

Х. Б. Данг, аспирант, dangkhabinh90@gmail.com, **А. А. Пыркин**, д-р техн. наук, проф., a.pyrkin@gmail.com, **А. А. Бобцов**, д-р техн. наук, проф., bobtsov@mail.ru, **А. А. Ведяков**, канд. техн. наук, vedyakov@gmail.com, **С. И. Низовцев**, аспирант, glenmetthews@gmail.com, Университет ИТМО, г. Санкт-Петербург

Синтез адаптивных наблюдателей по выходу для линейных нестационарных систем с полиномиальными параметрами

Рассматривается задача синтеза наблюдателя переменных состояния для линейного нестационарного объекта управления. Для решения этой задачи вводится ряд реалистичных допущений, предполагающих, что параметры объекта являются полиномиальными функциями времени с неизвестными коэффициентами. Задача синтеза наблюдателя решается в классе идентификационных методов, предусматривающих преобразование исходной линейной динамической математической модели объекта к линейной статической регрессии, в которой вместо неизвестных постоянных параметров присутствуют переменные состояния генераторов, моделирующих нестационарные параметры. Для восстановления неизвестных функций регрессионной модели используется хорошо зарекомендовавший себя в последнее время метод динамического расширения и декомпозиции (смешивания) регрессора, позволяющий получать монотонные оценки, а также обеспечивающий ускорение сходимости оценок к истинным значениям. Несмотря на то, что в статье решается задача синтеза наблюдателя переменных состояния, стоит отметить возможность использования предлагаемого подхода для решения самостоятельной и актуальной задачи оценивания неизвестных нестационарных параметров.

Ключевые слова: нестационарные линейные системы, идентификация полиномиальных параметров, метод динамического расширения и смешивания регрессора, синтез наблюдателей состояния

Введение

Синтез наблюдателей переменных состояния сохраняет свою актуальность, поскольку способ управления по состоянию является самым надежным в смысле обеспечения заданных показателей качества. Методов построения наблюдателей состояния существует огромное число, и наиболее интересны те из них, которые эффективны для параметрически неопределенных объектов. Следует отметить, что существуют косвенные методы решения задачи стабилизации по выходу (т. е. без измерения вектора переменных состояния), не предусматривающие прямого синтеза наблюдателя в контуре обратной связи (см., например, [1]). Однако эти методы, как правило, носят частный характер, т. е. предусматривают решение задачи синтеза регуляторов для частной структуры математической модели объекта управления.

В статьях [2–4] предложена идея сведения модели динамических систем к линейной регрессионной модели, хорошо известной в теории идентификации (см., например, [5]). Аналогичная идея, т. е. представление динамической системы в форме линейной регрессионной модели, будет представлена в рамках данной статьи. Однако важным отличием от работ [2–4] является рассмотрение математических моделей, содержащих неизвестные не-

стационарные параметры. В недавней статье [6] был предложен алгоритм синтеза наблюдателей для линейной нестационарной системы, математическая модель которой содержит неизвестные нестационарные параметры (переменные коэффициенты). Однако в работе [6] относительно неизвестных нестационарных параметров было выдвинуто допущение о том, что параметр представляет собой произведение неизвестного постоянного коэффициента на измеряемую функцию времени.

Близкая задача для линейных нестационарных объектов была опубликована в работах [7–9]. В статьях [7, 8] задача синтеза наблюдателя переменных состояния не рассматривалась, а параметры изменяются во времени по линейному закону с постоянной скоростью на конечных интервалах времени. В работе [9] была решена задача синтеза наблюдателя для нестационарной системы с полиномиальными параметрами произвольной степени, однако для ограниченного класса систем. Также следует отметить, что решение, представленное в работе [9], не применимо для актуальных практических приложений. В этой статье будет представлена более сложная постановка задачи, предполагающая наличие полиномиальных параметров произвольной степени, являющихся коэффициентами как измеряемых сигналов, так и недоступных для измерения переменных состояния.

Постановка задачи

Рассмотрим линейную нестационарную систему вида

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\theta}(t)y(t) + \boldsymbol{\eta}(t)\dot{y}(t) + \mathbf{B}(t)u(t); \\ y(t) &= \mathbf{C}^T\mathbf{x}(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{x} \in R^N$ — неизмеряемый вектор переменных состояния; $u \in R^1$ — управляющее воздействие; $y(t)$ — измеряемая выходная переменная; матрицы \mathbf{A} , \mathbf{C} имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{N \times N}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix};$$

неизвестные параметры $\boldsymbol{\eta}(t) \in R^N$, $\boldsymbol{\theta}(t) \in R^N$ и $\mathbf{B}(t) \in R^N$ представляют собой полиномиальные функции времени

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}(t) &= \boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{\theta}_1 t + \boldsymbol{\theta}_2 t^2 + \dots + \boldsymbol{\theta}_l t^l; \\ \boldsymbol{\eta}(t) &= \boldsymbol{\eta}_0 + \boldsymbol{\eta}_1 t + \boldsymbol{\eta}_2 t^2 + \dots + \boldsymbol{\eta}_m t^m; \\ \mathbf{B}(t) &= \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 t + \mathbf{B}_2 t^2 + \dots + \mathbf{B}_n t^n \end{aligned} \quad (2)$$

с известными степенями l , n и m и неизвестными коэффициентами $\boldsymbol{\theta}_i$, $i = 0, \dots, l$, $\boldsymbol{\eta}_j$, $j = 0, \dots, m$, и \mathbf{B}_k , $k = 0, \dots, n$.

Требуется синтезировать алгоритм оценивания неизвестных параметров $\boldsymbol{\eta}(t)$, $\boldsymbol{\theta}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ и переменных состояния $\mathbf{x}(t)$, обеспечивающий выполнение условий

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\theta}(t) - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) &= 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\eta}(t) - \hat{\boldsymbol{\eta}}(t) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{B}(t) - \hat{\mathbf{B}}(t) &= 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где переменные $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$, $\hat{\boldsymbol{\eta}}(t)$, $\hat{\mathbf{B}}(t)$ и $\hat{\mathbf{x}}(t)$ обозначают оценки функций $\boldsymbol{\eta}(t)$, $\boldsymbol{\theta}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ и $\mathbf{x}(t)$.

Параметризация модели объекта управления

Параметризация линейных систем с коэффициентами полиномиального вида предполагает использование динамических линейных фильтров, на вход которых поступают измеряемые сигналы. Рассматриваемая задача осложнена наличием неизмеряемой производной выходной переменной $y(t)$.

Для облегчения восприятия основного результата статьи начнем с рассмотрения более простого частного случая при $\boldsymbol{\eta} \equiv 0$. Далее будет представлено расширение на более общий случай системы вида (1).

Утверждение 1 [9]. Рассмотрим нестационарную линейную систему вида (1), в которой $\boldsymbol{\eta}(t) = 0$, $\forall t$, и фильтры

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\zeta}}(t) &= \mathbf{F}\boldsymbol{\zeta}(t) + \mathbf{K}y(t); \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}}_0(t) &= \mathbf{F}\boldsymbol{\Omega}_0(t) - \mathbf{I}u(t); \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}}_k(t) &= \mathbf{F}\boldsymbol{\Omega}_k(t) - \boldsymbol{\Omega}_{k-1}(t), \quad k = 1, \dots, n; \\ \dot{\mathbf{P}}_0(t) &= \mathbf{F}\mathbf{P}_0(t) - \mathbf{I}y(t); \\ \dot{\mathbf{P}}_i(t) &= \mathbf{F}\mathbf{P}_i(t) - \mathbf{P}_{i-1}(t), \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (4)$$

с произвольными начальными условиями, где вектор столбец $\mathbf{K} \in R^n$ такой, что матрица $\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C}^T$ является гурвицевой; \mathbf{I} — единичная матрица размерности $N \times N$.

Тогда справедлива следующая параметризация:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\zeta}(t) &= \mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\Omega}_0(t)\mathbf{B}(t) + \boldsymbol{\Omega}_1(t)\dot{\mathbf{B}}(t) + \dots + \\ &+ \boldsymbol{\Omega}_n(t)\mathbf{B}^{(n)}(t) + \mathbf{P}_0(t)\boldsymbol{\theta}(t) + \mathbf{P}_1(t)\dot{\boldsymbol{\theta}}(t) + \dots + \\ &+ \mathbf{P}_m(t)\boldsymbol{\theta}^{(m)}(t) + \bar{\mathbf{e}}(t), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\bar{\mathbf{e}}(t)$ — вектор экспоненциально затухающих функций времени.

Доказательство Утверждения 1. Рассмотрим вспомогательную переменную

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}(t) &:= \boldsymbol{\zeta}(t) - \mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\Omega}_0(t)\mathbf{B}(t) - \boldsymbol{\Omega}_1(t)\dot{\mathbf{B}}(t) - \\ &- \dots - \boldsymbol{\Omega}_n(t)\mathbf{B}^{(n)}(t) - \mathbf{P}_0(t)\boldsymbol{\theta}(t) - \mathbf{P}_1(t)\dot{\boldsymbol{\theta}}(t) - \\ &- \dots - \mathbf{P}_m(t)\boldsymbol{\theta}^{(m)}(t) \end{aligned}$$

и вычислим ее производную

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{e}}}(t) &= \dot{\boldsymbol{\zeta}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\boldsymbol{\Omega}}_0(t)\mathbf{B}(t) - \boldsymbol{\Omega}_0(t)\dot{\mathbf{B}}(t) - \\ &- \dot{\boldsymbol{\Omega}}_1(t)\dot{\mathbf{B}}(t) - \boldsymbol{\Omega}_1(t)\ddot{\mathbf{B}}(t) - \dots - \dot{\boldsymbol{\Omega}}_n(t)\mathbf{B}^{(n)}(t) - \\ &- \boldsymbol{\Omega}_n(t)\underbrace{\mathbf{B}^{(n+1)}(t)}_{=0} - \dot{\mathbf{P}}_0(t)\boldsymbol{\theta}(t) - \mathbf{P}_0(t)\dot{\boldsymbol{\theta}}(t) - \\ &- \dot{\mathbf{P}}_1(t)\dot{\boldsymbol{\theta}}(t) - \mathbf{P}_1(t)\ddot{\boldsymbol{\theta}}(t) - \dots - \mathbf{P}_m(t)\underbrace{\boldsymbol{\theta}^{(m+1)}(t)}_{=0} = \\ &= \mathbf{F}\boldsymbol{\zeta}(t) + \mathbf{K}y(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\theta}(t)y(t) - \mathbf{B}(t)u(t) - \\ &- (\mathbf{F}\boldsymbol{\Omega}_0(t) - \mathbf{I}u(t))\mathbf{B}(t) - \boldsymbol{\Omega}_0(t)\dot{\mathbf{B}}(t) - \\ &- (\mathbf{F}\boldsymbol{\Omega}_1(t) - \boldsymbol{\Omega}_0(t))\dot{\mathbf{B}}(t) - \boldsymbol{\Omega}_1(t)\ddot{\mathbf{B}}(t) - \dots - \\ &- (\mathbf{F}\boldsymbol{\Omega}_{n-1}(t) - \boldsymbol{\Omega}_{n-2}(t))\mathbf{B}^{(n-1)}(t) - \boldsymbol{\Omega}_{n-1}(t)\mathbf{B}^{(n)}(t) - \\ &- (\mathbf{F}\boldsymbol{\Omega}_n(t) - \boldsymbol{\Omega}_{n-1}(t))\mathbf{B}^{(n)}(t) - (\mathbf{F}\mathbf{P}_0(t) - \mathbf{I}y(t))\boldsymbol{\theta}(t) - \\ &- \mathbf{P}_0(t)\dot{\boldsymbol{\theta}}(t) - (\mathbf{F}\mathbf{P}_1(t) - \mathbf{P}_0(t))\dot{\boldsymbol{\theta}}(t) - \mathbf{P}_1(t)\ddot{\boldsymbol{\theta}}(t) - \\ &- \dots - (\mathbf{F}\mathbf{P}_{m-1}(t) - \mathbf{P}_{m-2}(t))\boldsymbol{\theta}^{(m-1)}(t) - \\ &- \mathbf{P}_{m-1}(t)\boldsymbol{\theta}^{(m)}(t) - (\mathbf{F}\mathbf{P}_m(t) - \mathbf{P}_{m-1}(t))\boldsymbol{\theta}^{(m)}(t) = \\ &= \mathbf{F} \left(\underbrace{\begin{aligned} &\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{x} - \boldsymbol{\Omega}_0(t)\mathbf{B}(t) - \dots - \\ &- \boldsymbol{\Omega}_n(t)\mathbf{B}^{(n)}(t) - \mathbf{P}_0(t)\boldsymbol{\theta}(t) - \dots - \mathbf{P}_m(t)\boldsymbol{\theta}^{(m)} \end{aligned}}_{\bar{\mathbf{e}}(t)} \right). \end{aligned}$$

В вычислении производной $\bar{\mathbf{e}}(t)$ были выполнены сокращения членов вида $\Omega_{k-1}(t)\mathbf{B}^{(k)}(t)$ для $k = 1, \dots, n$ и $\mathbf{P}_{i-1}(t)\theta^{(i)}(t)$ для $i = 1, \dots, m$. Поскольку матрица \mathbf{F} является гурвицевой, то функция $\bar{\mathbf{e}}(t)$, удовлетворяющая уравнению $\dot{\bar{\mathbf{e}}}(t) = \mathbf{F}\bar{\mathbf{e}}(t)$, экспоненциально стремится к нулю при любых начальных условиях $\bar{\mathbf{e}}(0)$, что и требовалось доказать.

Перейдем теперь к более общему случаю, сформулированному в постановке задачи. Рассмотрим вспомогательную лемму.

Лемма. Матрицы $\mathbf{Q}_j(t)$, $j = 0, \dots, l$, рассчитанные по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_0(t) &= \mathbf{F}\mathbf{P}_0(t) - \mathbf{I}\dot{y}(t), \quad j = 0, \text{ если } l \neq 0; \\ \mathbf{Q}_j(t) &= \mathbf{F}\mathbf{P}_j(t) - \mathbf{P}_{j-1}(t), \\ j &= 1, \dots, \min\{m, l\}, \text{ если } l \leq m; \\ \dot{\mathbf{Q}}_j(t) &= \mathbf{F}\mathbf{Q}_j(t) - \mathbf{Q}_{j-1}(t), \\ j &= (m+1), \dots, l, \text{ если } l > m, \end{aligned} \quad (6)$$

удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}}_0(t) &= \mathbf{F}\mathbf{Q}_0(t) - \mathbf{I}\dot{y}(t); \\ \dot{\mathbf{Q}}_j(t) &= \mathbf{F}\mathbf{Q}_j(t) - \mathbf{Q}_{j-1}(t), \quad \forall j = 1, \dots, l. \end{aligned} \quad (7)$$

Доказательство Леммы. Вычислим производную матриц $\mathbf{Q}_j(t)$. Для $j = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}}_0 &= \mathbf{F}\dot{\mathbf{P}}_0 - \mathbf{I}\ddot{y} = \mathbf{F}^2\mathbf{P}_0 - \mathbf{F}\dot{y} - \mathbf{I}\ddot{y} = \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{Q}_0 + \mathbf{I}\dot{y}) - \mathbf{F}\dot{y} - \mathbf{I}\ddot{y} = \mathbf{F}\mathbf{Q}_0 - \mathbf{I}\ddot{y}. \end{aligned}$$

Для $j = 1$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}}_1 &= \mathbf{F}\dot{\mathbf{P}}_1 - \dot{\mathbf{P}}_0 = \mathbf{F}^2\mathbf{P}_1 - \mathbf{F}\mathbf{P}_0 - (\mathbf{F}\mathbf{P}_0 - \mathbf{I}\dot{y}) = \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{Q}_1 + \mathbf{P}_0) - \mathbf{F}\mathbf{P}_0 - (\mathbf{Q}_0 + \mathbf{I}\dot{y}) + \mathbf{I}\dot{y} = \mathbf{F}\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0. \end{aligned}$$

Для $j = 2, \dots, \min\{m, l\}$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}}_j &= \mathbf{F}\dot{\mathbf{P}}_j - \dot{\mathbf{P}}_{j-1} = \\ &= \mathbf{F}^2\mathbf{P}_j - \mathbf{F}\mathbf{P}_{j-1} - \mathbf{F}\mathbf{P}_{j-1} - (\mathbf{F}\mathbf{P}_{j-1} - \mathbf{P}_{j-2}) = \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{Q}_j + \mathbf{P}_{j-1}) - \mathbf{F}\mathbf{P}_{j-1} - (\mathbf{Q}_{j-1} + \mathbf{P}_{j-2}) + \mathbf{P}_{j-2} = \\ &= \mathbf{F}\mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_{j-1}. \end{aligned}$$

Для $j = (m+1), \dots, l$ уравнение (7) совпадает с (6). Лемма доказана.

В следующем утверждении представлена параметризация модели (1), аналогичная Утверждению 1.

Утверждение 2. Рассмотрим нестационарную линейную систему вида (1) и фильтры вида (4) с произвольными начальными условиями, где вектор-столбец $\mathbf{K} \in R^n$ такой, что матрица $\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C}^T$ является гурвицевой, \mathbf{I} — единичная матрица размерности $N \times N$.

Тогда справедлива следующая параметризация:

$$\begin{aligned} \zeta(t) &= \mathbf{x}(t) + \Omega_0(t)\mathbf{B}(t) + \Omega_1(t)\dot{\mathbf{B}}(t) + \dots + \\ &+ \Omega_n(t)\mathbf{B}^{(n)}(t) + \mathbf{P}_0(t)\theta(t) + \mathbf{P}_1(t)\dot{\theta}(t) + \dots + \\ &+ \mathbf{P}_m(t)\theta^{(m)}(t) + \mathbf{Q}_0(t)\eta(t) + \mathbf{Q}_1(t)\dot{\eta}(t) + \dots + \\ &+ \mathbf{Q}_l(t)\eta^{(l)}(t) + \mathbf{e}(t), \end{aligned} \quad (8)$$

где матрицы $\mathbf{Q}_j(t)$, $j = 0, \dots, l$, вычисляются по формулам (6), и $\mathbf{e}(t)$ — экспоненциально затухающая функция времени.

Доказательство Утверждения 2. Используя выражение (7), вычислим производную вектора

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(t) &= \zeta(t) - \mathbf{x}(t) - \Omega_0(t)\mathbf{B}(t) - \Omega_1(t)\dot{\mathbf{B}}(t) - \\ &- \dots - \Omega_n(t)\mathbf{B}^{(n)}(t) - \mathbf{P}_0(t)\theta(t) - \mathbf{P}_1(t)\dot{\theta}(t) - \\ &- \dots - \mathbf{P}_m(t)\theta^{(m)}(t) - \mathbf{Q}_0(t)\eta(t) - \mathbf{Q}_1(t)\dot{\eta}(t) - \\ &- \dots - \mathbf{Q}_l(t)\eta^{(l)}(t), \end{aligned}$$

представленного в уравнении параметризации (8):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}(t) &= \dot{\zeta}(t) - \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\Omega}_0(t)\mathbf{B}(t) - \Omega_0(t)\dot{\mathbf{B}}(t) - \\ &- \dot{\Omega}_1(t)\dot{\mathbf{B}}(t) - \Omega_1(t)\ddot{\mathbf{B}}(t) - \dots - \dot{\Omega}_n(t)\mathbf{B}^{(n)}(t) - \\ &- \dot{\mathbf{P}}_0(t)\theta(t) - \mathbf{P}_0(t)\dot{\theta}(t) - \dot{\mathbf{P}}_1(t)\dot{\theta}(t) - \\ &- \mathbf{P}_1(t)\ddot{\theta}(t) - \dots - \dot{\mathbf{P}}_m(t)\theta^{(m)}(t) - \dot{\mathbf{Q}}_0(t)\eta(t) - \\ &- \mathbf{Q}_0(t)\dot{\eta}(t) - \dot{\mathbf{Q}}_1(t)\dot{\eta}(t) - \mathbf{Q}_1(t)\ddot{\eta}(t) - \\ &- \dots - \dot{\mathbf{Q}}_l(t)\eta^{(l)}(t). \end{aligned} \quad (9)$$

Подстановка выражений для $\dot{\Omega}_k, \dot{\mathbf{P}}_i$ и $\dot{\mathbf{Q}}_j$ (см. (4) и (7)) в уравнение (9) приводит к выводу, аналогичному сделанному в Утверждении 1: функция $\mathbf{e}(t)$ удовлетворяет уравнению $\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{e}(t)$, что и требовалось доказать.

Синтез наблюдателей для нестационарных параметров

Получив параметризацию модели объекта (1) в виде линейного регрессионного уравнения (8), запишем линейное регрессионное уравнение, зависящее от нестационарных параметров $\theta(t)$, $\eta(t)$ и $\mathbf{B}(t)$, включая все их производные. Умножим уравнение (8) слева на вектор-строку \mathbf{C}^T :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^T\zeta(t) &= \mathbf{C}^T\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}^T\Omega_0(t)\mathbf{B}(t) + \\ &+ \mathbf{C}^T\Omega_1(t)\dot{\mathbf{B}}(t) + \dots + \mathbf{C}^T\Omega_n(t)\mathbf{B}^{(n)}(t) + \\ &+ \mathbf{C}^T\mathbf{P}_0(t)\theta(t) + \mathbf{C}^T\mathbf{P}_1(t)\dot{\theta}(t) + \dots + \\ &+ \mathbf{C}^T\mathbf{P}_m(t)\theta^{(m)}(t) + \mathbf{C}^T\mathbf{Q}_0(t)\eta(t) + \\ &+ \mathbf{C}^T\mathbf{Q}_1(t)\dot{\eta}(t) + \dots + \mathbf{C}^T\mathbf{Q}_l(t)\eta^{(l)}(t) + \mathbf{C}^T\mathbf{e}(t) \end{aligned}$$

или

$$z(t) - y(t) = \omega_0(t)\mathbf{B}(t) + \omega_1(t)\dot{\mathbf{B}}(t) + \dots + \omega_n(t)\mathbf{B}^{(n)}(t) + \pi_0(t)\boldsymbol{\theta}(t) + \pi_1(t)\dot{\boldsymbol{\theta}}(t) + \dots + \pi_m(t)\boldsymbol{\theta}^{(m)}(t) + \kappa_0(t)\boldsymbol{\eta}(t) + \kappa_1(t)\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \dots + \kappa_l(t)\boldsymbol{\eta}^{(l)}(t) + \varepsilon(t) \quad (10)$$

где $z(t) = \mathbf{C}^T \boldsymbol{\xi}(t)$, $\omega_k(t) = \mathbf{C}^T \boldsymbol{\Omega}_k(t)$, $\pi_i(t) = \mathbf{C}^T \mathbf{P}_i(t)$, $\kappa_j = \mathbf{C}^T \mathbf{Q}_j$ являются известными функциями времени для $k = 0, \dots, n$, $i = 0, \dots, m$, $j = 0, \dots, l$ и $\varepsilon(t) = \mathbf{C}^T \mathbf{e}(t)$ — экспоненциально затухающая функция времени.

Далее можем воспользоваться методом динамического расширения и декомпозиции (смешивания) регрессора [10–13] для получения скалярных уравнений относительно элементов векторов $\mathbf{B}(t)$, $\boldsymbol{\theta}(t)$ и $\boldsymbol{\eta}(t)$, а также всех их производных. Поскольку переменные $z(t)$, $\omega_k(t)$, $\pi_i(t)$, $\kappa_j(t)$ зависят от параметров вектора \mathbf{K} , то для удобства опустим аргумент времени и перепишем уравнение (10) в виде

$$z(\mathbf{K}) - y = \omega_0(\mathbf{K})\mathbf{B} + \omega_2(\mathbf{K})\dot{\mathbf{B}} + \dots + \omega_n(\mathbf{K})\mathbf{B}^{(n)} + \pi_0(\mathbf{K})\boldsymbol{\theta} + \pi_1(\mathbf{K})\dot{\boldsymbol{\theta}} + \dots + \pi_m(\mathbf{K})\boldsymbol{\theta}^{(m)} + \kappa_0(\mathbf{K})\boldsymbol{\eta} + \kappa_1(\mathbf{K})\dot{\boldsymbol{\eta}} + \dots + \kappa_l(\mathbf{K})\boldsymbol{\eta}^{(l)} + \varepsilon(\mathbf{K}).$$

Выберем $r = (n + m + l + 3)N$ различных значений вектора \mathbf{K} и запишем систему из полученных уравнений в матричном виде:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} z(1) - y \\ \vdots \\ z(r) - y \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} [\omega(1)] & [\pi(1)] & [\kappa(1)] \\ \vdots \\ [\omega(r)] & [\pi(r)] & [\kappa(r)] \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Phi}} \underbrace{\begin{bmatrix} [\mathbf{B}] \\ [\boldsymbol{\theta}] \\ [\boldsymbol{\eta}] \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Theta}}, \quad (11)$$

где для компактности записи были использованы обозначения

$$[\omega] = [\omega_1 \dots \omega_n], [\pi] = [\pi_1 \dots \pi_m], [\kappa] = [\kappa_1 \dots \kappa_l],$$

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{B}^{(n)} \end{bmatrix}, [\boldsymbol{\theta}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}^{(m)} \end{bmatrix}, [\boldsymbol{\eta}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\eta}^{(l)} \end{bmatrix}.$$

Матричное уравнение (11) может быть декомпозировано на скалярные с помощью операций вычисления определителя $\det(*)$ и союзной матрицы $\text{adj}(*)$. Мы пренебрегли экспоненциально затухающими членами, которые тем быстрее сходятся к нулю, чем меньше значение параметра $\max \text{Re} \lambda \{ \mathbf{A} - \mathbf{K} \mathbf{C}^T \}$.

Имеем

$$\begin{bmatrix} [\rho] \\ [\sigma] \\ [\tau] \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Theta} \Delta(t); \quad \begin{bmatrix} [\rho] \\ [\sigma] \\ [\tau] \end{bmatrix} = \text{adj}(\boldsymbol{\Phi}(t)) \mathbf{Y}(t);$$

$$\Delta(t) = \det(\boldsymbol{\Phi}(t)),$$

где $[\rho] = [\mathbf{B}] \Delta$, $[\sigma] = [\boldsymbol{\theta}] \Delta$ и $[\tau] = [\boldsymbol{\eta}] \Delta$ соответственно.

Замечание 1. В целях упрощения вычислений значений $\rho_k(t)$, $\sigma_i(t)$ и $\tau_l(t)$ следует воспользоваться правилом Крамера [14]: l -й элемент вектора $\text{adj}(\boldsymbol{\Phi}(t)) \mathbf{Y}(t)$ равен определителю матрицы $\boldsymbol{\Phi}(t)$, в которой l -й столбец заменен вектором $\mathbf{Y}(t)$.

В следующем утверждении сформулирован основной результат статьи, представляющий собой процедуру синтеза наблюдателей нестационарных параметров и переменных состояния $\mathbf{x}(t)$ модели (1).

Утверждение 3. Для оценивания переменных состояния $\mathbf{x}(t)$ нестационарной системы (1) и параметров $\boldsymbol{\theta}(t)$, $\boldsymbol{\eta}(t)$ и $\mathbf{B}(t)$, удовлетворяющих уравнениям (2), наблюдатель вида

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= \zeta(t) - \boldsymbol{\Omega}_0(t) \hat{\zeta}_0(t) - \dots - \boldsymbol{\Omega}_n(t) \hat{\zeta}_n(t) - \\ &- \mathbf{P}_0(t) \hat{\xi}_0(t) - \dots - \mathbf{P}_m(t) \hat{\xi}_m(t) - \mathbf{Q}_0(t) \hat{\nu}_0(t) - \\ &- \dots - \mathbf{Q}_l(t) \hat{\nu}_l(t); \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) &= \hat{\xi}_0(t), \hat{\mathbf{B}}(t) = \hat{\zeta}_0(t), \hat{\boldsymbol{\eta}}(t) = \hat{\nu}_0(t); \\ \dot{\hat{\xi}}_i &= \hat{\xi}_{i+1} + \gamma \Delta(\rho_i - \hat{\xi}_i \Delta), \quad i = 0, \dots, n-1; \\ \dot{\hat{\xi}}_n &= \gamma \Delta(\rho_n - \hat{\xi}_n \Delta); \\ \dot{\hat{\zeta}}_k &= \hat{\zeta}_{k+1} + \gamma \Delta(\sigma_k - \hat{\zeta}_k \Delta), \quad k = 0, \dots, m-1; \\ \dot{\hat{\zeta}}_m &= \gamma \Delta(\sigma_m - \hat{\zeta}_m \Delta); \\ \dot{\hat{\nu}}_j &= \hat{\nu}_{j+1} + \gamma \Delta(\tau_j - \hat{\nu}_j \Delta), \quad j = 0, \dots, l-1; \\ \dot{\hat{\nu}}_l &= \gamma \Delta(\tau_l - \hat{\nu}_l \Delta) \end{aligned}$$

обеспечивает выполнение цели (3) при $\gamma > 0$ и удовлетворении условия неисчезающего возбуждения функции $\Delta(t)$.

Доказательство Утверждения 3. Рассмотрим переменные ошибок $\tilde{\xi}_i = \boldsymbol{\theta}^{(i)} - \hat{\xi}_i$, $i = 0, \dots, n$; $\tilde{\zeta}_k = \mathbf{B}^{(k)} - \hat{\zeta}_k$, $k = 0, \dots, m$; $\tilde{\nu}_j = \boldsymbol{\eta}^{(j)} - \hat{\nu}_j$, $j = 0, \dots, l$, производные которых удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\xi}}_i &= \tilde{\xi}_{i+1} - \gamma \Delta^2 \tilde{\xi}_i, \quad i = 0, \dots, n-1; \\ \dot{\tilde{\xi}}_n &= -\gamma \Delta^2 \tilde{\xi}_n; \\ \dot{\tilde{\zeta}}_k &= \tilde{\zeta}_{k+1} - \gamma \Delta^2 \tilde{\zeta}_k, \quad k = 0, \dots, m-1; \\ \dot{\tilde{\zeta}}_m &= -\gamma \Delta^2 \tilde{\zeta}_m; \\ \dot{\tilde{\nu}}_j &= \tilde{\nu}_{j+1} - \gamma \Delta^2 \tilde{\nu}_j, \quad j = 0, \dots, l-1; \\ \dot{\tilde{\nu}}_l &= \gamma - \Delta^2 \tilde{\nu}_l. \end{aligned} \quad (12)$$

Последовательное интегрирование моделей ошибок от n к 0, от m к 0 и от l к 0 позволяют делать утверждение об асимптотической сходимости к нулю всех переменных состояния модели (12). Следовательно, с учетом уравнения (8) делаем аналогичный вывод относительно ошибки $x(t) - \hat{x}(t)$, что соответствует выполнению цели (3).

Идентификация нестационарных параметров модели Номото

Для иллюстрации работоспособности предлагаемого алгоритма идентификации рассмотрим прикладной пример численного моделирования задачи наблюдения нестационарных параметров и переменных состояния линеаризованной модели Номото [15], описывающей динамику движения надводного водоизмещающего судна по курсу:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = a(t)x_2 + b(t)u, \quad y = x_1,$$

где y — измеряемый курсовой угол; x_2 — угловая скорость; u — положение руля; a — инерционный параметр; b — эффективность руля. Базовой задачей для любой системы управления движением судна является оценивание угловой скорости (rate of turn), которая решается на основе модели с известными параметрами. Оценка параметров, в свою очередь, требует знания угловой скорости. Известно, что параметры a и b не являются константами и зависят от осадки судна, линейной скорости и прочих параметров.

Обычно идентифицируют усредненные номинальные значения на средних ходах, а в процессе функционирования уточняют значения. В рамках этой статьи будем допускать полиномиальный характер изменения этих параметров и продемонстрируем работу алгоритма одновременного оценивания неизвестных параметров и угловой скорости судна.

На рис. 1–3 представлены результаты моделирования системы с параметрами $a(t) = -1 - 0,3t$, $b(t) = 1,5 - 0,5t + 0,1t^2$ при $u = 10$.

Векторы параметров $\eta(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ a(t) \end{bmatrix}$ и $\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$ имеют размерности $N = 2$, но при этом пер-

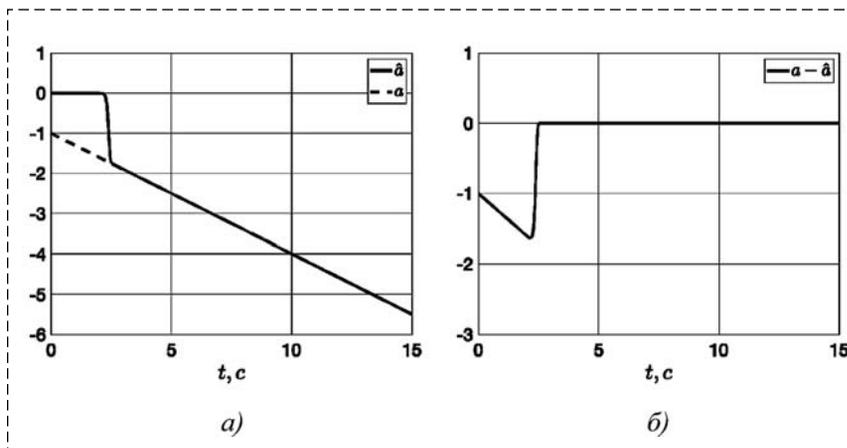


Рис. 1. Графики переходных процессов для $a(t)$ и $\hat{a}(t)$ (а) и ошибка оценивания $a(t) - \hat{a}(t)$ (б)
Fig. 1. Transients for $a(t)$ and $\hat{a}(t)$ (a) and estimation error $a(t) - \hat{a}(t)$ (b)

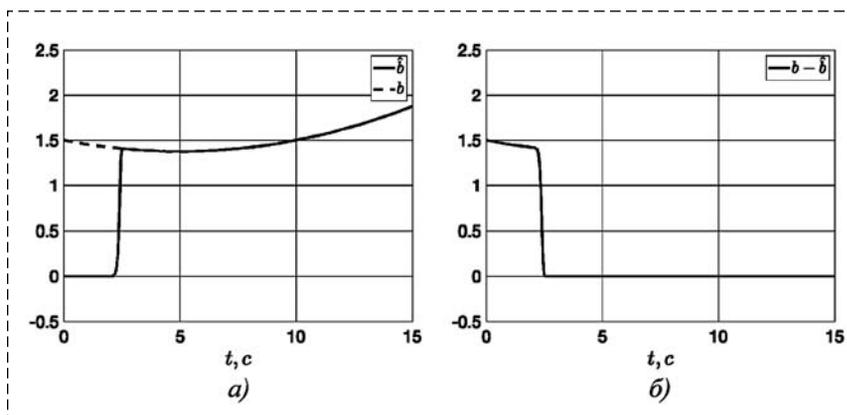


Рис. 2. Графики переходных процессов для $b(t)$ и $\hat{b}(t)$ (а) и ошибка оценивания $b(t) - \hat{b}(t)$ (б)
Fig. 2. Transients for $b(t)$ and $\hat{b}(t)$ (a) and estimation error $b(t) - \hat{b}(t)$ (b)

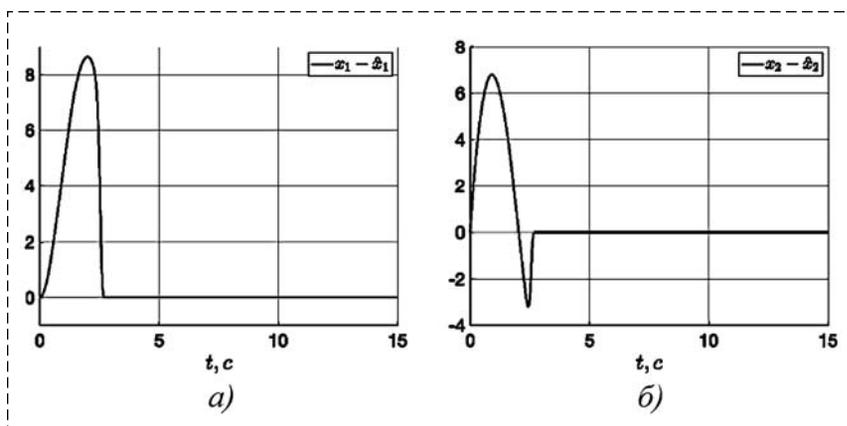


Рис. 3. Графики ошибок оценивания для $x_1(t) - \hat{x}_1(t)$ (а) и для $x_2(t) - \hat{x}_2(t)$ (б)
Fig. 3. Transients of estimation errors for $x_1(t) - \hat{x}_1(t)$ (a) and for $x_2(t) - \hat{x}_2(t)$ (b)

вые нулевые элементы этих векторов известны, и их оценивание не требуется. Размеры генераторов, описывающих динамику параметров $a(t)$ и $b(t)$, равны $l = 2$ и $n = 3$ соответственно. Вектор неизвестных параметров θ в рассматриваемом примере равен 0.

Фильтры для параметризации имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}(t) &= F\zeta(t) + Ky(t); \quad F = A - KC^T; \\ \dot{\Omega}_0(t) &= F\Omega_0(t) - Iu(t); \quad \dot{\Omega}_1(t) = F\Omega_1(t) - \Omega_0(t); \\ \dot{\Omega}_2(t) &= F\Omega_2(t) - \Omega_1(t); \quad \dot{P}_0(t) = FP_0(t) - Iy(t); \\ Q_0(t) &= FP_0(t) - Iy(t); \quad \dot{Q}_1 = FQ_1 - Q_0,\end{aligned}$$

где вектор $K = \begin{bmatrix} -2\mu_i\lambda_i \\ -\lambda_i^2 \end{bmatrix}$ зависит от настроечных параметров λ_i и μ_i . В моделировании были выбраны следующие параметры: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, $\lambda_4 = 4$, $\lambda_5 = 5$, $\mu_1 = 0,02$, $\mu_2 = 0,04$, $\mu_3 = 0,06$, $\mu_4 = 0,08$, $\mu_5 = 0,1$, $\gamma = 1000$.

Заключение

В работе представлен новый алгоритм оценивания нестационарных параметров и переменных состояния для некоторого класса линейных нестационарных систем. Решение задачи основано на преобразовании динамической модели объекта управления к линейной регрессионной модели. Регрессионная модель включает в себя переменные состояния генераторов, выходы которых описывают искомые параметры. Задача восстановления всех переменных состояния решена с привлечением метода динамического расширения и декомпозиции регрессора (или смешивания регрессора).

Список литературы

1. Pyrkina A. A., Bobtsov A. A., Kolyubin S. A., Faronov M. V., Shavetov S. V., Kapitanyuk Y. A., Kapitonov A. A. Output control approach "consecutive compensator" providing exponential and L_2 -stability for nonlinear systems with delay and disturbance // Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications. 2011. P. 1499–1504. Paper no. 6044373.
2. Ortega R., Bobtsov A., Pyrkina A., Aranovskiy S. A parameter estimation approach to state observation of nonlinear systems // Systems & Control Letters. 2015. Vol. 85. P. 84–94.

3. Pyrkina A., Bobtsov A., Ortega R., Vedyakov A., Aranovskiy S. Adaptive state observers using dynamic regressor extension and mixing // Systems & Control Letters. 2019. Vol. 133. Paper no. 104519.
4. Ortega R., Bobtsov A., Dochain D., Nikolaev N. State observers for reaction systems with improved convergence rates // Journal of Process Control. 2019. Vol. 83. P. 53–62.
5. Льюнг Л. Идентификация систем: Теория для пользователя. Наука. 1991.
6. Во К. Д., Бобцов А. А. Адаптивный наблюдатель переменных состояния линейных нестационарных систем с параметрами, заданными не точно // Автоматика и телемеханика. 2020. № 12. С. 100–110.
7. Ле В. Т., Коротина М. М., Бобцов А. А., Арановский С. В., Во К. Д. Идентификация линейно изменяющихся во времени параметров нестационарных систем // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т.20, № 5. С. 259–265.
8. Ван Ц., Ле В. Т., Пыркин А. А., Колюбин С. А., Бобцов А. А. Идентификация кусочно-линейных параметров регрессионных моделей нестационарных детерминированных систем // Автоматика и телемеханика. 2018. № 12. С. 71–82.
9. Данг Х. Б., Пыркин А. А., Бобцов А. А., Ведяков А. А. Синтез адаптивного наблюдателя для нестационарных нелинейных систем с неизвестными полиномиальными параметрами // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2021. № 3 (в печати)
10. Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkina A. Performance enhancement of parameter estimators via dynamic regressor extension and mixing // IEEE Transactions on Automatic Control. 2016. Vol. 62, N. 7. P. 3546–3550.
11. Ortega R., Aranovskiy S., Pyrkina A., Astolfi A., Bobtsov A. New Results on Parameter Estimation via Dynamic Regressor Extension and Mixing: Continuous and Discrete-Time Cases // IEEE Transactions on Automatic Control. 2021. Vol.66, N. 5. P. 2265–2272.
12. Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkina A. Improved Transients in Multiple Frequencies Estimation via Dynamic Regressor Extension and Mixing // IFAC-PapersOnLine. 2016. Vol. 49. N. 13. P. 99–104.
13. Pyrkina A., Bobtsov A., Ortega R., Vedyakov A., Aranovskiy S. Adaptive state observers using dynamic regressor extension and mixing // Systems & Control Letters. 2019. Vol. 133. Paper no. 104519.
14. Cramer G. Introduction a l'analyse des lignes courbes algebriques par Gabriel Cramer. Chez les freres Cramer & Cl. Philibert, 1750.
15. Fossen T. I. Handbook of marine craft hydrodynamics and motion control. John Wiley & Sons, 2011.

Output Adaptive Observers Design for Linear Non-Stationary Systems with Polynomial Parameters

K. B. Dang, dangkhacbinh90@gmail.com, A. A. Pyrkin, a.pyrkin@gmail.com, A. A. Bobtsov, bobtsov@mail.ru, A. A. Vedyakov, vedyakov@gmail.com, S. I. Nizovtsev, glenmetthews@gmail.com, ITMO University, St. Petersburg, 197101, Russian Federation

Corresponding author: Pyrkin Anton A., Dr. Sc., Professor, ITMO University, St. Petersburg, 197101, Russian Federation, e-mail: a.pyrkin@gmail.com

Accepted on 12 May, 2021

Abstract

The article deals with the problem of state observer design for a linear time-varying plant. To solve this problem, a number of realistic assumptions are considered, assuming that the model parameters are polynomial functions of time with unknown coefficients. The problem of observer design is solved in the class of identification approaches, which provide transformation of the original mathematical model of the plant to a static linear regression equation, in which, instead of unknown constant parameters, there are state variables of generators that model non-stationary parameters. To recover the unknown functions of the regression model, we use the recently well-established method of dynamic regressor extension and mixing (DREM), which allows to obtain monotone estimates, as well as to accelerate the convergence of estimates to the true values. Despite the fact that the article deals with the problem of state observer design, it is worth noting the possibility of using the proposed approach to solve an independent and actual estimation problem of unknown time-varying parameters.

Keywords: LTV systems, identification of polynomial parameters, dynamic regressor extension and mixing (DREM), state observer design

For citation:

Dang K. B., Pyrkin A. A., Bobtsov A. A., Vedyakov A. A., Nizovtsev S. I. Output Adaptive Observers Design for Linear Non-Stationary Systems with Polynomial Parameters, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 8, pp. 404–410.

DOI: 10.17587/mau.22.404-410

References

1. Pyrkin A. A., Bobtsov A. A., Kolyubin S. A., Faronov M. V., Shavetov S. V., Kapitanyuk Y. A., Kapitonov A. A. Output control approach "consecutive compensator" providing exponential and L_∞ -stability for nonlinear systems with delay and disturbance, *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications*, 201, pp. 1499–1504, paper no. 6044373.
2. Ortega R., Bobtsov A., Pyrkin A., Aranovskiy S. A parameter estimation approach to state observation of nonlinear systems, *Systems & Control Letters*, 2015, vol. 85, pp. 84–94.
3. Pyrkin A., Bobtsov A., Ortega R., Vedyakov A., Aranovskiy S. Adaptive state observers using dynamic regressor extension and mixing, *Systems & Control Letters*, 2019, vol. 133, paper no. 104519.
4. Ortega R., Bobtsov A., Dochain D., Nikolaev N. State observers for reaction systems with improved convergence rates, *Journal of Process Control*, 2019, vol. 83, pp. 53–62.
5. Ljung L. System identification toolbox: User's guide, Natick, MA. MathWorks Incorporated, 1995.
6. Quoc D. V., Bobtsov A. A. An Adaptive State Observer for Linear Time-Varying Systems with Inaccurate Parameters, *Automation and Remote Control*, 2020, vol. 81, no. 12, pp. 2220–2229.
7. Le V. T., Korotina M. M., Bobtsov A. A., Aranovskiy S. V., Vo Q. D. Identification of Linear Time-Varying Parameters of Nonstationary Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 5, pp. 269–265 (In Russ.).
8. Wang J., Le V. T., Pyrkin A. A., Kolyubin S. A., Bobtsov A. A. Identification of piecewise linear parameters of regression models of non-stationary deterministic systems, *Automation and Remote Control*, 2018., vol. 79, no. 12, pp. 2159–2168.
9. Dang K. B., Pyrkin A. A., Bobtsov A. A., Vedyakov A. A. Adaptive observer design for time-varying nonlinear systems with unknown polynomial parameters, *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2021, no. 3 (In press).
10. Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A. Performance enhancement of parameter estimators via dynamic regressor extension and mixing // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2016. Vol. 62. № 7. P. 3546–3550.
11. Ortega R., Aranovskiy S., Pyrkin A., Astolfi A., Bobtsov A. New Results on Parameter Estimation via Dynamic Regressor Extension and Mixing: Continuous and Discrete-Time Cases, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, vol. 66, no. 5, pp. 2265–2272.
12. Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A. Improved Transients in Multiple Frequencies Estimation via Dynamic Regressor Extension and Mixing, *IFAC-PapersOnLine*, 2016, vol. 49, no. 13, pp. 99–104.
13. Pyrkin A., Bobtsov A., Ortega R., Vedyakov A., Aranovskiy S. Adaptive state observers using dynamic regressor extension and mixing, *Systems & Control Letters*, 2019, vol. 133, paper no. 104519.
14. Cramer G. Introduction a l'analyse des lignes courbes algebriques par Gabriel Cramer, chez les freres Cramer & Cl. Philibert, 1750.
15. Fossen T. I. Handbook of marine craft hydrodynamics and motion control, John Wiley & Sons, 2011.