации НЭ на основе двух кусочно-линейных функций и одной кусочно-постоянной. Как видно, такого простого решения по построению фазовых портретов системы, как в случае с релейными системами (где релейные характеристики имеют кусочно-постоянный характер), получить не удастся, но тем не менее придется исследовать (в соответствии с тремя участками аппроксимации) три листа

фазовых траекторий. На аппроксимированной характеристике НР обозначим точки переключения с одного линейного участка на другой, тогда на участке $[0, a]$ НР имеет малый коэффициент усиления $K_1 = \frac{b}{a}$, на участке $[a, c]$ — большой коэффициент усиления $K_2 = \frac{d-b}{c-a}$, а на участке $[c, \infty]$ — насыщение с постоянным уровнем $u = d$.

Развивая для данного класса нелинейных моделей метод фазовой плоскости, будем решать задачу синтеза параметров НР (или параметров нелинейного преобразования $u(e)$, соответствующего нечеткой модели Сугено) в заданном диапазоне входных воздействий.

Фазовая плоскость САУ с НР

Составим дифференциальные уравнения (ДУ), описывающие движение изображающей точки на каждом из участков нелинейной характеристики НР.

Если $e \in [0, a]$, то система описывается линейным однородным ДУ 2-го порядка:

$$T \frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{de}{dt} + K_a K_1 e = 0, \quad (1)$$

где K_a — коэффициент усиления линейной части.

Введем замену переменных $e = x_1$, $\dot{e} = \frac{dx_1}{dt}$. Тогда уравнение (1) преобразуется в систему

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{K_1 K_a}{T} x_1 - \frac{1}{T} x_2. \end{cases} \quad (2)$$

Система (2) имеет единственное положение равновесия (особую точку) в начале координат $(0, 0)$. В зависимости от значений коэффициента K_1 возможны три варианта особой точки:

- если $K_1 > \frac{1}{4K_a T}$, то особая точка — устойчивый фокус;
- если $K_1 = \frac{1}{4K_a T}$, то особая точка — устойчивый вырожденный узел;
- если $K_1 < \frac{1}{4K_a T}$, то особая точка — устойчивый узел.

Разделив в системе (2) второе уравнение на первое, получим уравнение касательных к фазовым траекториям:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-K_1 K_a x_1 - x_2}{T x_2}. \quad (3)$$

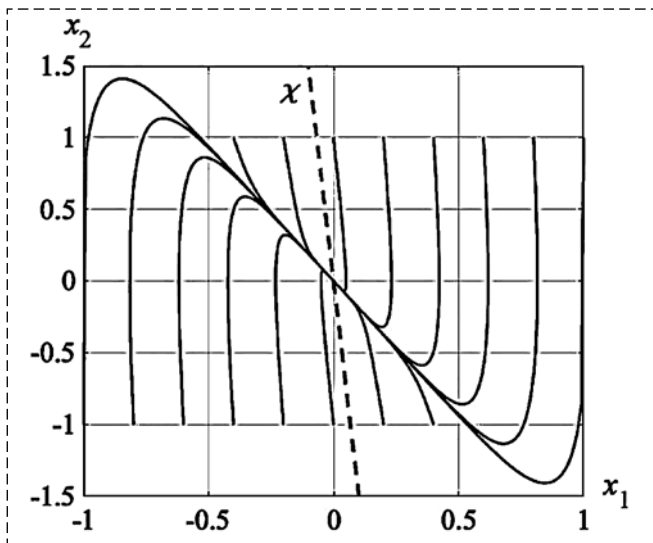


Рис. 2. Фазовый портрет, соответствующий особой точке типа "устойчивый узел"

Fig. 2. Phase portrait corresponding to equilibrium point of the "sink" type

Для особых точек "узел" и "устойчивый узел" на фазовом пространстве имеет место фазовая траектория, касательная к которой постоянна и проходит через особую точку (точку с координатами (0; 0)) (рис. 2). Тогда должно существовать такое число χ , что

$$\begin{cases} x_2 = \chi x_1; \\ \frac{dx_2}{dx_1} = \chi. \end{cases} \quad (4)$$

Фазовая траектория, совпадающая с $x_2 = \chi x_1$, является предельной для обеспечения аperiodического процесса, а фазовые траектории, лежащие ниже предельной, будут соответствовать режиму перерегулирования в системе.

Подставляя соотношения (4) в уравнение (3) и решая получившееся уравнение относительно χ , находим минимальный действительный корень

$$\chi = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4TK_a K_1}}{2T}.$$

Таким образом, для обеспечения процессов в САУ без перерегулирования необходимо, чтобы при достижении фазовой траекторией границ участка малого коэффициента усиления НР производная ошибки x_2 удовлетворяла условию

$$x_2 \geq -x_1 \frac{1 + \sqrt{1 - 4TK_a K_1}}{2T}, \quad (5)$$

где $K_1 \leq \frac{1}{4TK_a}$.

Неравенство (5) определяет условия "сшивания" двух фазовых портретов при изменении коэффициента усиления НР с K_2 на K_1 , при котором обеспечивается аperiodический переходной процесс.

На участке большого коэффициента усиления вход-выход НР описывается уравнением $u(e) = K_2(e - a) + b$, а уравнение, описывающее динамику системы на данном участке, имеет вид

$$T \frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{de}{dt} + K_2 K_a e = K_2 K_a a - K_a b. \quad (6)$$

Проводя вычисления по аналогии с (1) и (2) и вводя переменные $x_1 = t + a - \frac{b}{K_2}$, $x_2 = u(t)$, получим однородное ДУ 1-го порядка

$$\frac{du}{dt} = -\frac{K_2 K_a t + u}{Tu}. \quad (7)$$

Уравнение (7) решается стандартной заменой $u = zt$, $\frac{du}{dt} = z't + z$ и, после подстановки замены и разделения переменных, приводится к виду

$$\frac{zdz}{z^2 + \frac{z}{T} + \frac{K_2 K_a}{T}} = -\frac{dt}{t}. \quad (8)$$

В зависимости от вида корней знаменателя левой части (8) возможны три ситуации разложения последнего в сумму:

1. $0 < K_2 < \frac{1}{4K_a T}$. Тогда $z_1 \neq z_2$; $\text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2) = 0$; $z_1 < 0, z_2 < 0$, и особая точка соответствует устойчивому узлу. Решение уравнения (8) в таком случае имеет вид

$$\begin{aligned} A \ln \left| z + \frac{1 - T\sqrt{D}}{2T} \right| + B \ln \left| z + \frac{1 + T\sqrt{D}}{2T} \right| = \\ = -\ln \left| x_1 + \frac{b}{K_2} - a \right| + \ln C, \end{aligned} \quad (9)$$

где $A = \frac{-1 + T\sqrt{D}}{2T\sqrt{D}}$, $B = \frac{1 + T\sqrt{D}}{2T\sqrt{D}}$, $D = \frac{1}{T^2} - \frac{4K_a K_2}{T}$.

2. $K_2 = \frac{1}{4K_a T}$. Тогда $z_1 = z_2$; $\text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2) = 0$; $z_{1,2} < 0$, и особая точка соответствует вырожденному устойчивому узлу. Решение уравнения (8) в таком случае имеет вид

$$\ln \left| z + \frac{T}{2} \right| + \frac{T}{2z + T} = -\ln \left| x_1 + \frac{b}{K_2} - a \right| + \ln C. \quad (10)$$

3. $K_2 > \frac{1}{4K_a T}$. Тогда $z_1 \neq z_2$; $\text{Im}(z_1) \neq 0$, $\text{Im}(z_2) \neq 0$; $\text{Re}(z_1) < 0, \text{Re}(z_2) < 0$, и особая точка

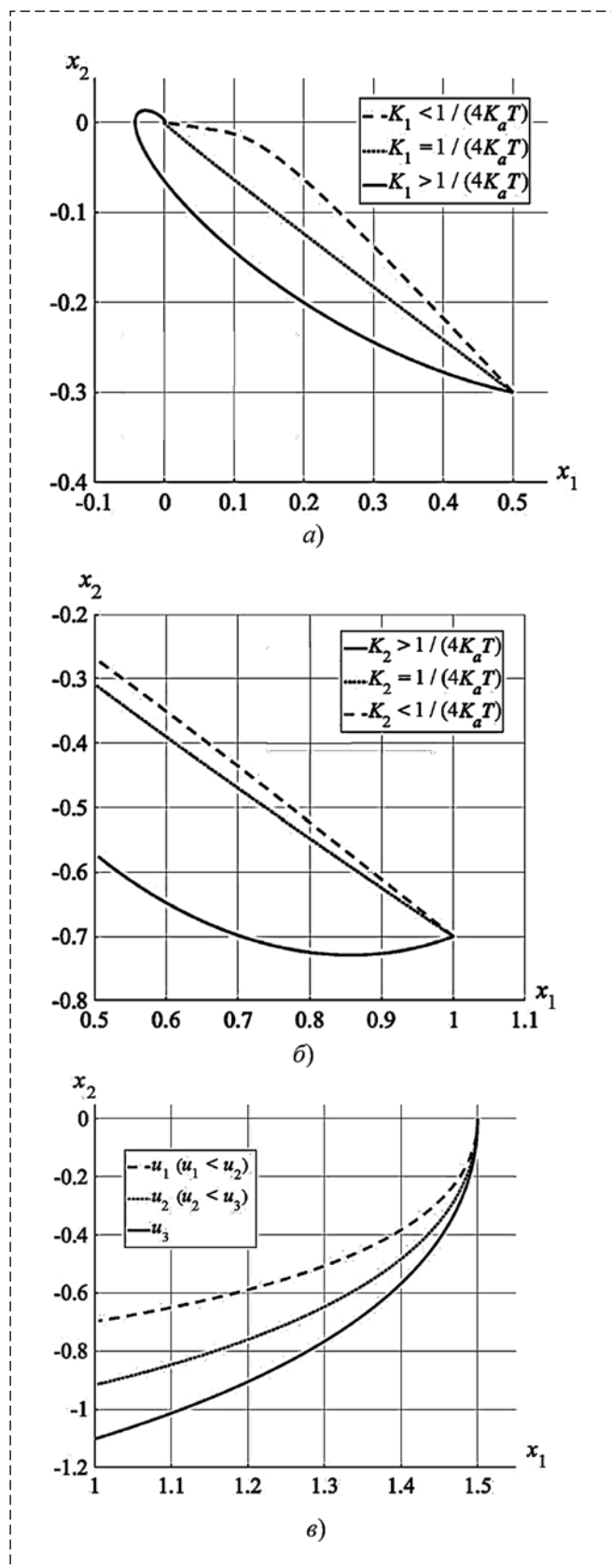


Рис. 3. Фазовые траектории для трех участков аппроксимированной нелинейной характеристики НР (малого коэффициента усиления (а), большого (б) и насыщения (в))

Fig. 3. Phase trajectories for three sections of the approximated nonlinear characteristics of the FR (small gain (a), big gain (b) and saturation (c))

соответствует устойчивому фокусу. С учетом связи логарифма комплексного числа с обратными тригонометрическими функциями получаем решение уравнения (8) в следующем виде:

$$\frac{1}{2} \ln \left(z^2 + \frac{z}{T} + \frac{K_a K_2}{T} \right) - \frac{1}{T\sqrt{-D}} \arctg \left(\frac{2Tz+1}{T\sqrt{-D}} \right) = -\ln \left| x_1 + \frac{b}{K_2} - a \right| + \ln C, \quad (11)$$

$$\text{где } D = \frac{1}{T^2} - \frac{4K_a K_2}{T}.$$

Уравнения (9)–(11) задают на фазовом пространстве семейство траекторий движения изображающей точки системы при работе НР на участке с коэффициентом усиления K_2 .

Третьим участком характеристики НР является зона насыщения $u(e) = d$ (при $e \in [c; \infty]$), система при этом описывается ДУ 2-го порядка

$$T \frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{de}{dt} = -K_a d, \quad (12)$$

решение которого имеет вид

$$dK_a \ln |x_2 + dK_a| - Tx_2 = x_1 + C. \quad (13)$$

Полученные аналитические зависимости для фазовых траекторий на каждом из участков аппроксимированной нелинейной характеристики НР позволяют полностью описать процессы в рассматриваемой нечеткой системе. На рис. 3 показаны фазовые траектории для трех участков аппроксимации при различных значениях K_1 , K_2 , u .

Сшивание фазовых траекторий

Развиваемый в статье подход к синтезу НР базируется на широко известном методе "припасовывания" и состоит в последовательном определении условий "сшивания" фазовых листов для выбранной аппроксимированной характеристики НР в направлении от положения равновесия к началу движения изображающей точки. При этом считается, что на момент начала движения система находилась в состоянии покоя, т. е. $x_2 = 0$. Введем параметр $\Theta = (x_1; x_2)$, определяющий условия сшивания двух фазовых листов, причем $\Theta' = (x_1'; x_2')$ задает условия сшивания текущего фазового листа с предыдущим, а $\Theta'' = (x_1''; x_2'')$ — текущего со следующим. Необходимо отметить, что так как сшивание фазовых траекторий происходит при движении слева направо по фазовому портрету, параметр Θ' всегда известен, а Θ'' опреде-

ляется для кусочно-линейного участка из уравнений (11)–(13), а для кусочно-постоянного участка — из уравнения (15). Для этого сначала по известному Θ^l находится свободный член C , а затем по нему находятся значения Θ^r . В рамках данной статьи, как было сказано ранее, характеристика НР аппроксимируется двумя кусочно-линейными участками и одним кусочно-постоянным, поэтому границы "сшивания" известны заранее. Для кусочно-линейного участка $x_1^l = a$, $x_1^r = c$, и связь между x_2^l и x_2^r выражается следующими уравнениями:

$$1. 0 < K_2 < \frac{1}{4K_a T}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{-1+T\sqrt{D}}{2T\sqrt{D}} \ln \left| \frac{K_2 x_2^l}{b} + \frac{1-T\sqrt{D}}{2T} \right| + \\ & + \frac{1+T\sqrt{D}}{2T\sqrt{D}} \ln \left| \frac{K_2 x_2^l}{b} + \frac{1+T\sqrt{D}}{2T} \right| + \ln \left| \frac{b}{d} \right| = \\ & = \frac{-1+T\sqrt{D}}{2T\sqrt{D}} \ln \left| \frac{K_2 x_2^r}{d} + \frac{1-T\sqrt{D}}{2T} \right| + \\ & + \frac{1+T\sqrt{D}}{2T\sqrt{D}} \ln \left| \frac{K_2 x_2^r}{d} + \frac{1+T\sqrt{D}}{2T} \right|, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{где } D = \frac{1}{T^2} - \frac{4K_a K_2}{T}.$$

$$2. K_2 = \frac{1}{4K_a T}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \ln \left| \frac{K_2 x_2^l}{b} + \frac{T}{2} \right| + \frac{Tb}{2K_2 x_2^l + Tb} + \ln \left| \frac{b}{d} \right| = \\ & = \ln \left| \frac{K_2 x_2^r}{d} + \frac{T}{2} \right| + \frac{Td}{2K_2 x_2^r + Td}. \end{aligned} \quad (15)$$

$$3. K_2 > \frac{1}{4K_a T}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \ln \left(\left(\frac{K_2 x_2^l}{b} \right)^2 + \frac{K_2 x_2^l}{Tb} + \frac{K_a K_2}{T} \right) - \\ & - \frac{2}{T\sqrt{-D}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2TK_2 x_2^l + b}{bT\sqrt{-D}} \right) + 2 \ln \left| \frac{b}{d} \right| = \\ & = \ln \left(\left(\frac{K_2 x_2^r}{d} \right)^2 + \frac{K_2 x_2^r}{Td} + \frac{K_a K_2}{T} \right) - \\ & - \frac{2}{T\sqrt{-D}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2TK_2 x_2^r + d}{dT\sqrt{-D}} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{где } D = \frac{1}{T^2} - \frac{4K_a K_2}{T}.$$

Необходимо отметить, что значения x_2^l , удовлетворяющего уравнениям (14)–(16), в общем случае может не существовать, соответственно, отсутствуют и условия "сшивания" Θ^r .

Учитывая, что в исходной постановке задачи процесс в системе начинается с нулевым значением производной ($x_2^r = 0$) (рис. 4, см. вторую сторону обложки), для упрощения описания методики настройки НР приведем соотношения, связывающие x_1^r и x_2^l . Для участка НР с коэффициентом усиления K_2 они имеют вид:

$$1. 0 < K_2 < \frac{1}{4K_a T}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{-1+T\sqrt{D}}{2T\sqrt{D}} \ln \left| \frac{K_2 x_2^l}{b} + \frac{1-T\sqrt{D}}{2T} \right| + \\ & + \frac{1+T\sqrt{D}}{2T\sqrt{D}} \ln \left| \frac{K_2 x_2^l}{b} + \frac{1+T\sqrt{D}}{2T} \right| + \ln \left| \frac{b}{K_2} \right| = \\ & = \frac{-1+T\sqrt{D}}{2T\sqrt{D}} \ln \left| \frac{1-T\sqrt{D}}{2T} \right| + \\ & + \frac{1+T\sqrt{D}}{2T\sqrt{D}} \ln \left| \frac{1+T\sqrt{D}}{2T} \right| + \ln \left| x_1^r - a + \frac{b}{K_2} \right|, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{где } D = \frac{1}{T^2} - \frac{4K_a K_2}{T}.$$

$$2. K_2 = \frac{1}{4K_a T}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \ln \left| \frac{K_2 x_2^l}{b} + \frac{T}{2} \right| + \frac{Tb}{2K_2 x_2^l + Tb} + \ln \left| \frac{b}{K_2} \right| = \\ & = \ln \left| \frac{T}{2} \right| + 1 + \ln \left| x_1^r - a + \frac{b}{K_2} \right|. \end{aligned} \quad (18)$$

$$3. K_2 > \frac{1}{4K_a T}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \ln \left(\left(\frac{K_2 x_2^l}{b} \right)^2 + \frac{K_2 x_2^l}{Tb} + \frac{K_a K_2}{T} \right) - \\ & - \frac{2}{T\sqrt{-D}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2TK_2 x_2^l + b}{bT\sqrt{-D}} \right) + 2 \ln \left| \frac{b}{K_2} \right| = \\ & = \ln \left(\frac{K_a K_2}{T} \right) - \frac{2}{T\sqrt{-D}} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{T\sqrt{-D}} \right) + \\ & + 2 \ln \left| x_1^r - a + \frac{b}{K_2} \right|, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{где } D = \frac{1}{T^2} - \frac{4K_a K_2}{T}.$$

Для участка насыщения

$$x_1^r = T x_2^l - d K_a T \ln \left| \frac{x_2^l}{d K_a} + 1 \right| + c. \quad (20)$$

Поскольку фазовая траектория движения нечеткой системы строится путем "сшивания" фазовых траекторий, соответствующих трем участкам аппроксимированной кусочно-линейной характеристики НР, то время регулирования есть сумма интервалов времени, затрачиваемых изображающей точкой на прохождение каждого из участков. Используемый в данной статье подход состоит в последовательном определении этих интервалов на основе решений ДУ, описывающих динамику системы на каждом участке, начиная от точки начальных условий движения до положения равновесия. С учетом специфики используемой аппроксимированной модели НР приведем полезные соотношения, с помощью которых можно вычислить время движения изображающей точки по каждому участку. Для участка с коэффициентом усиления K_1 :

$$1. \ 0 \leq K_1 < \frac{1}{4K_a T} : \begin{cases} x_1^l = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}; \\ C_1 = \frac{x_2^r - \lambda_2 x_1^r}{\lambda_1 - \lambda_2}; \\ C_2 = \frac{x_2^r - \lambda_1 x_1^r}{\lambda_2 - \lambda_1}, \end{cases} \quad (21)$$

где $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{D}}{2T}$, $D = 1 - 4K_1 K_a T$.

$$2. \ K_1 = \frac{1}{4K_a T} : \begin{cases} x_1^l = (C_1 t + C_2) e^{-\frac{t}{2T}}; \\ C_1 = x_2^r + \frac{x_1^r}{2T}; \\ C_2 = x_1^r. \end{cases} \quad (22)$$

Для участка с коэффициентом усиления K_2 :

$$1. \ 0 \leq K_2 < \frac{1}{4K_a T} : \begin{cases} x_1^l = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + g; \\ C_1 = \frac{x_2^r + \lambda_2(g - x_1^r)}{\lambda_1 - \lambda_2}; \\ C_2 = \frac{x_2^r + \lambda_1(g - x_1^r)}{\lambda_2 - \lambda_1}. \end{cases} \quad (23)$$

$$2. \ K_2 = \frac{1}{4K_a T} : \begin{cases} x_1^l = (C_1 t + C_2) e^{-\frac{t}{2T}} + g; \\ C_1 = x_2^r + \frac{x_1^r - g}{2T}; \\ C_2 = x_1^r - g. \end{cases} \quad (24)$$

$$3. \ K_2 > \frac{1}{4K_a T} : \begin{cases} x_1(t) = e^{-\frac{t}{2T}} \left(C_1 \cos\left(\frac{t\sqrt{-D}}{2T}\right) + \right. \\ \left. + C_2 \sin\left(\frac{t\sqrt{-D}}{2T}\right) \right) + g; \\ C_1 = x_1^r - g; \\ C_2 = \frac{2Tx_2^r + x_1^r}{\sqrt{-D}}, \end{cases} \quad (25)$$

где $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{D}}{2T}$, $D = 1 - 4K_1 K_a T$, $g = a - \frac{b}{K_2}$.

Для участка насыщения:

$$\begin{aligned} x_1^l &= C_1 + C_2 e^{-\frac{t}{T}} - dK_a t; \\ C_1 &= x_1^r + Tx_2^r + dK_a T; \\ C_2 &= -Tx_2^r - dK_a T. \end{aligned} \quad (26)$$

Следует отметить, что время в полученных уравнениях содержится в неявном виде, что затрудняет его определение, однако с привлечением методов численной оптимизации эта задача может быть успешно решена.

Алгоритм настройки НР на основе метода фазовой плоскости

При обсуждении алгоритма настройки НР будем полагать, что в САУ с НР требуется обеспечить апериодический переходной процесс в некотором диапазоне задающих воздействий ($g_{\min} \div g_{\max}$). На фазовом пространстве каждому задающему воздействию будет соответствовать своя фазовая траектория, причем, как известно, эти фазовые траектории не пересекаются. Это означает, что если синтезированный НР обеспечивает апериодический переходной процесс для $g_{\max}$, то для любого задающего воздействия $g \leq g_{\max}$ процесс в системе будет апериодическим.

На рис. 5, а (см. вторую сторону обложки) показана предельная фазовая траектория, соответствующая апериодическому переходному процессу для некоторого НР. В частном случае, когда необходимо обеспечить апериодический переходной процесс для любого значения задающего воздействия, "сшивание" фазовых траекторий можно выполнять "классически" справа налево, причем сшивание фазового листа, соответствующего движению изображающей точки на участке насыщения, с соседним фазовым листом необходимо проводить на

уровне (или ниже) асимптоты фазовых траекторий (рис. 5, б, см. вторую сторону обложки).

Пусть параметры линейной части системы управления определены, известно максимальное задающее воздействие g , а сама система на момент подачи задающего воздействия находится в состоянии покоя (т. е. $x_2 = 0$). Тогда для синтеза НР, обеспечивающего апериодический переходной процесс, предлагается использовать следующий алгоритм:

1. На аппроксимированной характеристике НР (см. рис. 1, а) задать начальные значения для параметров a , b и d . Рекомендуется выбирать начальные значения a и b минимальными, при этом соблюдая соотношение $b \leq \frac{a}{4TK_a}$. Значение d задать равным максимально допустимому управляющему воздействию на объект управления, c — максимальному задающему воздействию (g).

2. Рассчитать $K_1 = \frac{b}{a}$ и $K_2 = \frac{d-b}{c-a}$.

3. По уравнению (5) рассчитать минимальное значение $x_2^{K_1}$ при $x_1 = a$.

4. По уравнениям (17)—(19) в зависимости от K_2 найти значение x_1^r при $x_2^l = x_2^{K_1}$, определенном на шаге 3. Если x_1^r меньше c , то перейти к шагу 7.

5. По уравнениям (14)—(16) в зависимости от K_2 найти значение x_2^r при $x_2^l = x_2^{K_1}$.

6. По уравнению (20) определить значение x_1^r при $x_2^l = x_2^r$.

7. Если x_1^r больше максимального значения задающего воздействия, то текущие значения a , b , c и d являются искомыми параметрами нелинейной характеристики НР, и алгоритм на этом завершается. Если x_1^r меньше, то необходимо увеличить b и перейти шагу 2. Если при увеличении b соотношение $b \leq \frac{a}{4TK_a}$ нарушается, то необходимо увеличить значение a , величину b принять минимальной и перейти к шагу 2. Если при увеличении a его значение превышает максимальное задающее воздействие, то необходимо увеличить c , значения a и b сделать минимальными и перейти к шагу 2. Критерием остановки алгоритма (помимо указанного в начале пункта) является ситуация, когда $\frac{d}{c} \leq \frac{1}{4TK_a}$ — в этом случае необходимо изменить начальное значение d и заново начать алгоритм.

Если помимо апериодического переходного процесса стоит также требование по обе-

спечению времени регулирования $t_{\text{рег}}$ для задающего воздействия g^* не больше заданного $t_{\text{рег}}^{\text{зад}}$, то после завершения расчета по алгоритму, представленному выше, необходимо рассчитать время регулирования по следующему алгоритму:

1. Приравнять $x_1^r = g^*$ и $x_2^r = 0$.

2. Если $x_1^r \leq c$, то перейти к следующему шагу, иначе исходя из начальных условий по уравнению (20) определить x_2^l , а из уравнения (26) определить время t_i при $x_1^l = c$. Добавить это время к общему времени регулирования. Приравнять $x_1^r = c$, $x_2^r = x_2^l$ и перейти к следующему шагу.

3. Если $x_1^r \leq a$, то перейти к следующему шагу, иначе по уравнениям (14)—(16) (если $x_2^r \neq 0$) или по уравнениям (17)—(19) (если $x_2^r = 0$) определить x_2^l , а из уравнений (23)—(25) определить время t_i при $x_1^l = a$. Добавить это время к общему времени регулирования. Приравнять $x_1^r = a$ и $x_2^r = x_2^l$ и перейти к следующему шагу.

4. По уравнениям (21)—(22) вычислить время t_i при $x_1^l = 0,05g^*$ (время до попадания в 5 %-ный "коридор") добавить это время к общему времени регулирования. Алгоритм на этом завершен.

Если полученное время регулирования $t_{\text{рег}}$ больше заданного $t_{\text{рег}}^{\text{зад}}$, то необходимо продолжить определение параметров нелинейной характеристики регулятора исходя из предложенного алгоритма.

Экспериментальные исследования, как отмечалось в начале статьи, проводятся на базе приводного уровня мехатронного робота с передаточной функцией

$$\frac{K_{\text{л}}}{p(1 + pT)},$$

где $K_{\text{л}} = 1$, $T = 0,5$.

На рис. 6 представлено сравнение переходного процесса в САУ с НР, синтезированным по описанной выше методике, с линейным регулятором, обеспечивающим максимальную степень устойчивости [8]. Аппроксимированная характеристика НР в соответствии с описанным алгоритмом имеет следующие параметры: $a = 0,7$, $b = 0,22$, $c = 1,3$, $d = 7$. Из рис. 6 видно, что хоть оба регулятора обеспечивают апериодический процесс, учет особенностей нелинейной характеристики НР в предлагаемом алгоритме позволил уменьшить время регулирования более чем в два раза (до 2,2 с).

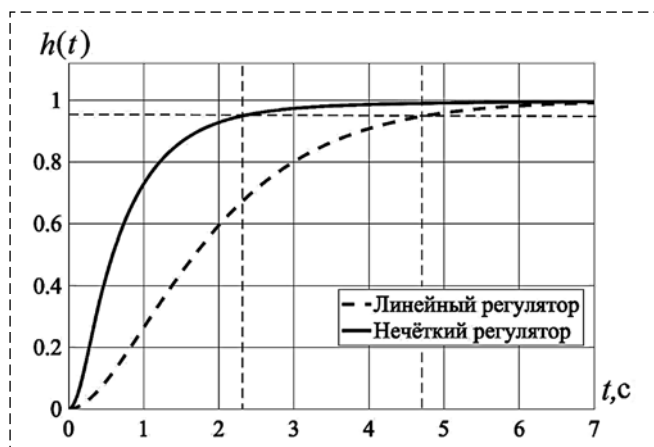


Рис. 6. Переходные процессы в САУ с линейным регулятором и синтезированным НР

Fig. 6. Transient processes in the ACS with a linear regulator and a synthesized FR

Покажем, как посредством механизма нечеткого логического вывода Сугено синтезировать НР с указанными выше параметрами. Для входной лингвистической переменной "ОШИБКА" зададим множество из пяти значений: "БОЛЬШАЯ ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ", "ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ", "НУЛЕВАЯ", "ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ" и "БОЛЬШАЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ". Для значений "БОЛЬШАЯ ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ" и "БОЛЬШАЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ" будем использовать функции принадлежности (ФП) трапецевидной формы, для остальных — треугольной. При расположении функций принадлежности необходимо придерживаться следующего алгоритма:

1. Расположить вершину ФП термы "НУЛЕВАЯ" над нулем, а боковые границы на значениях a и $-a$ соответственно.

2. Расположить вершину ФП термы "ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ" над a , а боковые границы на значениях 0, c соответственно.

3. Расположить левую вершину ФП термы "БОЛЬШАЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ" над c , а левую границу на значении a .

4. Повторить шаги 2 и 3 симметрично на отрицательном отрезке входного диапазона.

На рис. 7, а показано расположение функций принадлежности входных терм, отвечающих алгоритму, описанному выше (μ — степень принадлежности). Выходная лингвистическая переменная "НАПРЯЖЕНИЕ" также имеет пять лингвистических значений — "БОЛЬШОЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ", "ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ", "НУЛЕВОЕ", "ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ" и "БОЛЬШОЕ ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ", — функции принадлежности которых зададим в виде константных значений. При этом ФП терм "ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ" и "ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ" имеют значения b и $-b$ соответственно, термы "БОЛЬШОЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ" и "БОЛЬШОЕ ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ" — значения d и $-d$. ФП термы "НУЛЕВОЕ" имеет значение нуль. Зададим продукционные правила в следующем виде:

- если "ОШИБКА" есть "БОЛЬШАЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ", то "НАПРЯЖЕНИЕ" есть "БОЛЬШОЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ";
- если "ОШИБКА" есть "ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ", то "НАПРЯЖЕНИЕ" есть "ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ";
- если "ОШИБКА" есть "НУЛЕВАЯ", то "НАПРЯЖЕНИЕ" есть "НУЛЕВОЕ";
- если "ОШИБКА" есть "ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ", то "НАПРЯЖЕНИЕ" есть "ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ";

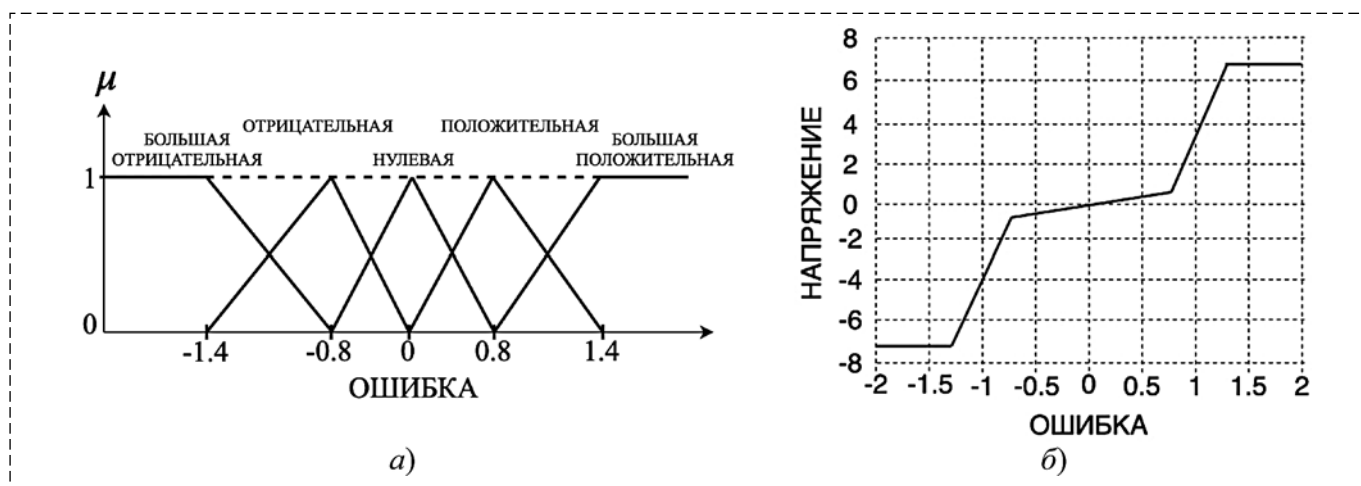


Рис. 7. Расположение входных терм (а) и нелинейная характеристика синтезированного нечеткого регулятора (б)

Fig. 7. The location of the input terms (a) and the nonlinear characteristic of the synthesized fuzzy regulator (b)

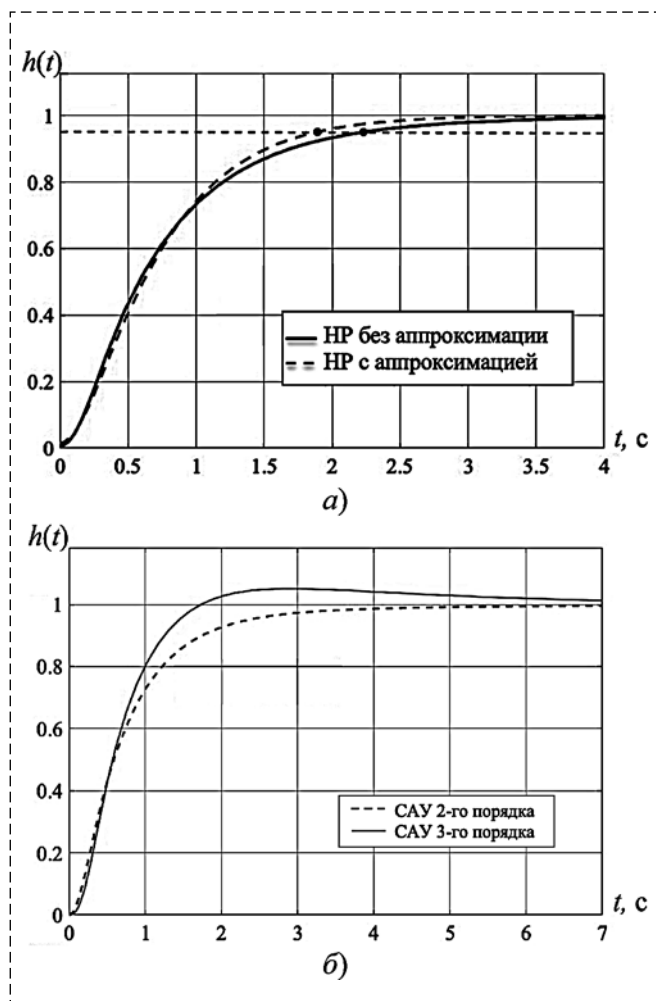


Рис. 8. Переходные процессы в САУ с аппроксимированным НР и НР без аппроксимации (а) и переходные процессы в нечеткой САУ 2-го порядка и 3-го порядка (б)

Fig. 8. Transient processes in an ACS with an approximated FR and FR without approximation (a) and transients in a fuzzy ACS of the 2nd order and 3rd order (b)

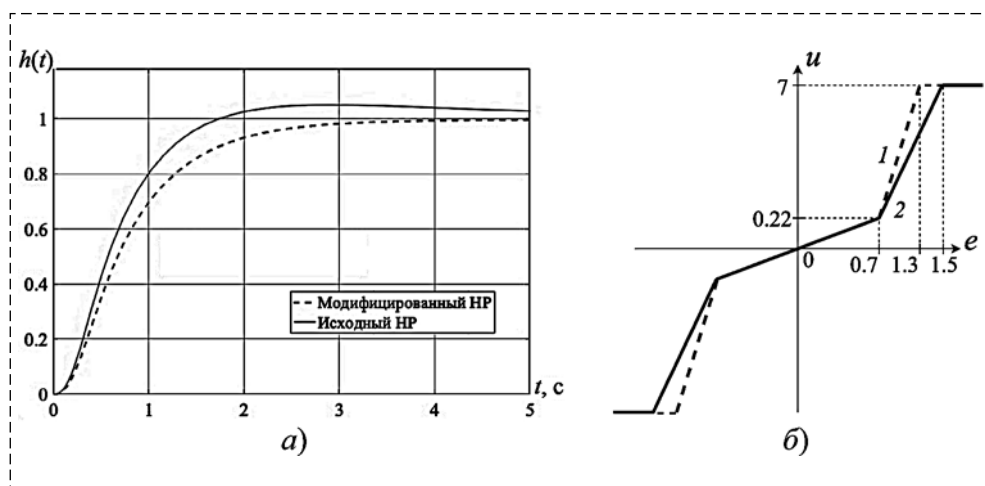


Рис. 9. Сравнение переходные процессы в нечетких САУ (а) при двух видах статических характеристик НР (б)

Fig. 9. Comparison of transient processes in fuzzy ACS (a) with two types of static characteristics of NR (b)

- если "ОШИБКА" есть "БОЛЬШАЯ ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ", то "НАПРЯЖЕНИЕ" есть "БОЛЬШОЕ ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ".

На рис. 7, б показан вид конечного нелинейного преобразования, реализуемого НР, полученного с помощью вышеописанной процедуры. Из рисунка видно, что статическая характеристики регулятора полностью согласуется с полученными на этапе синтеза НР параметрами a , b , c и d . Заметим, что используя метод Сугено и руководствуясь предложенными рекомендациями по расположению функций принадлежности и структуре продукционных правил, удастся получить характеристику НР кусочно-линейного характера, и нет необходимости ее аппроксимировать, как в случае использования метода Мамдани.

Аппроксимирование нелинейной характеристики НР, разумеется, упрощает анализ и синтез нечеткой САУ, но в то же время "угрубляет" систему, вследствие чего возникает вопрос достаточности используемой аппроксимации. На рис. 8, а приведено сравнение переходных процессов в САУ с НР с аппроксимированной характеристикой и без аппроксимации. Из рис. 8, а видно, что разница незначительна и может быть использована (при необходимости) как инструмент более точной настройки НР под заданные требования.

Помимо исследования влияния аппроксимации на качество управления дополнительного анализа требует оценка качества САУ при повышении порядка линейной части. Такая задача продиктована ограничениями метода фазовой плоскости, что может существенно сказаться на качестве САУ реальными объектами, которые в большинстве случаев описываются ДУ выше 2-го порядка. Так, рассматриваемый приводной уровень мехатронного робота помимо механической постоянной времени содержит и электрическую, которая обычно примерно на порядок меньше. На рис. 8, б приведено сравнение переходных процессов в нечетких

САУ второго и третьего порядка. Из рис. 8, б видно, что повышение порядка линейной части ухудшает качество регулирования, однако значение перерегулирования не превышает 5 %, что является допустимым в большинстве реальных САУ.

Повышение качества управления, если оно необходимо, может быть достигнуто за счет уменьшения коэффициента усиления K_2 в статической характеристике НР или уменьшения уровня насыщения u . На рис. 9, а представлено сравнение переходных процессов в нечетких САУ 3-го порядка с исходным и скорректированным НР (с уменьшенным значением K_2), а на рис. 9, б — сравнение статических характеристик этих НР (1 — исходная, 2 — скорректированная характеристика).

Сравнение переходных процессов подтверждает, что небольшое уменьшение значения K_2 является эффективным способом уменьшения значения перерегулирования в системе. Вместе с тем, если САУ описывается ДУ старшего порядка, то для синтеза НР можно использовать другие методы, например метод гармонического баланса, описанный в работе [9].

Заключение

Проведенные исследования показывают, что применение математического аппарата нелинейных систем управления (в рамках данной статьи — метода фазовой плоскости) позволяет эффективно решить задачу синтеза САУ с НР. За счет кусочно-линейной аппроксимации нелинейной характеристики НР разработана общая методика построения фазового портрета, получены аналитические выражения для фазовых траекторий, на основе которых предложен алгоритм синтеза НР с учетом требований обеспечения апериодического переходного процесса, а также алгоритм расчета времени регулирования. Проведенные экспериментальные исследования на модели приводного уровня мехатронного модуля подтверждают правильность предложенного алгоритма синтеза НР. Дополнительные исследования влияния степени аппроксимации показывают, что аппроксимированная характеристика НР дает незначительное ухудшение качества управления по сравнению с исходной. Введение дополнительной постоянной времени в линейную часть объекта управления приводит к появлению пере-

регулирования, не превышающего 5 %, однако предложенные способы коррекции статической характеристики НР позволяют его устранить.

Список литературы

1. Анисимов Д. Н. Алгоритм настройки нечеткого логического регулятора на основе исследования его динамических свойств // Информатика: проблемы, методология, технологии: материалы XVI международной научно-методической конференции, Воронеж, 11–12 февраля 2016 года. 2016. С. 20–25.
2. Макаров И. М., Лохин В. М. Автоматизация синтеза и обучение интеллектуальных систем автоматического управления. М.: Наука, 2009. 227 с.
3. Eltamaly A., Farh H. Maximum power extraction from wind energy system based on fuzzy logic control // Electric Power Systems Research. 2013. P. 144–150.
4. Piegat A. Fuzzy Modeling and Control. Physica-Verlag Heidelberg, 2001. 728 p.
5. Макаров И. М., Лохин В. М., Манько С. В., Романов М. П., Ситников М. С. Устойчивость интеллектуальных систем автоматического управления // Информационные технологии. Приложение. 2013. № 2. С. 1–32.
6. Кудинов Ю. И., Келина А. Ю. Методы синтеза и настройки нечетких ПИД регуляторов Мамдани // Информационные технологии. 2012. № 6. С. 1–32.
7. Makarov I. M., Lokhin V. M. Artificial intelligence and complex objects control // Russian Studies in Mathematics and Sciences. The Edwin Mellen Press Lewiston Queenston Lampeter, 2000. 401 p.
8. Ким Д. П. Теория автоматического управления: учебник и практикум для академического бакалавриата. М.: Юрайт, 2017. 276 с.
9. Kazachek N. A., Lokhin V. M., Manko S. V., Romanov M. P. Stability of intelligent automatic control systems // International Journal of Innovative Computing, Information and Control. 2017. N. 13. P. 547–558.
10. Dianwei Q., Jianqiang Y., Dongbin Z. Control of Overhead Crane Systems by Combining Sliding Mode with Fuzzy Regulator // IFAC Proceedings Volumes. 2011. N. 44. P. 9320–9325.
11. Sana M., M'hand O., Mustapha K., Mohamed A. Simulation and analyses of SEPIC converter using linear PID and fuzzy logic controller // Materials Today: Proceedings. 2020. N. 27. P. 3199–3208.
12. Najib El O., Saad M., Aziz D., Abdelaziz El G., Ali C., Mohammed T. Improved DTC strategy of doubly fed induction motor using fuzzy logic controller // Energy Reports. 2019. N. 5. P. 271–279.
13. Hituraj S., Ramakalyan A. Interval Fuzzy Type-II Controller for the Level Control of a Three Tank System // IFAC-PapersOnLine. 2016. N. 49. P. 561–566.
14. Jun Y. Stability Analysis of Nonlinear Networked Control Systems via Takagi-Sugeno Fuzzy Model // IFAC-PapersOnLine. 2017. N. 50. P. 2989–2994.
15. Jafarov S. M., Zeynalov E. R., Mustafayeva A. M. Synthesis of the Optimal Fuzzy T-S Controller for the Mobile Robot Using the Chaos Theory // Procedia Computer Science. 2016. N. 102. P. 302–308.
16. Efrain B. A., Maximiliano B. L., Fabian S. C. Fuzzy-Based Reactive Power Control for Smart PV Inverters in LV Distribution Systems // IFAC-PapersOnLine. 2017. N. 50. P. 7705–7710.

Analysis and Synthesis of a Fuzzy Controller by the Phase Plane Method

Y. A. Bykovtsev, bykovcev@mirea.ru,

Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education

"MIREA — Russian Technological University", Moscow, 119454, Russian Federation

Corresponding author: Bykovtsev Y. A., Graduate Student, Assistant, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "MIREA—Russian Technological University", Moscow, 119454, Russian Federation, e-mail: bykovcev@mirea.ru

Accepted on June 30, 2021

Abstract

The article is devoted to solving the problem of analysis and synthesis of a control system with a fuzzy controller by the phase plane method. The nonlinear transformation, built according to the Sugeno fuzzy model, is approximated by a piecewise linear characteristic consisting of three sections: two piecewise linear and one piecewise constant. This approach allows us to restrict ourselves to three sheets of phase trajectories, each of which is constructed on the basis of a second-order differential equation. Taking this feature into account, the technique of "stitching" of three sheets of phase trajectories is considered and an analytical base is obtained that allows one to determine the conditions for "stitching" of phase trajectories for various variants of piecewise-linear approximation of the characteristics of a fuzzy controller. In view of the specificity of the approximated model of the fuzzy controller used, useful analytical relations are given, with the help of which it is possible to calculate the time of motion of the representing point for each section with the involvement of the numerical optimization apparatus. For a variant of the approximation of three sections, a technique for synthesizing a fuzzy controller is proposed, according to which the range of parameters and the range of input signals are determined, at which an aperiodic process and a given control time are provided. On the model of the automatic control system of the drive level of the mechatronic module, it is shown that the study of a fuzzy system by such an approximated characteristic of a fuzzy controller gives quite reliable results. The conducted studies of the influence of the degree of approximation on the quality of control show that the approximated characteristic of a fuzzy controller gives a slight deterioration in quality in comparison with the smooth characteristic of a fuzzy controller. Since the capabilities of the phase plane method are limited to the 2nd order of the linear part of the automatic control system, the influence of the third order on the dynamics of the system is considered using the example of a mechatronic module drive. It is shown that taking into account the electric time constant leads to overshoot within 5–10 %. Such overshoot can be eliminated due to the proposed recommendations for correcting the static characteristic of the fuzzy controller.

Keywords: analysis, synthesis, fuzzy controller, phase plane, Sugeno fuzzy model

For citation:

Bykovtsev Y. A. Analysis and Synthesis of a Fuzzy Controller by the Phase Plane Method, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 10, pp. 507–517.

DOI: 10.17587/mau.22.507-517

References

1. Anisimov D. N. Algorithm for tuning a fuzzy logic controller based on the study of its dynamic properties, *Informatika: problemy, metodologiya, tekhnologii: materialy XVI mezhdunarodnoy nauchno-metodicheskoy konferencii*, 2016, pp. 20–25 (in Russian).
2. Makarov I. M., Lokhin V. M. Synthesis automation and training of intelligent automatic control systems, Moscow, Nauka, 2009, 227 p. (in Russian).
3. Eltamaly A., Farh H. Maximum power extraction from wind energy system based on fuzzy logic control, *Electric Power Systems Research*, 2013, pp. 144–150.
4. Piegat A. Fuzzy Modeling and Control, Physica-Verlag Heidelberg, 2001, 728 p.
5. Makarov I. M., Lokhin V. M., Manko S. V., Romanov M. P., Sitnikov M. S. Stability of intelligent automatic control systems, *Informacionnye Tekhnologii. Prilozhenie*, 2013, no. 2, pp. 1–32.
6. Kudinov Y. I., Kelina A. Y. Methods for the synthesis and tuning of fuzzy PID controllers Mamdani, *Informacionnye Tekhnologii. Prilozhenie*, 2012, no. 6, pp. 1–32 (in Russian).
7. Makarov I. M., Lokhin V. M. Artificial intelligence and complex objects control, *Russian Studies in Mathematics and Sciences*, The Edwin Mellen Press Lewiston Queenston Lampeter, 2000, 401 p.
8. Kim D. P. Automatic Control Theory: Textbook and Workshop for Academic Bachelor's Degree, Moscow, Urait, 2017, 276 p. (in Russian).
9. Kazachek N. A., Lokhin V. M., Manko S. V., Romanov M. P. Stability of intelligent automatic control systems, *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 2017, no. 13, pp. 547–558.
10. Dianwei Q., Jianqiang Y., Dongbin Z. Control of Overhead Crane Systems by Combining Sliding Mode with Fuzzy Regulator, *IFAC Proceedings Volumes*, 2011, no. 44, pp. 9320–9325.
11. Sana M., M'hand O., Mustapha K., Mohamed A. Simulation and analyses of SEPIC converter using linear PID and fuzzy logic controller, *Materials Today: Proceedings*, 2020, no. 27, pp. 3199–3208.
12. Najib El O., Saad M., Aziz D., Abdelaziz El G., Ali C., Mohammed T. Improved DTC strategy of doubly fed induction motor using fuzzy logic controller, *Energy Reports*, 2019, no. 5, pp. 271–279.
13. Hituraj S., Ramakalyan A. Interval Fuzzy Type-II Controller for the Level Control of a Three Tank System, *IFAC-PapersOnLine*, 2016, no. 49, pp. 561–566.
14. Jun Y. Stability Analysis of Nonlinear Networked Control Systems via Takagi-Sugeno Fuzzy Model, *IFAC-PapersOnLine*, 2017, no. 50, pp. 2989–2994.
15. Jafarov S. M., Zeynalov E. R., Mustafayeva A. M. Synthesis of the Optimal Fuzzy T-S Controller for the Mobile Robot Using the Chaos Theory, *Procedia Computer Science*, 2016, no. 102, pp. 302–308.
16. Efrain B. A., Maximiliano B. L., Fabian S. C. Fuzzy-Based Reactive Power Control for Smart PV Inverters in LV Distribution Systems, *IFAC-PapersOnLine*, 2017, no. 50, pp. 7705–7710.