

В. В. Алешкин¹, д-р техн. наук, проф., aleshkinvv@yandex.ru,
Р. А. Здражевский¹, канд. физ.-мат. наук, доц., pribor@sstu.ru,

П. Н. Голованов², вед. инженер, golovanovpn@mail.ru,

В. О. Марусич^{1,2}, инженер, студент магистратуры, marusich.vadim@mail.ru,
¹ Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,
² АО "Конструкторское бюро промышленной автоматики", г. Саратов

Методы и алгоритмы коррекции кинематических уравнений в задаче определения ориентации объекта

Рассматриваются алгоритмы работы бесплатформенной инерциальной системы ориентации с инерциальным измерительным модулем, в состав которого входят трехкомпонентный гироскопический измеритель угловой скорости, трехкомпонентный измеритель кажущегося ускорения и трехкомпонентный магнитометр. Целью работы является совершенствование алгоритмов обработки информации датчиков для обеспечения асимптотической устойчивости, возможности настройки системы на период Шулера и фильтр нижних частот с заданной полосой пропускания. В работе приводятся результаты анализа методов и алгоритмов коррекции кинематических уравнений по информации инерциального измерительного модуля. Рассматриваются кинематические уравнения Пуассона с позиционной и интегрально-позиционной коррекцией по информации акселерометров и магнитометров. Анализируется устойчивость и частотные характеристики системы по отношению к выходным сигналам гироскопов, акселерометров и магнитометров. Показано, что применение позиционной коррекции в каждом канале не позволяет реализовать настройку системы ориентации на период Шулера и фильтр нижних частот выше первого порядка. Применение интегрально-позиционной коррекции позволяет выполнить настройку на период Шулера, однако по отношению к сигналам гироскопов система представляет собой полосовой фильтр и не подавляет шумы гироскопов в полосе пропускания. Показаны преимущества применения позиционной коррекции с перекрестными связями в смысле настройки частотных характеристик системы на частоту Шулера и фильтр нижних частот третьего порядка. Получена структура кинематических уравнений и соотношения для коэффициентов позиционной коррекции, обеспечивающие заданные динамические характеристики системы. Рассмотрено влияние угловых скоростей вращения на устойчивость системы, показана асимптотическая устойчивость при изменениях угловых скоростей в заданном диапазоне. Результаты математического моделирования подтвердили компенсацию погрешностей начальной выставки системы ориентации, снижение мощности шумов в оценках углов ориентации по отношению к шумам в сигналах датчиков и возможность настройки системы на период Шулера.

Ключевые слова: бесплатформенная система ориентации, кинематические уравнения, коррекция, устойчивость, частотные характеристики, математическое моделирование

Введение

Работа бесплатформенной инерциальной системы ориентации (БИСО) основана на обработке бортовым компьютером (БК) информации инерциального измерительного модуля (ИИМ), в состав которого входят трехкомпонентные гироскопический измеритель угловой скорости (ТГИУС), измеритель кажущегося ускорения (ТИКУ), трехкомпонентный магнитометр (МТ). Углы пространственной ориентации (курс ψ , крен γ и тангаж ϑ) вычисляются в БК по информации датчиков (ТГИУС, ТИКУ, МТ) с помощью кинематических уравнений в углах Эйлера—Крылова, уравнений Пуассона в направляющих косинусах или параметрах Родрига—Гамильтона (кватернионах) [1—4, 14].

Известная особенность кинематических уравнений — их неасимптотическая устойчивость, а при использовании численных методов интегрирования — неустойчивость, приводят к нарастающим погрешностям определения ориентации, обусловленным по-

грешностями задания начальных условий и дрейфом ТГИУС. Рассмотрению различных вариантов снижения этих погрешностей посвящена обширная литература. Чаще всего применяются варианты расширенной калмановской фильтрации для оценки в реальном времени постоянных составляющих скорости дрейфа гироскопов и последующей компенсации с использованием информации ТИКУ [19] или ТИКУ и МТ [15—17], что приводит к алгоритмам большой размерности. Проще в реализации некалмановские нелинейные фильтры для ИИМ ТГИУС и ТИКУ, которые в частных случаях приводят к асимптотически устойчивым оценкам трех углов ориентации [18]. В настоящей работе рассматривается вариант совершенствования алгоритмов БИСО без увеличения размерности кинематических уравнений, позволяющий снизить погрешности и улучшить соотношение сигнал/шум в вычисленных углах ориентации, что особенно актуально при применении волоконно-оптических и микромеханических ИИМ.

Постановка задачи

Для описания алгоритма работы БИСО введем правые ортогональные системы координат: X_i ($i = 1, 2, 3$) — связанную с объектом, η_i — географический сопровождающий трехгранник, ξ_i — инерциальную систему координат. Оси связанной с объектом системы координат X_i ориентированы относительно строительных осей подвижного объекта параллельно продольной X_1 , нормальной X_2 и поперечной X_3 осям. Оси географического сопровождающего трехгранника η_i параллельны направлениям на географический север η_2 , восток η_3 и вертикали места η_1 .

Переход от связанной с объектом системы координат к географическому сопровождающему трехграннику осуществляется поворотами на углы курса ψ , крена γ и тангажа ϑ , определяющими матрицу направляющих косинусов:

$$C = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \vartheta & -\cos \gamma \cos \psi \sin \vartheta + \sin \gamma \sin \psi & -\sin \gamma \cos \psi \sin \vartheta + \cos \gamma \sin \psi \\ \sin \vartheta & \cos \gamma \cos \vartheta & -\cos \vartheta \sin \gamma \\ -\cos \vartheta \sin \psi & \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \psi & -\sin \gamma \sin \psi \sin \vartheta + \cos \gamma \cos \psi \end{bmatrix} \quad (1)$$

в соответствии с выражением

$$X = C\eta \text{ или } \eta = C^T X.$$

Если матрица (1) известна, то углы курса, тангажа и крена вычисляются через ее элементы:

$$\begin{aligned} \psi &= \arctg\left(\frac{-c_{31}}{c_{11}}\right); \vartheta = \arcsin(c_{21}); \\ \gamma &= \arctg\left(\frac{-c_{23}}{c_{22}}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

Задача определения ориентации сводится к нахождению матрицы направляющих косинусов C , осуществляющей переход от связанной с объектом системы координат к географическому сопровождающему трехграннику, по информации датчиков ИИМ.

Кинематические уравнения БИСО

Распространенным является алгоритм определения углов пространственной ориентации на основе кинематических уравнений в углах Эйлера—Крылова [1], которые в общем виде можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \frac{1}{\cos \vartheta} [\omega_{x2}^{\text{отн}} \cos \gamma - \omega_{x3}^{\text{отн}} \sin \gamma]; \\ \dot{\vartheta} = \omega_{x2}^{\text{отн}} \sin \gamma + \omega_{x3}^{\text{отн}} \cos \gamma; \\ \dot{\gamma} = \omega_{x1}^{\text{отн}} - \text{tg} \vartheta [\omega_{x2}^{\text{отн}} \cos \gamma - \omega_{x3}^{\text{отн}} \sin \gamma], \end{cases} \quad (3)$$

где $\omega_{x1}^{\text{отн}}$, $\omega_{x2}^{\text{отн}}$, $\omega_{x3}^{\text{отн}}$ — составляющие относительной угловой скорости.

Относительная угловая скорость вычисляется как разность абсолютной угловой скорости, спроецированной на оси связанной системы координат и измеряемой ТГИУС, и переносной угловой скорости связанного трехгранника, обусловленной вращением Земли и перемещением объекта. Переносная угловая скорость вычисляется по информации ТИКУ и компенсируется.

Система уравнений (3) имеет третий порядок, минимально необходимый для определения углов курса, крена и тангажа. Она является нелинейной, так как содержит тригонометрические функции, интегрирование связано с выполнением громоздких математических операций. Результаты вычислений углов обладают особыми точками, в которых оценки углов курса, крена и тангажа вырождаются. В связи с этим

при некоторых положениях подвижного объекта их применение невозможно (например, при тангаже $\pm 90^\circ$).

Рассмотрим алгоритм на основе кинематических уравнений Пуассона в направляющих косинусах, которые в общем виде можно записать следующим образом [1, 2]:

$$\dot{C} = C\omega - \omega_g C, \quad (4)$$

где ω — абсолютная угловая скорость вращения связанной системы координат; ω_g — переносная угловая скорость вращения географического сопровождающего трехгранника.

Матрицы ω и ω_g вращения географического сопровождающего трехгранника являются кососимметрическими одинаковой структуры:

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ \omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где ω_x , ω_y , ω_z — составляющие абсолютной угловой скорости связанной системы координат; ω_{xg} , ω_{yg} , ω_{zg} — переносные угловые скорости вращения географической системы координат.

Переносные угловые скорости ω_{xg} , ω_{yg} , ω_{zg} вычисляются в бесплатформенной навигационной системе по формулам

$$\begin{aligned} \omega_{xg} &= U \cos \varphi + \frac{V_{zg}}{R}; \\ \omega_{yg} &= U \sin \varphi + \frac{V_{zg}}{R} \text{tg} \varphi; \\ \omega_{zg} &= -\frac{V_{xg}}{R} \end{aligned} \quad (6)$$

и вычитаются из абсолютных скоростей, измеряемых ТГИУС. В системе (6) U — угловая скорость вращения Земли; φ — географическая широта; R — геоцентрический радиус Земли; V_{xg}, V_{zg} — северная и восточная составляющие вектора линейной скорости на оси географической системы координат.

Система кинематических уравнений девятого порядка (4) распадается на три отдельно интегрируемые подсистемы. Они линейны и обладают свойством невырождаемости при любых углах курса, крена и тангажа. Высокий порядок дифференциального уравнения (4) приводит к увеличению нагрузки на БК. Совершенствование характеристик современных БК в значительной степени нивелирует этот недостаток.

Снижение порядка кинематических уравнений Пуассона достигается применением параметров Родрига—Гамильтона (кватернионов). Общий вид этих уравнений следующий [3, 4]:

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \omega - \Lambda \circ \omega_g, \quad (7)$$

где Λ — кватернион, определяющий переход из географической системы координат к связанной системе; ω — гиперкомплексное отображение вектора абсолютной угловой скорости связанной системы координат; ω_g — гиперкомплексное отображение вектора абсолютной угловой скорости географической системы координат.

При численном решении (7) появляются вычислительные погрешности, связанные с уходом нормы кватерниона. Для автоматической коррекции в уравнение (7) добавляется член коррекции нормы кватерниона:

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda M(\omega) - \Lambda M(\omega_g) + \Lambda (1 - \|\Lambda\|). \quad (8)$$

Для сокращения вычислительных операций, связанных с произведением кватернионов, используют кватернионные матрицы размера 4×4 :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & -\lambda_4 \\ \lambda_2 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ \lambda_4 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{bmatrix};$$

$$M(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & & & \\ \omega_y & & \omega & \\ \omega_z & & & \end{bmatrix}; \quad (9)$$

$$M(\omega_g) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{xg} & -\omega_{yg} & -\omega_{zg} \\ \omega_{xg} & & & \\ \omega_{yg} & & \omega_g & \\ \omega_{zg} & & & \end{bmatrix}.$$

Кинематические уравнения (8) имеют четвертый порядок и не вырождаются при любых углах разворота подвижного объекта. Эти уравнения не содержат тригонометрических функций, что упрощает аналитическое и численное решение задачи определения ориентации и снижает объем вычислений. Применение кватернионов осложняется необходимостью выполнения унитарных преобразований, не имеющих простого геометрического смысла.

В кватернионной форме матрица C направляющих косинусов записана в виде матрицы A для перехода от трехгранника η_i к трехграннику X_i :

$$A = \begin{bmatrix} 2\lambda_1^2 + 2\lambda_0^2 - 1 & 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_0\lambda_3 & 2\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_0\lambda_2 \\ 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_0\lambda_3 & 2\lambda_0^2 + 2\lambda_2^2 - 1 & 2\lambda_2\lambda_3 + 2\lambda_0\lambda_1 \\ 2\lambda_1\lambda_3 + 2\lambda_0\lambda_2 & 2\lambda_2\lambda_3 - 2\lambda_0\lambda_1 & 2\lambda_0^2 + 2\lambda_3^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

Искомые углы курса ψ , крена ϑ и тангажа γ выражаются через параметры Родрига—Гамильтона следующим образом:

$$\psi = \arctg\left(-\frac{2\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_0\lambda_2}{2\lambda_1^2 + 2\lambda_0^2 - 1}\right);$$

$$\vartheta = \arcsin(2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_0\lambda_3); \quad (10)$$

$$\gamma = \arctg\left(-\frac{2\lambda_2\lambda_3 - 2\lambda_0\lambda_1}{2\lambda_0^2 + 2\lambda_2^2 - 1}\right).$$

С математической точки зрения кинематические уравнения (3), (4) и (8) приводят к одинаковым результатам при вычислении оценок углов ориентации. Общим недостатком уравнений (3), (4) и (8) является низкая точность вычисления параметров ориентации в автономном (не корректируемом) режиме работы при отсутствии поправок от других навигационных датчиков. Существенный вклад в ошибку оценивания углов ориентации вносят погрешности и шумы выходных сигналов ТГИУС. Результаты вычислений устойчивы неасимптотически, в силу этого при переходе к дискретным математическим моделям имеет место расходимость оценок углов. В результате использование этих уравнений обеспечивает приемлемую точность в течение короткого промежутка времени [1, 3, 6, 7]. Для компенсации накапливающихся со временем погрешностей вычисления углов ориентации в уравнения (3), (4) и (8) вводят корректирующие сигналы, сформированные на основе информации других навигационных датчиков, входящих в состав ИИМ.

Корректируемые кинематические уравнения БИСО

В работе [5] предложен, а в статье [6] исследован способ коррекции показаний ТГИУС в уравнениях Эйлера—Крылова. При этом считается, что поскольку в уравнениях (3) угловые скорости переносного движения неизвестны, их нельзя вводить в кинематические уравнения, принимаемые в качестве алгоритмов работы бортового вычислителя. Вместо них вводятся корректирующие члены, которые формируются по сигналам ТИКУ. Их назначение состоит в том, чтобы скомпенсировать влияние неизвестных угловых скоростей переносного движения и дрейф ТГИУС:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\vartheta}} &= (\hat{\omega}_{\eta_1} + \omega_{\eta_1}^k) \sin \hat{\psi} + (\hat{\omega}_{\eta_3} + \omega_{\eta_3}^k) \cos \hat{\psi}; \\ \dot{\hat{\gamma}} &= [(\hat{\omega}_{\eta_1} + \omega_{\eta_1}^k) \cos \hat{\psi} - \\ &- (\hat{\omega}_{\eta_3} + \omega_{\eta_3}^k) \sin \hat{\psi}] \cos^{-1} \hat{\vartheta}; \\ \dot{\hat{\psi}} &= -[(\hat{\omega}_{\eta_1} + \omega_{\eta_1}^k) \cos \hat{\psi} - \\ &- (\hat{\omega}_{\eta_3} + \omega_{\eta_3}^k) \sin \hat{\psi}] \operatorname{tg} \hat{\vartheta} + \hat{\omega}_{\eta_2} + \omega_{\eta_2}^k, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\omega_{\eta_1}^k, \omega_{\eta_2}^k, \omega_{\eta_3}^k$ — компенсационные компоненты, спроецированные на оси географической системы координат; $\hat{\omega}_{\eta_1}, \hat{\omega}_{\eta_2}, \hat{\omega}_{\eta_3}$ — составляющие абсолютной угловой скорости вращения связанного трехгранника, спроецированные на оси географического сопровождающего трехгранника.

Отличительной особенностью уравнений (11) является то, что вместо составляющих переносных угловых скоростей введены корректирующие сигналы, что позволяет добиться асимптотической устойчивости решения уравнений (11). Выражения для вычисления членов позиционной и интегральной коррекции имеют вид

$$\begin{aligned} -\omega_{\eta_1}^k &= k_\gamma \frac{W_{\eta_3}}{g} + \frac{k_\gamma^I}{g} \int_{t_0}^t W_{\eta_3} d\tau - \omega_{\eta_1}^k(t_0); \\ \omega_{\eta_2}^k &= \omega_{\eta_1}^k \operatorname{tg} \phi; \\ \omega_{\eta_3}^k &= k_\theta \frac{W_{\eta_1}}{g} + \frac{k_\theta^I}{g} \int_{t_0}^t W_{\eta_1} d\tau + \omega_{\eta_3}^k(t_0). \end{aligned} \quad (12)$$

В выражениях (12) $k_\gamma, k_\theta, k_\gamma^I, k_\theta^I$ — коэффициенты передачи позиционной и интегральной коррекции; $\omega_{\eta_1}^k(t_0), \omega_{\eta_3}^k(t_0)$ — начальные значения; $W_{\eta_1}, W_{\eta_2}, W_{\eta_3}$ — измерения ТИКУ.

Проведенное в работе [6] исследование устойчивости решений уравнений ошибок БИСО свидетельствует о том, что если начальные значения ошибок углов ориентации являются ма-

лыми, что обеспечивается горизонтальной коррекцией и устройством начальной выставки по углу азимута и угловым скоростям, то при положительности коэффициентов передачи $k_\theta, \dots, k_\gamma^I$ невозмущенное движение по углам крена и тангажа асимптотически устойчиво и неасимптотически устойчиво по курсу при отсутствии погрешностей в ТГИУС и ТИКУ. При наличии погрешностей $\Delta\omega_{xi}, \Delta W_{xi}$ ($i = 1, 2, 3$) система по-прежнему обладает свойством асимптотической устойчивости по крену и тангажу, а по углу курса может накапливаться уход.

Этот способ коррекции развивается в работе [7] применительно к кватернионным кинематическим уравнениям. В работе предложены многоступенчатые корректируемые алгоритмы ориентации в виде уравнений Пуассона на основе параметров Родрига—Гамильтона первой ступени с введенными членами горизонтальной радиальной интегрально-позиционной коррекции:

$$\begin{aligned} 2\dot{\mathbf{N}} &= \mathbf{N} \circ \boldsymbol{\Omega}_x - \mathbf{M} \circ (\boldsymbol{\Omega}_x - \boldsymbol{\Omega}_\mu) + \\ &+ \mathbf{K} \circ (\mathbf{M} - \mathbf{N}) + \mathbf{I} \circ \int_{t_0}^t (\mathbf{M} - \mathbf{N}) d\tau, \end{aligned} \quad (13)$$

где \mathbf{M}, \mathbf{N} — ненормированные кватернионы; \mathbf{K} и \mathbf{I} — кватернионные константы, обозначающие коэффициенты усиления позиционной и интегральной коррекции; $\boldsymbol{\Omega}_x, \boldsymbol{\Omega}_\mu$ — кватернионы угловых скоростей в проекциях на оси связанной и географической систем координат соответственно.

В уравнении (13) приведены члены кинематической $\mathbf{M} \circ (\boldsymbol{\Omega}_x - \boldsymbol{\Omega}_\mu)$, позиционной $\mathbf{K} \circ (\mathbf{M} - \mathbf{N})$ и интегральной $\mathbf{I} \circ \int_{t_0}^t (\mathbf{M} - \mathbf{N}) d\tau$ коррекции.

Формирование кватерниона \mathbf{M} осуществляется при начальной выставке от другой системы ориентации. При автономной выставке и работе БИСО, когда применяется только информация ГИУС и ГИКУ, кинематический член коррекции можно исключить. При этом кватернион \mathbf{M} может быть сформирован из компонентов вектора кажущегося ускорения, измеряемого ТИКУ.

За счет выбора структуры и значений коэффициентов коррекции можно обеспечить асимптотическую устойчивость уравнений и возможность применения микромеханических ГИУС и ГИКУ малой точности, а задачу навигации можно решать с помощью комплексирования с датчиками неинерциальной природы. При использовании прецизионных ГИУС и ТИКУ предложены двух- и трехступенчатые алгоритмы ориентации для моделирования горизонтного свободного в азимуте трехгранника, определения его угловых скоростей и по-

следующего решения задачи навигации. Уравнение второй степени имеют вид

$$2\dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{v}_1 \circ \boldsymbol{\omega}_{\eta(1)} + k^{(1)} \circ (\boldsymbol{\mu}_1^+ - 2\mathbf{v}_1) + \mathbf{I}^{(1)} \int_{t_0}^t (\boldsymbol{\mu}_1^+ - 2\mathbf{v}_1) dt - \rho^{(1)} (\mathbf{v}_1^2 - 1) \mathbf{v}_1. \quad (14)$$

В соотношении (14) $\boldsymbol{\mu}_1^+ = \mathbf{v} \circ \boldsymbol{\mu}^+ \circ \bar{\mathbf{v}}$, $\boldsymbol{\omega}_{\eta(1)} = \mathbf{v} \circ (\boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{\omega}_x^{(1)}) \circ \bar{\mathbf{v}}$, где \mathbf{v}_1 — оценка кватерниона ориентации в проекциях на оси географического трехгранника; $\boldsymbol{\omega}_{\eta(1)}$ — кватернион абсолютной угловой скорости в проекциях на оси географического трехгранника. Численные значения коэффициентов коррекции в кватернионных константах должны быть другими по отношению к первой ступени, и, в частности, их выбором можно обеспечить выполнение условий Шулера.

Аналогичный подход к компенсации дрейфа гироскопов в алгоритме БИСО используется в работах [8–10] применительно к кинематическим уравнениям в параметрах Родрига—Гамильтона. Микромеханический ИИМ дополнен трехкомпонентным магнитометром. Алгоритм определения ориентации по данным об угловой скорости объекта основан на решении кинематического уравнения Пуассона вида (8). Решение уравнения (8) позволяет определить собственный кватернион ориентации Λ между горизонтальной и связанной системами координат при задании начальных условий $\Lambda(0)$:

$$\begin{aligned} \lambda_0(0) &= \cos(\psi_0/2) \cos(\vartheta_0/2) \cos(\gamma_0/2) - \sin(\psi_0/2) \sin(\vartheta_0/2) \sin(\gamma_0/2); \\ \lambda_1(0) &= \cos(\psi_0/2) \cos(\vartheta_0/2) \sin(\gamma_0/2) + \sin(\psi_0/2) \sin(\vartheta_0/2) \cos(\gamma_0/2); \\ \lambda_2(0) &= \sin(\psi_0/2) \cos(\vartheta_0/2) \cos(\gamma_0/2) + \cos(\psi_0/2) \sin(\vartheta_0/2) \sin(\gamma_0/2); \\ \lambda_3(0) &= \cos(\psi_0/2) \sin(\vartheta_0/2) \cos(\gamma_0/2) - \sin(\psi_0/2) \cos(\vartheta_0/2) \sin(\gamma_0/2), \end{aligned}$$

где $\psi_0, \vartheta_0, \gamma_0$ — начальные значения углов курса, тангажа и крена.

Начальные значения углов ϑ_0, γ_0 определяются на основе измерения проекций ускорения свободного падения на оси связанной системы координат, для чего требуется информация с акселерометров:

$$\begin{aligned} \vartheta_0 &= \arcsin(-g_x/g); \\ \gamma_0 &= \arctg(g_z/g_y), \end{aligned} \quad (15)$$

где g_x, g_y, g_z — проекции ускорения свободного падения на оси связанной системы координат, измеряемые акселерометрами при равномерном движении объекта.

Вычисление угла курса на основе показаний магнитометра в диапазоне $\pm 90^\circ$ осуществляется с помощью соотношения

$$\psi_0 = \arcsin\{(H_z \cos \gamma_0 - H_y \sin \gamma_0)/L\} - D, \quad (16)$$

где H_y, H_z — составляющие напряженности магнитного поля Земли по осям связанной системы координат; D — магнитное склонение.

По элементам найденного кватерниона Λ на конечном этапе определяются углы ориентации по формулам (10). Далее применяется компенсационная схема на основе ПИ регулятора [8], которая позволяет отфильтровать имеющиеся измерительные шумы акселерометров и выделить и компенсировать дрейф гироскопов. В работе [9] приведена схема моделирования такой БИСО, из которой следует, что блок "Compensator", в основе которого лежит компенсационная схема на основе ПИ регулятора, с помощью данных акселерометров и магнитометров выделяет низкочастотные ошибки дрейфа гироскопов. Выделенные ошибки вычитаются из неточных оценок, что дает более точные результаты оценивания углов Эйлера.

Интегрально-позиционная коррекция в кинематических уравнениях Пуассона

Таким образом, все приведенные выше работы предполагают использование ПИ регулятора для коррекции результатов определения углов ориентации по информации ТГИУС с помощью ТИКУ или ТИКУ и МТ. Покажем не отмеченные в приведенных выше работах особенности такого подхода на примере алгоритмов ориентации в направляющих косинусах, которые имеют вид трех независимых систем линейных дифференциальных уравнений третьего порядка каждая, что упрощает анализ их свойств.

Уравнения Пуассона с учетом интегрально-позиционной коррекции можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \times \boldsymbol{\omega} - \mathbf{k}(\mathbf{C} - \mathbf{C}_k) - \mathbf{k}^i \int_{t_0}^t (\mathbf{C} - \mathbf{C}_k) dt \quad (17)$$

где $\mathbf{C}_k(c_{ij})$ — матрица направляющих косинусов коррекции, имеющая вид (1) и формируемая по сигналам ТИКУ и МТ с использованием выражений (15), (16); \mathbf{k}, \mathbf{k}^i — матрицы коэффициентов усиления позиционной и интегральной коррекции.

В скалярном виде уравнение (17) распадается на три системы линейных дифференциальных уравнений, из которых для анализа возьмем систему относительно переменных c_{11}, c_{12}, c_{13} :

$$\begin{aligned}
\dot{c}_{11} &= c_{12}\omega_z - c_{13}\omega_y - \\
&- k_{11}(c_{11} - c_{11}^K) - k_{11}^n \int_{t_0}^t (c_{11} - c_{11}^K) dt; \\
\dot{c}_{12} &= c_{13}\omega_z - c_{11}\omega_y - \\
&- k_{12}(c_{12} - c_{12}^K) - k_{12}^n \int_{t_0}^t (c_{12} - c_{12}^K) dt; \\
\dot{c}_{13} &= c_{11}\omega_z - c_{12}\omega_y - \\
&- k_{13}(c_{13} - c_{13}^K) - k_{13}^n \int_{t_0}^t (c_{13} - c_{13}^K) dt.
\end{aligned} \tag{18}$$

В переменных состояния уравнения (18) имеют вид

$$\begin{cases}
\dot{c}_1 = k_{11}^n(c_{11} - c_{11}^K); \\
\dot{c}_2 = k_{12}^n(c_{12} - c_{12}^K); \\
\dot{c}_3 = k_{13}^n(c_{13} - c_{13}^K); \\
\dot{c}_{11} = c_{12}\omega_z - c_{13}\omega_y - k_{11}(c_{11} - c_{11}^K) - c_1; \\
\dot{c}_{12} = c_{13}\omega_x - c_{11}\omega_z - k_{12}(c_{12} - c_{12}^K) - c_2; \\
\dot{c}_{13} = c_{11}\omega_y - c_{12}\omega_x - k_{13}(c_{13} - c_{13}^K) - c_3.
\end{cases} \tag{19}$$

В матричном виде:

$$\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}_K, \tag{20}$$

где

$$\mathbf{C}_K = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_{11}^K \\ c_{12}^K \\ c_{13}^K \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -k_{11}^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{12}^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{13}^n \\ 0 & 0 & 0 & k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{13} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_{11}^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{12}^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{13}^n \\ -1 & 0 & 0 & -k_{11} & \omega_z & -\omega_y \\ 0 & -1 & 0 & -\omega_z & -k_{12} & \omega_x \\ 0 & 0 & -1 & \omega_y & -\omega_x & -k_{13} \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение уравнений ошибок этой системы имеет вид

$$\det(\mathbf{E}p - \mathbf{A}) = 0;$$

$$\begin{aligned}
&p^6 + (k_{11} + k_{12} + k_{13})p^5 + (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 + \\
&+ k_{11}^n + k_{12}^n + k_{13}^n + k_{11}k_{12} + k_{11}k_{13} + k_{12}k_{13})p^4 + \\
&+ (k_{11}\omega_x^2 + k_{12}\omega_y^2 + k_{13}\omega_z^2 + k_{11}k_{12}^n + k_{12}k_{11}^n + \\
&+ k_{11}k_{13}^n + k_{13}k_{11}^n + k_{12}k_{13}^n + k_{13}k_{12}^n + k_{11}k_{12}k_{13})p^3 + \\
&+ (k_{11}^n\omega_x^2 + k_{12}^n\omega_y^2 + k_{13}^n\omega_z^2 + k_{11}^nk_{12}^n + k_{11}^nk_{13}^n + \\
&+ k_{12}^nk_{13}^n + k_{11}k_{12}k_{13}^n + k_{11}k_{13}k_{12}^n + k_{12}k_{13}k_{11}^n)p^2 + \\
&+ (k_{11}k_{12}^nk_{13}^n + k_{12}k_{11}^nk_{13}^n + k_{13}k_{11}^nk_{12}^n)p + k_{11}^nk_{12}^nk_{13}^n = 0,
\end{aligned}$$

откуда следует, что знаки компонентов вектора угловой скорости не влияют на устойчивость и динамические характеристики системы.

При неподвижном основании характеристический полином распадается на три множителя второго порядка каждый:

$$(p^2 + k_{11}p + k_{11}^n)(p^2 + k_{12}p + k_{12}^n)(p^2 + k_{13}p + k_{13}^n) = 0.$$

При равных $k_{li} = k$; $k_{li}^n = k^n$ имеем $(p^2 + kp + k^n)^3 = 0$, откуда следует, что при положительных коэффициентах коррекции система асимптотически устойчива. Численные значения коэффициентов коррекции можно задавать исходя из необходимых динамических свойств системы. Например, для подавления измерительных шумов микромеханических датчиков можно сделать три системы фильтрами Чебышева. Так, для фильтра нижних частот Чебышева второго порядка с неравномерностью амплитудно-частотной характеристики 1 дБ и собственной приведенной частотой ω_0 получаем

$$k_{11} = k_{12} = k_{13} = 1,1\omega_0;$$

$$k_{11}^n = k_{12}^n = k_{13}^n = 1,1\omega_0^2.$$

Собственная частота в разных режимах движения может задаваться различной, в том числе и частотой Шулера.

Передаточные функции выходов системы по отношению к сигналам датчиков не могут быть записаны в явном виде, так как систему (19) необходимо дополнить нелинейными выражениями (15) и (16) преобразования выходов ТИКУ и МТ в углы и направляющие косинусы коррекции вида (1) и преобразования элементов вычисленной матрицы направляющих косинусов в углы ориентации (2). Поэтому динамические свойства полной модели БИСО будем оценивать по частотным характеристикам и переходным процессам в ее модели.

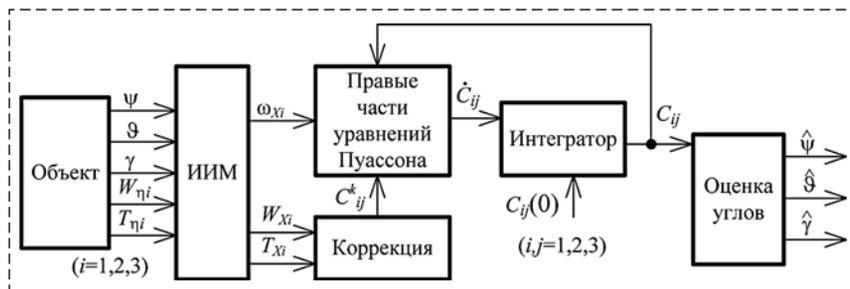


Рис. 1. Блок-схема моделирования
Fig. 1. Simulation model block diagram

Схема моделирования работы ИИМ с ТГИ-УС, ТИКУ и МТ на борту подвижного объекта и БИСО с коррекцией приведена на рис. 1. Моделирование работы ИИМ проводилось в среде MATLAB (Simulink). Описание работы блоков и их математические модели приведены нами в работе [11]. Для построения графиков переходных процессов и частотных характеристик использовались штатные блоки Scope и Bode Plot, подключаемые в соответствующих точках модели. Для примера на рис. 2 приведен переходный процесс по углу тангажа с ненулевыми начальными условиями на неподвижном основании. Аналогичный вид имеют переходные процессы по двум другим углам, что свидетельствует об асимптотической устойчивости системы по оценкам углов ориентации и компенсации погрешностей начальной выставки БИСО.

Считая входами сигналы магнитометра T_{Xi} (акселерометра W_{Xi}) и гироскопа ω_{Xi} , а выходами — оценки углов ориентации на примере угла тангажа ϑ , можно построить графики АФЧХ системы, которые показывают, что по отношению к выходам магнитометра и акселерометра модель является фильтром нижних частот (ФНЧ) с заданной полосой пропускания, что приводит к подавлению шумов выходных сигналов датчиков в оценках углов ориентации. По отношению к сигналам гироскопов модель является полосовым фильтром, поэтому шумы гироскопов в полосе пропускания подавляться не будут.

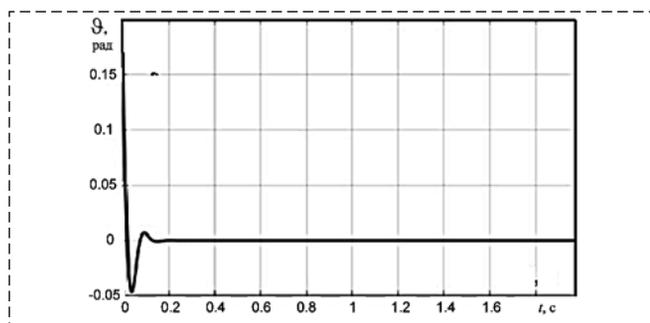


Рис. 2. Переходный процесс по углу тангажа
Fig. 2. Step response for the pitch angle

Применение позиционной коррекции с перекрестными связями

Скалярные уравнения (19) без интегральной коррекции имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{c}_{11} &= c_{12}\omega_z - c_{13}\omega_y - k_{11}(c_{11} - c_{11}^K); \\ \dot{c}_{12} &= c_{13}\omega_x - c_{11}\omega_z - k_{12}(c_{12} - c_{12}^K); \\ \dot{c}_{13} &= c_{11}\omega_y - c_{12}\omega_x - k_{13}(c_{13} - c_{13}^K). \end{aligned} \quad (21)$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} p^3 + k_1 p^2 + k_2 p + k_3 &= 0; \\ k_1 &= k_{11} + k_{12} + k_{13}; \\ k_2 &= k_{11}k_{12} + k_{11}k_{13} + k_{12}k_{13} + \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2; \\ k_3 &= k_{11}k_{12}k_{13} + k_{11}\omega_x^2 + k_{12}\omega_y^2 + k_{13}\omega_z^2. \end{aligned}$$

Из характеристического уравнения следует, что условие асимптотической устойчивости системы $k_1 k_2 > k_3$ может быть выполнено при любых значениях угловых скоростей, при этом коэффициенты позиционной коррекции должны быть положительными. Переходные процессы будут аperiodическими, АФЧХ соответствуют аperiodическому звену первого порядка, так как при невращающемся основании система (21) распадается на три независимых уравнения первого порядка каждое, что не допускает настройку системы на период Шулера.

Введем перекрестные члены коррекции:

$$\begin{aligned} \dot{c}_{11} &= c_{12}\omega_z - c_{13}\omega_y - k_{11}(c_{11} - c_{11}^K) - \\ &- k_{12}^n(c_{12} - c_{12}^K) - k_{13}^n(c_{13} - c_{13}^K); \\ \dot{c}_{12} &= c_{13}\omega_x - c_{11}\omega_z - k_{12}(c_{12} - c_{12}^K) - \\ &- k_{11}^n(c_{11} - c_{11}^K) - k_{13}^n(c_{13} - c_{13}^K); \\ \dot{c}_{13} &= c_{11}\omega_y - c_{12}\omega_x - k_{13}(c_{13} - c_{13}^K) - \\ &- k_{12}^n(c_{12} - c_{12}^K) - k_{11}^n(c_{11} - c_{11}^K). \end{aligned}$$

Положим сначала, что основные и перекрестные коэффициенты равны между собой: $k_{1i}^n = k_{1i}$. Характеристический полином при неподвижном основании имеет вид

$$p^3 + (k_{11} + k_{12} + k_{13})p^2.$$

Так как полином неполный, система не может быть асимптотически устойчивой.

В случае разных значений коэффициентов имеем

$$p^3 + (k_{11}^n + k_{12}^n + k_{13}^n)p^2 + (k_{11}k_{12} + k_{11}k_{13} + k_{12}k_{13} - k_{11}^n k_{12}^n - k_{11}^n k_{13}^n - k_{12}^n k_{13}^n)p + k_{11}k_{12}k_{13} - k_{11}k_{12}^n k_{13}^n - k_{12}k_{11}^n k_{13}^n - k_{13}k_{11}^n k_{12}^n + 2k_{11}^n k_{12}^n k_{13}^n = 0.$$

При $k_{11} = k_{12} = k_{13} = k$ и $k_{11}^n = k_{12}^n = k_{13}^n = k^n$ получим

$$p^3 + (k + k + k)p^2 + (kk + kk + kk - k^n k^n - k^n k^n - k^n k^n)p + kkk - kk^n k^n - kk^n k^n - kk^n k^n + 2k^n k^n k^n = 0;$$

$$(k - k^n + p)^2(k + 2k^n + p) = 0$$

Корни характеристического уравнения действительные и при определенных значениях коэффициентов могут быть отрицательными, при $k^n < k$ система асимптотически устойчива. В то же время, система не может быть настроена на период Шулера.

Для получения комплексных корней изменим знак перекрестного коэффициента k_{11}^n в первой системе относительно c_{11} , c_{12} , c_{13} . Аналогично сделаем с другими системами в отношении коэффициентов k_{21}^n и k_{31}^n :

$$\begin{aligned} \dot{c}_{11} &= c_{12}\omega_z - c_{13}\omega_y - k_{11}(c_{11} - c_{11}^k) - k_{12}^n(c_{12} - c_{12}^k) - k_{13}^n(c_{13} - c_{13}^k); \\ \dot{c}_{12} &= c_{13}\omega_x - c_{11}\omega_z - k_{12}(c_{12} - c_{12}^k) + k_{11}^n(c_{11} - c_{11}^k) - k_{13}^n(c_{13} - c_{13}^k); \\ \dot{c}_{13} &= c_{11}\omega_y - c_{12}\omega_x - k_{13}(c_{13} - c_{13}^k) - k_{12}^n(c_{12} - c_{12}^k) + k_{11}^n(c_{11} - c_{11}^k). \end{aligned} \quad (22)$$

Характеристическое уравнение при $k_{11} = k_{12} = k_{13} = k$ и $k_{11}^n = k_{12}^n = k_{13}^n = k^n$ имеет вид

$$p^3 + ap^2 + bp + c = 0, \quad (23)$$

где $a = 3k$; $b = 3k^2 + (k^n)^2 + w + 2k^n(\omega_y - \omega_z)$; $c = k^3 + 2(k^n)^3 + k(k^n)^2 + kw + 2(k^n)^2(\omega_z - \omega_y) + 2k^n(\omega_y - \omega_z + \omega_y\omega_z) + 2k^n k(\omega_y - \omega_z)$; $w = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2$.

При неподвижном основании получим

$$\begin{aligned} p^3 + 3kp^2 + (3k^2 + (k^n)^2)p + k^3 + k(k^n)^2 - 2(k^n)^3 &= 0; \\ p_1 &= k^n - k; \\ p_{2,3} &= -k - \frac{k^n}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{7}k^n i \end{aligned}$$

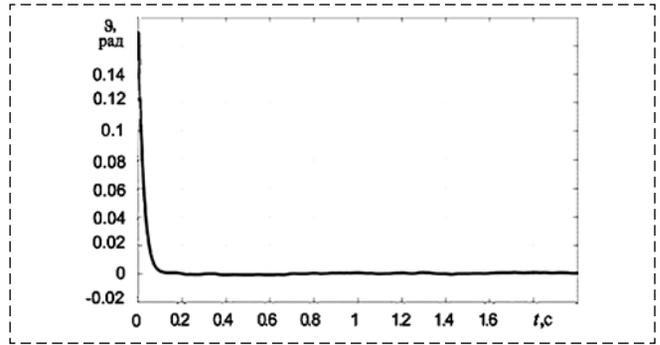


Рис. 3. Переходный процесс по углу тангажа
Fig. 3. Step response for the pitch angle

Характеристическое уравнение имеет один действительный и пару комплексно-сопряженных корней, система может быть настроена на период Шулера или на ФНЧ с заданной полосой пропускания.

На рис. 3 приведен переходный процесс по углу тангажа с ненулевыми начальными условиями на неподвижном основании. Численные значения коэффициентов задавались в соответствии с настройкой системы на фильтр Баттерворта третьего порядка с полосой пропускания 10Гц: $k = 42,8$; $k^n = 13,3$.

Графики всех АФЧХ системы качественно совпадают между собой и имеют вид, характерный для ФНЧ. Таким образом, в данном случае БИСО представляет собой фильтр нижних частот по отношению к выходным сигналам всех датчиков.

Для проверки эффективности подавления шумов на выходные сигналы датчиков были наложены белые шумы с нулевым математическим ожиданием и мощностью, соответствующей паспортным данным ИИМ. Для примера на рис. 4 приведены графики сигнала микромеханического гироскопа и оценки угла курса при неподвижном основании.

Дисперсия сигнала ММГ составляет $0,1(°/с)^2$, дисперсия оценки угла — $1,548 \cdot 10^{-6} (°/с)^2$. Аналогичные результаты были получены и по другим каналам БИСО.

Рассмотрим влияние угловых скоростей вращения на устойчивость системы (22). Классический анализ робастной устойчивости и качества замкнутой многомерной системы, основанный на определении сингулярных чисел, позволяет определить границы устойчивости при малых изменениях параметров [13]. В нашем случае коэффициенты системы (22) существенно меняются при изменении угловых скоростей. Поэтому оценим изменение условия асимптотической устойчивости по отношению к величинам ω_x , ω_y , ω_z .

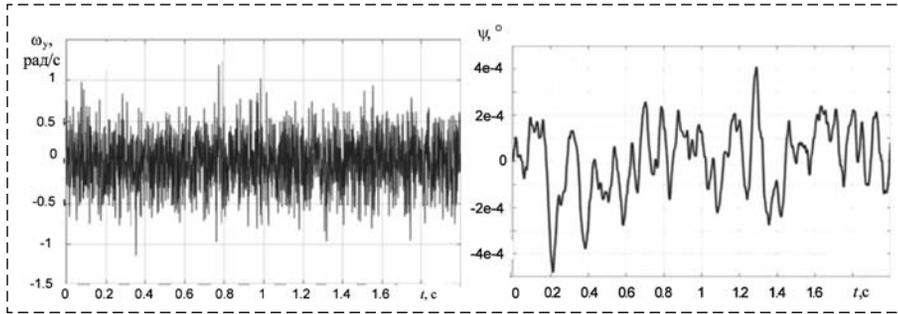


Рис. 4. Сигнала микромеханического гироскопа и оценка угла курса
 Fig. 4. Micromechanical gyroscope signal plots and yaw angle estimate

Определим предельные значения ω_x , ω_y , ω_z , при которых нарушается условие асимптотической устойчивости $ab > c$. В уравнении

$$ab - c = 0 \quad (24)$$

выразим ω_x^2 через ω_y , ω_z :

$$\begin{aligned} \omega_x^2 &= (c_0 - ab_0 - ab_{yz} + c_{yz})/2k; \\ a &= 3k; b_0 = 3k^2 + (k^n)^2; \\ c_0 &= k^3 + 2(k^n)^3 + k(k^n)^2; \\ b_{yz} &= \omega_y^2 + \omega_z^2 + 2k^n(\omega_y - \omega_z); \\ c_{yz} &= k(\omega_y^2 + \omega_z^2) + 2k^n((\omega_z - \omega_y)(k^n - k) + \\ &+ (\omega_y - \omega_z + \omega_y\omega_z)). \end{aligned}$$

На рис. 5 приведен график зависимости ω_x^2 (ω_y , ω_z) при изменениях последних в пределах ± 100 рад/с, из которого следует, что не существует действительных значений ω_x , при котором выполняется равенство (24).

Таким образом, условие асимптотической устойчивости выполняется при любых действительных значениях компонентов вектора угловой скорости в диапазоне ± 100 рад/с.

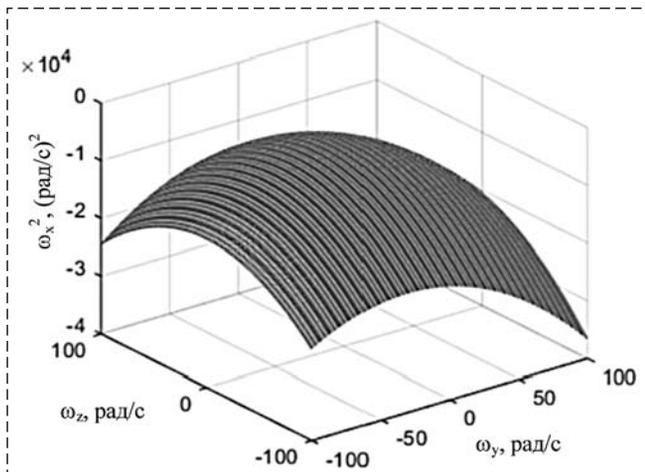


Рис. 5. График зависимости $\omega_x^2(\omega_y, \omega_z)$
 Fig. 5. Dependency of $\omega_x^2(\omega_y, \omega_z)$

Предложенная модификация кинематических уравнений в направляющих косинусах с введенными членами позиционной перекрестной коррекции позволяет придать кинематическим уравнениям свойство асимптотической устойчивости и настроить систему как фильтр нижних частот с заданной полосой пропускания по отношению к выходным сигналам датчиков ИИМ.

При этом между собственными коэффициентами коррекции и перекрестными должно выполняться соотношение $k^n < k$, а знак у перекрестных коэффициентов должен быть положительным.

Асимптотическая устойчивость и настройка на ФНЧ подтверждается корнями характеристического уравнения, переходными процессами, а также АФЧХ оценок углов ориентации относительно показаний микромеханических датчиков.

Результаты математического моделирования подтвердили компенсацию погрешностей начальной выставки БИСО, снижение мощности шумов в оценках углов ориентации по отношению к шумам в сигналах датчиков и возможность настройки системы на период Шулера.

Аналогичные результаты получены авторами для кинематических уравнений в параметрах Родрига—Гамильтона.

Список литературы

1. Матвеев В. В., Распопов В. Я. Основы построения бесплатформенных инерциальных навигационных систем. СПб.: ГНЦ РФ ОАО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор", 2009. 280 с.
2. Анучин О. Н., Емельянец Г. И. Интегрированные системы ориентации и навигации для морских подвижных объектов. СПб.: Изд-во ЦНИИ "Электроприбор", 2003. 390 с.
3. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 280 с.
4. Челноков Ю. Н. Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. 560 с.
5. Плотников П. К., Лючев С. А. Об устойчивости алгоритмов определения углов поворотов объекта по сигналам гироскопической бесплатформенной системы ориентации // Изв. вузов, Приборостроение. 1991. Т. XXXIV, № 10. С. 62—68.
6. Плотников П. К. Элементы теории работы одной разновидности бесплатформенных инерциальных систем ориентации // Гироскопия и навигация. 1999. № 3. С. 23—35.
7. Плотников П. К. Построение и анализ кватернионных дифференциальных уравнений задачи определения ориентации твердого тела с помощью бесплатформенной инерциальной навигационной системы // Механика твердого тела. 1999. № 2. С. 3—14.

8. **Premierani W., Bizard P.** Direction Cosine matrix IMU: Theory. 2009. 30 p. URL: <http://http://gentle.nav.googlecode.com/files/DCMDraft2.pdf>.

9. **Жидкова Н. В., Волков В. Л.** Моделирование бесплатформенной системы ориентации // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 1. С. 4–14.

10. **Волков В. Л., Жидкова Н. В.** Обработка информации в системе ориентации на основе МЭМС // Труды Нижегородского государственного технического университета им. Р. Е. Алексеева. Микромеханические системы. 2015. № 3. С. 279–286.

11. **Алешкин В. В., Голованов П. Н.** Модель БСО малоразмерного летательного аппарата на основе микромеханического инерциального измерительного модуля // Проблемы управления, обработки и передачи информации (УОПИ-2018): сб. тр. VI Междунар. науч. конф. Саратов: ООО СОП "Лоди", 2019. С. 79–84.

12. **Способ** автономной ориентации подвижного объекта с помощью инерциального измерительного модуля: патент № 2738342 Российская Федерация: МПК G01 М 7/00, G01 М 15/00. / Алешкин В. В., Здражевский Р. А., Голованов П. Н., Марусич В. О.; заявитель и патентообладатель Саратовский гос. тех. ун-тет имени Гагарина Ю. А.- № 2019145337; заявл. 30.12.2019.

13. **Поляк Б. Т., Щербаков П. С.** Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.

14. **Savage P. G.** Strapdown analytics. Strapdown Associates, Inc. Maple Plain, Minnesota. 2000. V. 1, 2.

15. **Li W., Wang J.** Effective adaptive Kalman filter for MEMS IMU / magnetometers integrated attitude and heading reference systems // Journal of Navigation. 2013. Vol. 66, N. 1. P. 99–113.

16. **Edwan E., Zhang J., Zxou J., Loffeld O.** Reduced DCM based attitude estimation using low-cost IMU and magnetometer triad // Proceedings of the 8th Workshop on Positioning Navigation and Communication (WPNC 11). IEEE, Dresden, Germany, April 2011. P. 1–6.

17. **Zhu R., Sun D., Zhou Z., Wang D.** A linear fusion algorithm for attitude determination using low cost MEMSbased sensors // Measurement. 2007. Vol. 40, N. 3. P. 322–328.

18. **Mahony R., Hamel T., Pflimlin J.-M.** Nonlinear complementary filters on the special orthogonal group // IEEE Transaction on Automatic Control. 2008. Vol. 53, N. 5. P. 1203–1218.

19. **Hyyti H., Visala A.** A DCM based attitude estimation algorithm for low-cost MEMS IMUs // International Journal of Navigation and Observation. 2015. ID 503814. 18 p. URL: <http://dx.doi.org/10.1155/2015/503814>.

Methods and Algorithms for Correcting Kinematic Equations in the Problem of Determining the Orientation of an Object

V. V. Aleshkin¹, aleshkinvv@yandex.ru, R. A. Zrazhevsky¹, pribor@sstu.ru,

P. N. Golovanov², golovanovpn@mail.ru, V. O. Marusich^{1,2}, arusich.vadim@mail.ru,

¹ Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, 410054, Russian Federation,

² Design Bureau of Industrial Automation, Saratov, 410005, Russian Federation

Corresponding autor: Aleshkin Valeri V., D. Sc., Associate Professor, Professor of the Instrument Engineering Department of Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, 410054, Russian Federation, e-mail: aleshkinvv@yandex.ru

Accepted on May 29, 2021

Abstract

Algorithms of a strapdown inertial orientation system with an inertial measurement module consisting of a three-component gyroscope, accelerometer, and magnetometer are considered. The aim of the work is to improve the algorithms for processing sensor information to ensure the asymptotic stability of the system, tuning for the Schuler period and the low-pass filter with a given bandwidth. The kinematic Poisson equations with positional and integral-positional correction based on the information of accelerometers and magnetometers are considered. The stability and frequency characteristics of the system in relation to the sensor output signals are analyzed. It is shown that the positional correction in each channel does not allow you to adjust the system for the Schuler period. The integral-positional correction allows this adjustment, but in relation to the gyroscope signals, the system is a bandpass filter and does not suppress noise in the bandwidth. The advantages of using positional correction with cross-links in the sense of tuning the frequency characteristics of the system to the Sharper frequency and the third-order low-pass filter are shown. The analysis of the influence of angular velocities confirmed the asymptotic stability of the system with their changes in a given range. The results of mathematical modeling confirmed the compensation of errors in the initial orientation system display, the reduction of noise power in the estimates of the orientation angles in relation to the noise in the sensor signals, and the ability to configure the system for the Schuler period.

Keywords: *strapdown orientation system, kinematic equations, stability, correction, mathematical modeling, frequency characteristics*

For citation:

Aleshkin V. V., Zrazhevsky R. A., Golovanov P. N., Marusich V. O. Methods and Algorithms for Correcting Kinematic Equations in the Problem of Determining the Orientation of an Object, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 9, pp. 494–504.

DOI: 10.17587/mau.22.494-504

References

1. **Matveev V. V., Raspopov V. Ya.** Fundamentals of construction of free-form inertial navigation systems, St. Petersburg, Koncern CNII "Electropribor", 2009, 280 p. (in Russian).

2. **Anuchin O. N., Emeliantsev G. I.** Integrated systems of orientation and navigation for marine mobile objects, St. Petersburg, Koncern CNII "Electropribor", 2003, 390 p. (in Russian).

3. **Branets V. N., Shmyglevsky I. P.** Introduction to the theory of free-form inertial navigation systems, Moscow, Nauka, 1992, 280 p. (in Russian).

4. **Chelnikov Yu. N.** Quaternion models and methods of aerodynamics, navigation and motion control, Moscow, Fizmatlit, 2011, 560 p. (in Russian).
5. **Plotnikov P. K., Lucev S. A.** On the stability of algorithms to determine turn angles of the object signals gyro strapdown navigation systems, *Izvestia vuzov. Priborostroenie*, 1991, vol. XXXIV, no. 10, pp. 62–68 (in Russian).
6. **Plotnikov P. K.** Elements of the theory work the same variety of strapdown inertial orientation systems, *Gyroscopy and Navigation*, 1999, no. 3, pp. 23–35 (in Russian).
7. **Plotnikov P. K.** Construction and analysis of quaternion differential equations the problem of determining the orientation of a rigid body with the help of a strapdown inertial navigation system, *Mechanica Tverdogo Tela*, 1999, no. 2, pp. 3–14 (in Russian).
8. **Premerlani W., Bizard P.** Direction Cosine matrix IMU: Theory, 2009, 30 p. available at: <http://gentlenav.googlecode.com/files/DCMDraft2.pdf>
9. **Zhidkova N. V., Volkov V. L.** Simulation of strapdown inertial orientation system, *Sovremennue Problemu Nayki i Obrazovania*, 2015, no. 1, pp. 4–14 (in Russian).
10. **Volkov V. L., Zhidkova N. V.** Information processing in the orientation system based on MEMS, *Trudu Nizegorodskogo gosudarstvennogo tehnikeskogo universiteta imeni R. E. Alekseeva. Mikromekhanicheskie Sistemy*, 2015, no. 3, pp. 279–286 (in Russian).
11. **Aleshkin V. V., Golovanov P. N.** Model BSO of a small-sized aircraft based on a micromechanical inertial measurement module, *Problemu ypravleniya, obrabotki i peredachi informacii, ICIT 2018 — VI International Scientific Conference*. Saratov, Lodi, 2019, pp. 79–84 (in Russian).
12. **Aleshkin V. V., Zdrachevsky R. A., Golovanov P. N., Marusich V. O.** Method of autonomous orientation of a moving object using an inertial measurement module, patent No. 2738342 Russian Federation (in Russian).
13. **Polyak B. T., Shcherbakov P. S.** Robust stability and control, Moscow, Nauka, 2002, 303 p. (in Russian).
14. **Savage P. G.** Strapdown analytics, Published by Strapdown Associates, Inc. Maple Plain, Minnesota, 2000, vol. 1, 2.
15. **Li W., Wang J.** Effective adaptive Kalman filter for MEMS IMU / magnetometers integrated attitude and heading reference systems, *Journal of Navigation*, 2013, vol. 66, no. 1, pp. 99–113.
16. **Edwan E., Zhang J., Zxou J., Loffeld O.** Reduced DCM based attitude estimation using low-cost IMU and magnetometer triad, in *Proceedings of the 8th Workshop on Positioning Navigation and Communication (WPNC 11)*, pp. 1-6, IEEE, Dresden, Germany, April 2011.
17. **Zhu R., Sun D., Zhou Z., Wang D.** A linear fusion algorithm for attitude determination using low cost MEMSbased sensors, *Measurement*, 2007, vol. 40, no. 3, pp. 322–328.
18. **Mahony R., Hamel T., Plimlin J.-M.** Nonlinear complementary filters on the special orthogonal group, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2008, vol. 53, no. 5, pp. 1203–1218.
19. **Hyyti H., Visala A.** A DCM based attitude estimation algorithm for low-cost MEMS IMUs, *International Journal of Navigation and Observation*, 2015, ID 503814, 18 p., available at: <http://dx.doi.org/10.1155/2015/503814>

Издательство "НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ"

107076, Москва, Стромьинский пер., 4

Телефон редакции журнала: **(499) 269-5510, (499) 269-5397**

Технический редактор *Е. В. Конова*. Корректор *М. Ю. Безменова*.

Сдано в набор 25.06.2021. Подписано в печать 11.08.2021. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН921. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Авансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Авансед солюшнз".
119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1. Сайт: www.aov.ru