УДК 681.513.5 DOI: 10.17587/mau.22.395-403

В. С. Хорошавин, д-р техн. наук, проф., khoroshavin@vyatsu.ru,
В. С. Грудинин, канд. техн. наук, доц., grudinin@vyatsu.ru,
Вятский государственный университет, г. Киров

Синтез программного движения на основе особого оптимального управления

Предложен способ синтеза замкнутой системы с управлениями, обеспечивающими движение объекта с минимальными отклонениями от заданной траектории выходной координаты и от ее высших производных и переход в это множество. Для решения задачи используется принцип максимума Понтрягина, дополненный для исследования особых ситуаций без анализа вспомогательных переменных аппаратом условий общности положения для нелинейных систем в расширенном пространстве координат, учитывающим объект, нелинейный по отклонениям выходной координаты функционал и явное вхождение времени. Совместное использование указанных методов позволяет найти особые траектории координат, которые являются высшими производными от выходной координаты, а после исключения времени найти особую фазовую траекторию, являющуюся линией переключения для достижения конечного состояния, заданное программное движение по которой в замкнутой системе осуществляется особым управлением. Выход на особую фазовую траекторию из начального состояния осуществляется для линейных объектов релейным управлением, а для нелинейных объектов при определенных граничных условиях релейное управление дополняется особым управлением задачи быстродействия.

Приведены примеры управления программным движением с колебательным и апериодическим заданной длительности процессами для линейного и нелинейного объектов. С учетом характера состояний равновесия, определяемых методами качественной теории дифференциальных уравнений, и ограничений на управление и координаты получены топологии траекторий для реализации непрерывного особого управления или скользящего режима. Получены новые алгоритмы и структуры систем управления. Результаты сопровождаются моделированием, иллюстрирующим эффективность алгоритмов и структур систем управления по предложенному способу синтеза и подтверждающим аналитические материалы. Результаты работы могут быть использованы для управления линейными и нелинейными объектами в мехатронике, робототехнике, управления тепловыми процессами и в других отраслях.

Ключевые слова: *программное движение, принцип максимума, особое (сингулярное) управление, условия общности положения для нелинейных объектов, скользящий режим*

Введение

Для управления техническими процессами и установками рабочие колебательные или апериодические режимы работы оборудования [1—4] или программы температурных режимов в процессах теплопереноса и терморегулирования могут быть заданы программным путем, т. е. в функции времени [5, 6].

В работе [7] указывается на три основные группы методов задания и решения задачи синтеза программного движения:

- частотные методы формирования переходного процесса с инженерным заданием показателей качества и синтеза системы на основе амплитудных и фазовых частотных характеристик и построения структуры системы с использованием генератора программного движения и следящей системы для отработки задания;
- интегральные методы решения оптимальной задачи с подынтегральной функцией, учитывающей ресурсы системы по координатам и управлению (методы классического вариационного исчисления Эйлера—Лагранжа, принципа максимума Л. С. Понтрягина, динамического программирования Р. Беллмана, аналитического конструирования регуляторов А. А. Фельдбаума, А. М. Летова, Р. Калмана; функционала обобщенной работы А. А. Красовского, упреждающего функционала А. А. Колесникова), которые применимы в основном для линейных объектов, причем требуют многократного применения для получения конечного результата;
- аналитические методы, когда при известных в функции времени траекториях, известной структуре и звеньях объекта путем обратного решения с выхода на вход находятся координаты и управление в функции времени, а после исключения времени формируется управление в функции координат. Относящийся к этой группе метод структурного

синтеза Л. М. Бойчука [2] из-за возникающих при моделировании системы трудностей в реализации дополняется "аппаратурным синтезом". Причина трудностей обусловлена тем, что, определяя высшие производные для требуемой выходной координаты и соответствующее управление для движения в этом множестве требуемых координат, зависящие от внутренних связей или структурно-функциональных особенностей объекта, аналитический метод не определяет управление, обеспечивающее выход на это множество требуемых координат.

Методы исследования

В данной работе предлагается в задаче синтеза программного движения использовать принцип максимума [8] и условия общности положения для нелинейных объектов (УОП) [9, 10].

В качестве критерия для n-мерного объекта с выходной координатой x_n вводится интегральный функционал с подынтегральной функцией, учитывающей квадратичные отклонения на заранее незаданном интервале времени T текущей выходной координаты x_n от ее требуемого программного значения $x_{n\text{тр}}$:

$$I = \int_0^T (x_{n\text{тр}}(t) - x_n(t))^2 dt. \qquad (1)$$

Рассмотрим задачу минимизации критерия (1) для n-мерного нелинейного по координатам объекта с линейным скалярным управлением общего вида:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})U, \qquad (2)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_n$ — вектор координат объекта; U — скалярное управление, $|U| \leqslant 1$; элементы вектор-столбцов $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ непрерывны и дифференцируемы по $\mathbf{x}$. Если объект нелинеен и по управлению, то он может быть приведен к виду (2) путем линеаризации в большом [10] с введением интегратора на входе объекта.

Для нахождения оптимального управления в нестационарной задаче (1), (2) классиками принципа максимума [8] вводятся две дополнительные координаты: координата x_0, учитывающая подинтегральное выражение в функционале, и координата x_{n+1}, учитывающая явное вхождение времени, тем самым осуществляется переход к стационарной оптимальной задаче размерности $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}_{n+2}$:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}}) + \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{x}})U, \qquad (3)$$

где $\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_0, \\ \mathbf{x} \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$; $\mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} (x_{n\text{тр}}(t) - x_n(t))^2 \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \\ 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B}(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix}$.

Согласно принципу максимума оптимальным управлением в задаче (3) ввиду ее линейности по управлению является релейное управление

$$U_{\text{рел}} = \text{sign}(\boldsymbol{\psi}, B(\tilde{\mathbf{x}})), \qquad (4)$$

где $\boldsymbol{\psi}$ — вектор вспомогательных переменных, вводимых принципом максимума, из уравнения

$$\frac{d(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{x}}))}{dt} = -\left(\frac{\partial \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} + \frac{\partial \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{x}})U}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right)^{\text{T}} \boldsymbol{\psi}.$$

Задача программного движения в вариантах (1), (2) или (3) является нелинейной по координатам. Поэтому даже для линейных объектов при использовании принципа максимума возможно возникновение особых ситуаций, когда принцип максимума не определяет однозначно оптимальное управление, если на некотором интервале времени $t \in [t_1, t_2]$

$$\frac{d^k(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{x}}))}{dt^k} = 0, k = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (5)$$

Для определения существования и вычисления особого управления используем аппарат условий общности положения (УОП) для нелинейных объектов [9, 10], который по сравнению с непосредственным исследованием вспомогательных переменных [11] или аппаратом скобок Пуассона [12] позволяет определить особые траектории и особые управления в явном виде от координат и параметров процесса.

При использовании УОП для задачи (3) вычисляются векторы $\mathbf{B}_j$, $j = 2, \ldots, n + 2$, по рекуррентному соотношению

$$\mathbf{B}_1(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{x}}), \mathbf{B}_j = \frac{\partial \boldsymbol{B}_{j-1}}{\partial U} \frac{dU}{dt} - \\ -\left(\frac{\partial \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} + \frac{\partial \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{x}})U}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right) \mathbf{B}_{j-1} + \frac{\partial \mathbf{B}_{j-1}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt}. \qquad (6)$$

После образования матрицы $\mathbf{D}_{n+2}$ размером $(n + 2)(n + 2)$ из векторов $(\mathbf{B}_1 \ldots \mathbf{B}_{n+2})$ и приравнивания нулю определителя $\det \mathbf{D}_{n+2} = 0$ находятся уравнения особых траекторий и особых управлений. Для расширения алгоритмов осо-

бого управления исследуются функциональные элементы матрицы $\mathbf{D}_{n+2}$, так как они влияют на выполнение УОП. Приравнивая нулю функциональные элементы матрицы $\mathbf{D}_{n+2}$, можно определить особые траектории и особые управления, так как при этом тождественно выполняются условия особого режима (5).

При исследовании функциональных элементов матрицы $\mathbf{D}_{n+2}$ учитываются особые режимы не только задачи программного движения, но и задач быстродействия и на минимум ресурсов [9, 10], так как в матрицу $\mathbf{D}_{n+2}$ вложены матрицы

$$\mathbf{D}_n = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{D}_{n+1} = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

проверяемые в задачах быстродействия и на минимум ресурсов. Это свойство оптимальных быстродействий отмечалось и ранее [9, 10, 13]: свойства оптимального по быстродействию управления являются характерными для объекта и сохраняются при других критериях оптимальности, что и имеем в задаче программного движения.

Выявить свойства системы программного движения на основе предлагаемого подхода в задаче общего вида затруднительно, поэтому далее на примерах линейного и нелинейного объектов второго порядка показывается, что УОП позволяют последовательно найти временные уравнения особых траекторий и управлений, а после исключения времени находятся фазовая особая траектория требуемого программного движения и непрерывное особое управление, ее реализующее. Таким образом получается, что аппарат УОП, основанный на дифференцировании уравнений движения при определении векторов $\mathbf{B}_j$ (6), позволяет определить, как и аналитический метод решения задач программного движения, также основанный на определении высших производных, требуемые траектории и управления для обеспечения требуемого движения координат, а релейное управление (4), получаемое из принципа максимума с возможным дополнением особым по быстродействию управлением, обеспечивает выход на требуемые траектории.

Движение по особой или требуемой траектории может быть реализовано или непрерывным особым управлением, или в виде скользящего режима как режима переключений релейного управления $\pm U_{\max}$ в зависимости от знака отклонения от особой фазовой траектории, являющейся линией переключения. При этом должна быть проведена проверка выполнения условий ограничения на координаты и управление для обеспечения выпуклого замыкания линии переключения. Для организации движения в скользящем режиме применен аппарат теории конечных автоматов с использованием комбинационных или последовательных логических устройств, что также необходимо при синтезе замкнутой системы для исключения взаимного влияния друг на друга контуров формирования управления перехода объекта из начального состояния на особую фазовую траекторию и формирования управления движением по особой фазовой траектории.

Для определения топологии траекторий и характера состояний равновесия объекта под особым управлением используются методы качественной теории дифференциальных уравнений [14].

Результаты исследования

Предлагаемый подход к синтезу программного движения иллюстрируется на примерах управления линейным и нелинейным объектами с колебательным и апериодическим заданной длительности характерами требуемого движения.

Пример 1. Рассмотрим линейный объект — электродвигатель постоянного тока с управлением по цепи якоря, у которого выходной сигнал (угол поворота вала двигателя) должен изменяться по гармоническому закону с регулируемой амплитудой и частотой колебаний, что важно во многих практических применениях [2, 15]. Приближенная модель объекта без учета электромагнитной инерции и момента сопротивления в относительных единицах имеет вид

$$\dot{x}_1 = U - x_1,\ \dot{x}_2 = x_1, \qquad (7)$$

где U — напряжение якоря двигателя, $|U| \leqslant 1$; x_1 — угловая скорость двигателя; x_2 — угол поворота вала двигателя. Требуется определить управление в замкнутой системе, обеспечивающее движение выходной координаты по синусоидальному закону

$$x_{2\text{тр}} = A\sin(\omega t), \qquad (8)$$

где A — амплитуда колебаний; ω — угловая частота колебаний. Аналитический подход к решению данной задачи описан в работе [2], при этом автор указывает на трудности с запуском системы и нестабильность ее работы.

По предлагаемому способу исходную задачу (7), (8) представим как оптимальную задачу минимизации функционала

$$I = \int_0^T (A\sin(\omega t) - x_2)^2 dt \qquad (9)$$

для объекта (7). Следуя принципу максимума, вводим дополнительные переменные

$$\dot{x}_0 = (A\sin(\omega t) - x_2)^2,\ \dot{x}_3 = 1,$$

тем самым переходим от нестационарной задачи (7), (9) к стационарной задаче в векторно-матричной форме с $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}_4$:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}}) + \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{x}})U, \qquad (10)$$

где $\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} (A\sin(\omega x_3) - x_2)^2 \\ -x_1 \\ x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B}(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Оптимальным управлением в задаче (10), ввиду линейности гамильтониана по управлению, является релейное управление

$$H = -(A\sin(\omega x_3) - x_2)^2 + \psi_1(U - x_1) + \\ + \psi_2 x_1 + \psi_3,\ U_{\text{рел}} = \operatorname{sign}\psi_1.$$

Решить систему для вспомогательных переменных по условию (5) и проверить существование особых режимов ввиду ее нелинейности затруднительно, поэтому для исследования особых режимов в задаче воспользуемся аппаратом УОП и вычислим векторы $\mathbf{B}_j$, $j = 2, 3, 4$, по соотношению (6). Однако в этих векторах нет функциональных элементов с вхождением управления U, поэтому для нахождения особого управления можно либо вычислить $\mathbf{B}_5$, в котором U впервые появляется, либо ограничиться $\mathbf{B}_4$, но тогда особое управление отыскивается из уравнений особых траекторий и уравнений движения объекта (7). Используем первый путь и образуем матрицу $\mathbf{D}_5 = (\mathbf{B}_1\ \mathbf{B}_2\ \mathbf{B}_3\ \mathbf{B}_4\ \mathbf{B}_5)$, функциональные элементы которой последовательно приравняем нулю, тем самым рассмотрим ситуацию, когда условия существования особого режима (5) тождественно выполняются:

$$\mathbf{D}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2(A\sin(\omega x_3) - x_2) & b_{14} & b_{15} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$b_{14} = -2(A\sin(\omega x_3) - x_2) + 2x_1 - 2A\omega\cos(\omega x_3);$$

$$b_{15} = -2(A\sin(\omega x_3) - x_2) + 2(U - x_1) - \\ - 2A\omega\cos(\omega x_3) + 2A\omega^2\sin(\omega x_3).$$

В результате получим:

- из $b_{13} = 0$ — уравнение особой траектории $x_{2\text{oc}}(t) = A\sin(\omega t)$, совпадающее с заданным движением;
- из $b_{14} = 0$ — уравнение особой траектории $x_{1\text{oc}}(t) = A\omega\cos(\omega t)$, совместное решение $x_{2\text{oc}}(t)$ и $x_{1\text{oc}}(t)$ после исключения времени дает уравнение особой фазовой траектории $x_{2\text{oc}}(x_{1\text{oc}})$:

$$\frac{x_2^2}{A^2} + \frac{x_1^2}{A^2\omega^2} = 1,$$

являющейся линией переключения с релейного управления на особое $\gamma(x_{1\text{oc}}, x_{2\text{oc}}) = 0$;
- из $b_{15} = 0$ — особое управление в замкнутой системе

$$U_{\text{oc}}(x_{1\text{oc}}, x_{2\text{oc}}) = x_1 - \omega^2 x_2. \qquad (11)$$

Определим области координат, в которых $|U_{\text{oc}}| \leqslant 1$:

$$x_{2\text{oc}} \geqslant \frac{x_{1\text{oc}} - 1}{\omega^2},\ x_{2\text{oc}} \leqslant \frac{x_{1\text{oc}} + 1}{\omega^2}.$$

Характер состояний равновесия объекта (7) под особым управлением определяется из характеристических корней системы

$$\dot{x}_1 = -\omega^2 x_2,\ \dot{x}_1 = x_1$$

по методике работы [16]: $\lambda_{1,2} = \pm j\omega$, т. е. состояние равновесия (0, 0) — центр.

Топология траекторий объекта при оптимальном, включая особое, управлении при $A = 1$, $\omega = 1$ показана на рис. 1.

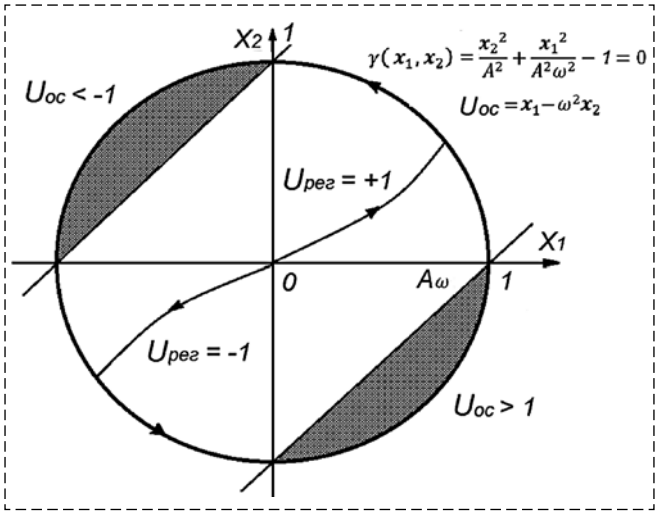

Рис. 1. Топология траекторий колебательного движения
Fig. 1. Topology of trajectories of oscillatory motion

В структуре замкнутой системы программного движения с непрерывным особым управлением (11) можно выделить контуры реализации: особой фазовой траектории (линии переключения) $\gamma(x_{1\text{oc}}, x_{2\text{oc}}) = 0$; особого управления $U_{\text{oc}}(x_{1\text{oc}}, x_{2\text{oc}})$; релейного управления $U_{\text{рел}} = \pm 1$, действующего только на интервале от начальной точки (0,0) до линии переключения и затем отключаемого для исключения влияния на работу системы с $U_{\text{oc}}(x_{1\text{oc}}, x_{2\text{oc}})$. Интервал действия $U_{\text{рел}}$ может быть задан последовательным логическим устройством либо в функции перемещения от (0, 0) до $\gamma(x_{1\text{oc}}, x_{2\text{oc}}) = 0$, либо схемным путем с использованием элементов библиотеки программы *Simulink* пакета *MATLAB* [16]. Структура и траектории движения системы с непрерывным особым управлением показаны на рис. 2.

Программное движение можно реализовать и с использованием скользящего режима движения по особой траектории $\gamma(x_{1\text{oc}}, x_{2\text{oc}})$, причем для выпуклого замыкания предельной траектории скользящего режима необходимо изменять знак управления не только относительно отклонения от линии переключения, но и от знака координаты x_1.

Результаты моделирования системы со скользящим режимом в программе *Simulink* пакета *MATLAB* приведены на рис. 3 (см. вторую сторону обложки), в структуре использован вариант логического устройства на элементах программы *Simulink*. Структура системы со скользящим режимом сложнее структуры с непрерывным особым управлением из-за реализации алгоритма переключения управления.

Пример 2. Рассмотрим управление системой отопления помещения [17—19]. На основании закона сохранения энергии в работе [18] утверждается, что тепловой режим в помещении может быть удовлетворительно описан следующим дифференциальным уравнением (в обозначениях работы [18]):

$$T\frac{d\theta(\tau)}{d\tau} + \theta(\tau) = kW_0(\tau),$$

где $\theta(\tau)$ — избыточная температура; $\theta(\tau) = t_{\text{в}}(\tau) - t_{\text{н}}(\tau)$; $t_{\text{в}}(\tau), t_{\text{н}}(\tau)$ — соответственно температуры внутреннего и наружного воздуха; T — постоянная времени; $W_0(\tau)$ — мощность системы отопления; τ — время; k — коэффициент передачи.

Для нежилых помещений часто предусматривается так называемое прерывистое управление отоплением, когда в рабочее время устанавливается нормальная температура, а в ночное — меньшая температура, причем желательно изменяемое время перехода от одной температуры к другой. Использование оптимального по быстродействию управления [17] ведет к значительному перерегулированию координат и не обеспечивает устойчивость конечного состояния, поэтому требование минимального отклонения от заданного движения становится важнее быстродействия.

Структуру объекта управления поясняет рис. 4. Регулиро-

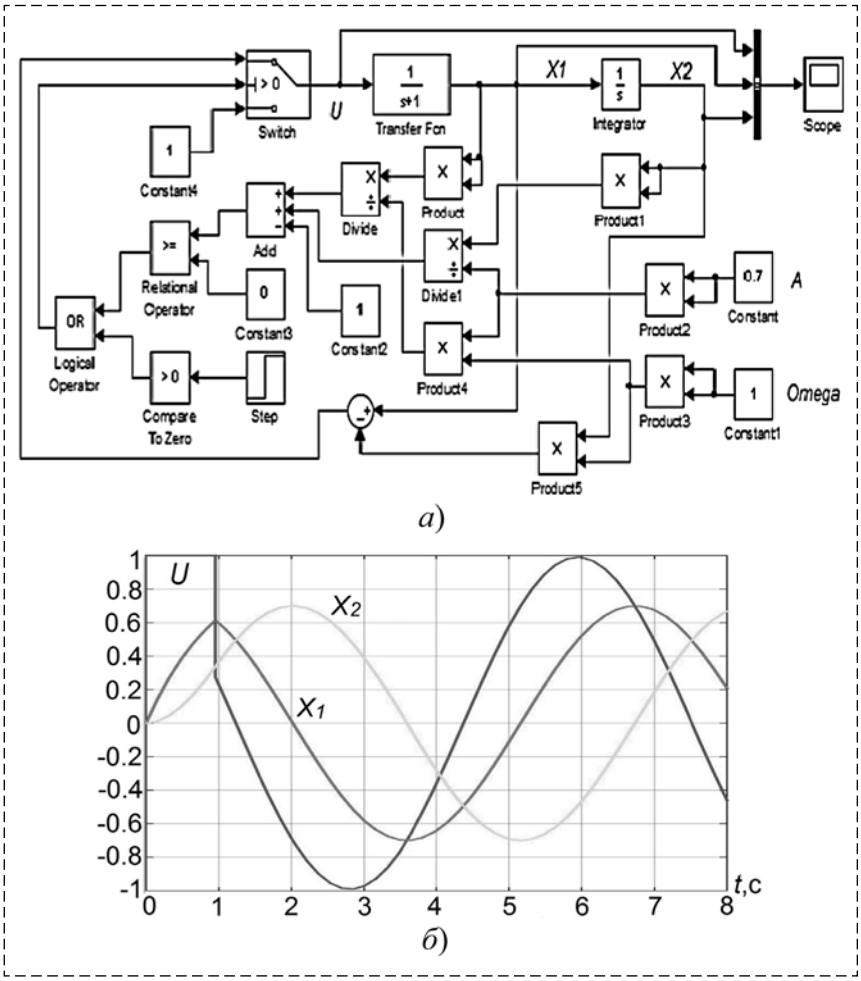

Рис. 2. Моделирование колебательного движения с непрерывным особым управлением:
а — структура; *б* — траектории
Fig. 2. Modeling of oscillatory motion with continuous special control:
а — structure, *б* — trajectories)

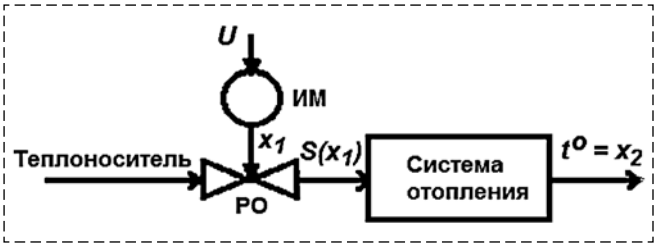

Рис. 4. Структура объекта управления
Fig. 4. Structure of the control object

вание температуры в помещении осуществляется с помощью исполнительного механизма ИМ, преобразующего электрический сигнал управления U в перемещение штока x_1 регулирующего органа (клапана) РО, передаточная функция исполнительного механизма может быть представлена в виде линейных интегрирующего или апериодического первого порядка звеньев [20].

Поступление теплоносителя в систему отопления характеризует расходная характеристика $S(x_1)$ регулирующего органа, отражающая зависимость расхода теплоносителя через клапан от изменения хода штока РО [21]. Расходная характеристика описывается степенной функцией $S(x_1) = x_1^p$, чаще всего применяется линейная при $p = 1$, а также равнопроцентная или параболическая при $p > 1$ характеристики РО.

Задачу программного движения для объекта управления — системы отопления — сформулируем так, что выходная координата x_2, равная температуре в системе отопления, при переходе из начального состояния $\mathbf{x}_{\text{нач}} = (0, 0)$ в конечное $\mathbf{x}_{\text{кон}} = (x_{1\text{кон}}, x_{2\text{кон}})$, которые принадлежат множеству стационарных состояний объекта $x_2 = S(x_1)$, должна изменяться по апериодическому закону с постоянной времени τ: $x_{2\text{тр}} = x_{2\text{кон}}(1 - \mathbf{e}^{-\frac{t}{\tau}})$. Постоянная времени τ является здесь параметром, характеризующим время перехода для линейного апериодического звена первого порядка, выходной сигнал которого при единичном ступенчатом воздействии за $(3...4)\tau$ достигает (0,95...0,98) конечного значения.

Рассмотрим предлагаемый способ организации программного движения для нелинейного с $p = 2$ объекта

$$\dot{x}_1 = U,\ \dot{x}_2 = x_1^2 - x_2$$

и критерия $I = \int_0^T (x_{2\text{кон}}(1 - \mathbf{e}^{-\frac{t}{\tau}}) - x_2)^2 dt.$

Проверка выполнения условий особого режима в задаче программного движения проводится по функциональным элементам матрицы $\mathbf{D}_4 = (\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3 \quad \mathbf{B}_4)$, вычисленным по соотношению (6):

$$\mathbf{D}_4 = (\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3 \quad \mathbf{B}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{13} & b_{14} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$b_{32} = -2\boldsymbol{x}_1;$$

$$b_{13} = -4\boldsymbol{x}_1(x_{2\text{кон}}(1 - \mathbf{e}^{-\frac{x_3}{\tau}}) - x_2);$$

$$b_{33} = -2\boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{U};$$

$$b_{14} = 2(-2\boldsymbol{x}_1 - 4\boldsymbol{U})(x_{2\text{кон}}(1 - \mathbf{e}^{-\frac{x_3}{\tau}}) - x_2) + $$
$$+ 4\boldsymbol{x}_1\left(x_1^2 - x_2 - \frac{x_{2\text{кон}}}{\tau}\mathbf{e}^{-\frac{x_3}{\tau}}\right);$$

$$b_{34} = -2\boldsymbol{x}_1 - 4\boldsymbol{U} - 2\dot{\boldsymbol{U}}.$$

Выделенные полужирным курсивом сомножители в функциональных элементах характеризуют для данного нелинейного объекта особый режим в задаче быстродействия: $x_{1\text{ос то}} = 0$, $U_{\text{ос то}} = 0$. Они не влияют на особые траектории координат и, соответственно, на особые фазовые траектории задачи программного движения

$$x_{1\text{ос}}^2(x_{2\text{ос}}) = \frac{x_{2\text{кон}} + x_{2\text{ос}}(\tau - 1)}{\tau};$$

$$x_{2\text{ос}}(x_{1\text{ос}}) = \frac{1}{\tau - 1}(\tau x_{1\text{ос}}^2 - x_{2\text{кон}}),$$

но затеняют последние. Для исключения вхождения выделенных элементов в задаче программного движения можно принять нелинейные координаты объекта линеаризованными или использовать аналитический метод.

Тем не менее, выделенные элементы, характеризующие особый режим в задаче быстродействия, необходимо учитывать при некоторых граничных условиях при переходе с большей температуры (координата x_2 на меньшую. В этом случае управляющая последовательность для выхода на особую фазовую траекторию задачи программного движения может состоять из интервалов $U_{\text{рел}}$ и $U_{\text{ос то}}$, но этот случай требует дополнительного исследования.

Особое управление в задаче программного движения можно найти путем вычисления вектора $\mathbf{B}_5$ или с использованием особой траектории $x_{1\text{ос}}(t)$; после преобразований получим

$$U_{\text{ос}}(x_{1\text{ос}}) = \frac{(x_{2\text{кон}} - x_{1\text{ос}}^2)}{2\tau x_{1\text{ос}}};$$

$$U_{\text{ос}}(x_{2\text{ос}}) = \frac{(\tau - 1)(x_{2\text{кон}} - x_{2\text{ос}})}{2\tau^{1,5}\sqrt{x_{2\text{кон}} + x_{2\text{ос}}(\tau - 1)}},$$

т. е. полученные особые фазовые траектории или линии переключения и особые управления нелинейны по координатам.

Проверка характера состояния равновесия ($x_{2\text{кон}} = x_{1\text{кон}}^2$) под особым управлением показывает, что $U_{\text{ос}}(x_{1\text{ос}})$ доставляет устойчивость, при $U_{\text{ос}}(x_{2\text{ос}})$ состояние равновесия имеет характер устойчивого узла при $\tau > 1$, а при $\tau < 1$ имеем седло. Учет ограничений по управлению $|U| \leqslant 1$ для конкретных значений $x_{2\text{кон}}$ и τ не вызывает затруднений. На рис. 5 приведена топология траекторий с релейным управлением и особыми управлениями в задачах быстродействия и программного движения.

На рис. 6 (см. третью сторону обложки) показаны результаты моделирования системы в программе *Simulink* пакета *MATLAB*. В структуре системы использовано управление $U_{\text{ос}}(x_{1\text{ос}})$, имеющее меньшие вычислительные затраты и обеспечивающее устойчивость конечного состояния, но его использование ограничено требованием измеримости координаты x_1.

Особую траекторию можно реализовать и в скользящем режиме в областях с $|U| \leqslant 1$, при этом структура замкнутой системы (рис. 7, см. третью сторону обложки) будет содержать только один контур для реализации особой фазовой траектории. Отметим, что в скользящем режиме можно получить оптимальное по быстродействию управление, когда при некотором $\tau_{\min}$ управляющая последовательность будет иметь только одно переключение {+1, –1}.

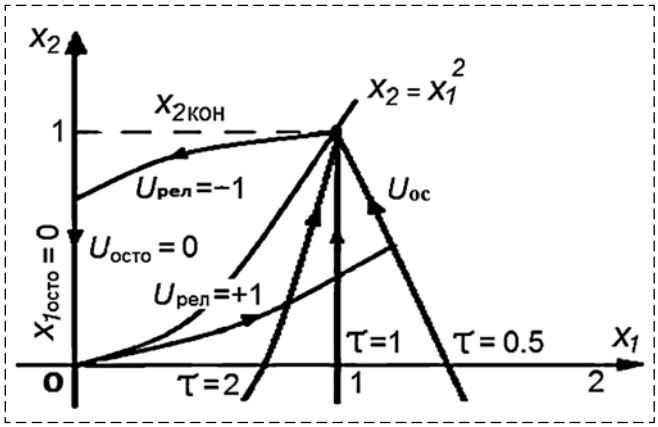

Рис.5. Топология траекторий нелинейного объекта
Fig. 5. Topology of trajectories of a nonlinear object

Заключение

В целом предлагаемый подход к синтезу программного движения на основе принципа максимума и УОП для нелинейных объектов показал свою работоспособность и конструктивность, заключающиеся в единой методике последовательного выявления требуемой топологии траекторий и управляющих воздействий в подпространствах топологии. Но при таком подходе расширяется множество возможных алгоритмов управления и структур систем, поэтому возникает проблема выбора наилучшего алгоритма и структуры. Более строгого обоснования требуют вопросы связи вычисления особых траекторий с использованием УОП и вычисления высших производных координат при аналитическом методе решения задач программного движения. Основное внимание в работе уделено проблемам точности и отчасти быстродействия, которые требуют определения связи программного движения с задачами на минимум ресурсов и энергосбережения, особенно в электротехнике и электромеханике с квадратичным управлением, а также изменения параметров, возмущений и устойчивости.

На практике предлагаемый подход к построению систем программного движения позволяет повысить эффективность и качество их проектирования и функционирования с реализацией на промышленных программируемых логических контроллерах. Результаты работы могут быть использованы при исследовании и решении общих и прикладных проблем управления, в том числе и нелинейными объектами, например, в мехатронике и робототехнике, в промышленных тепловых технологических процессах (печи, сушилки, автоклавы и т. п.) или в задачах программного управления при отоплении, особенно нежилых помещений.

Список литературы

1. **Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б.** О проблематике синтеза координирующих систем автоматического управления // Известия ЮФУ. Технические науки. 2012. № 3 (128). С. 172—180.

2. **Бойчук Л. М.** Метод структурного синтеза нелинейных систем автоматического управления. М.: Энергия, 1971. 112 с.

3. **Хорошавин В. С., Грудинин В. С.** Оптимальное программное движение с изменяемым временем регулирования //Радиопромышленность. 2020. Т. 30, № 3. С. 40—49. DOI: 10.21778/2413-9599-2020-30-3-40-49.

4. **Ruderman M., Iwasaki M., Chen W. H.** Motion-control techniques of today and tomorrow: a review and discussion of the challenges of controlled motion //IEEE Industrial Electronics Magazine. 2020. Vol. 14, N. 1. P. 41—55.

5. **Плешивцева Ю. Э., Дьяконов А. И., Попов А. В.** Модельные двумерные задачи оптимального по типовым критериям качества управления температурными режимами индукционного нагрева // Теоретические и прикладные аспекты современной науки. 2015. № 9-2. С. 94—104.

6. **Мокрушин С. А., Хорошавин В. С., Охапкин С. И., Зотов А. В., Грудинин В. С.** Анализ управляемости и устойчивости приближенной модели теплопереноса в автоклаве // Вестник Мордовского университета. 2018. Т. 28, № 3. С. 416—428. DOI: 10.15507/0236-2910.028.201803.416-428.

7. **Колесников А. А.** Последовательная оптимизация нелинейных агрегированных систем управления. М.: Энергоатомиздат, 1987. 160 с.

8. **Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.

9. **Олейников В. А.** Оптимальное управление технологическими процессами в нефтяной и газовой промышленности. Л.: Недра, 1982. 216 с.

10. **Хорошавин В. С., Зотов А. В.** Особое оптимальное управление нелинейными объектами. Киров: Науч. изд-во ВятГУ, 2019. 219 с.

11. **Wonham W. M., Johnson C. D.** Optimal bang-bang control with quadratic performance index// Journal of Basic Engineering. 1964. Vol. 86, N. 1. P. 107—115.

12. **Clements D. J., Anderson B. D.** Singular Optimal Control: The Linear-Quadratic Problem. Springer-Verlag. New York, 1978.

13. **Хорошавин В. С.** Сравнение алгоритмов управления тепловым процессом по быстродействию и на минимум ресурсов // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2020. Вып. 7. С. 211—216.

14. **Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.** Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976. 496 с.

15. **Gutierrez Soto M., Adeli H.** Recent advances in control algorithms for smart structures and machines // Expert Systems. 2017. Vol. 34, N. 2. P. e12205.

16. **Черных И. В.** Система численно-математического моделирования MatLab. Система моделирования динамических систем Simulink [Электронный ресурс]. URL: http://bourabai.kz/cm/simulink.htm (дата обращения: 25.02.2021).

17. **Табунщиков Ю. А., Бродач М. М.** Экспериментальное исследование оптимального управления расходом энергии // АВОК. 2006. № 1. С. 32—36.

18. **Панферов В. И., Анисимова Е. Ю., Нагорная А. Н.** Об оптимальном управлении тепловым режимом зданий // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Энергетика. 2007. № . 20 (92). С. 3—9.

19. **Biyik E., Kahraman A. A.** Predictive control strategy for optimal management of peak load, thermal comfort, energy storage and renewables in multi-zone buildings // Journal of building engineering. 2019. Vol. 25. P. 100826.

20. **Исполнительные** механизмы: назначение, классификация, особенности конструкции [Электронный ресурс]. URL: https://webkonspect.com/?room=profile&id=4999&labelid=39160 (дата обращения: 25.02.2021).

21. **Технические** характеристики регулирующих клапанов [Электронный ресурс]. URL: http://www.ktto.com.ua/kharakteristiki/krm (дата обращения: 25.02.2021).

Synthesis of Programmed Motion Based on Special Optimal Control

V. S. Khoroshavin, khoroshavin@vyatsu.ru, **V. S. Grudinin,** grudinin@vyatsu.ru,
Vyatka State University, Kirov, 610000, Russian Federation

Corresponding author: **Khoroshavin Valerii S.,** D. Sc. (Engineering), Professor, Vyatka State University, Kirov, 610000, Russian Federation, e-mail: khoroshavin@vyatsu.ru

Accepted on May 12, 2021

Abstract

A method is proposed for the synthesis of a closed-loop system with controls that ensure the movement of an object with minimal deviations from a given trajectory of the output coordinate and its higher derivatives and a transition to this set. To solve the problem, the Pontryagin maximum principle is used to study special situations without analysis of auxiliary variables, supplemented by the apparatus of general position conditions for nonlinear systems in an extended coordinate space, taking into account the object, a functional that is nonlinear regarding deviations of the output coordinate and the explicit occurrence of time. The combined use of these methods allows us, firstly, to find special trajectories of coordinates that are higher derivatives of the output coordinate, and after excluding time, a special phase trajectory is found, which is a switching line for reaching the final state, a given programmed motion along which in a closed system is carried out by special control. Secondly, access to a special phase trajectory from the initial state is carried out for linear objects by relay control, and for nonlinear objects, under certain boundary conditions, relay control is supplemented by a special control of the speed problem. Examples of control of programmed motion with oscillatory and aperiodic processes of a given duration for linear and nonlinear objects are given. Taking into account the nature of equilibrium states, determined by the methods of the qualitative theory of differential equations, and restrictions on control and coordinates, topologies of trajectories are obtained for the implementation of a continuous special control or sliding mode. New algorithms and structures of control systems are obtained. The results are accompanied by modeling, illustrating the effectiveness of algorithms and structures of control systems according to the proposed synthesis method and confirming analytical materials. The results of the work can be used to control linear and nonlinear objects in mechatronics, robotics, thermal processes and other industries.

Keywords: *programmed motion, maximum principle, special (singular) control, general position conditions for nonlinear objects, sliding mode*

For citation:

Khoroshavin V. S., Grudinin V. S. Synthesis of Programmed Motion Based on Special Optimal Control, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2021, vol. 22, no. 8, pp. 395—403.

DOI: 10.17587/mau.22.395-403

References

1. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** About the problem of synthesis of coordinating systems of automatic control, *Izvestiya SFedU. Technical Science,* 2012, no. 3 (128), pp. 172—180 (in Russian).

2. **Boychuk L. M.** Method of structural synthesis of nonlinear automatic control systems, Moscow, Energiya, 1971, 112 p. (in Russian).

3. **Khoroshavin V. S., Grudinin V. S.** Optimal programmed motion with variable control time, *Radio Industry*, 2020, vol. 30, no. 3, pp. 40—49, DOI: 10.21778/2413-9599-2020-30-3-40-49 (in Russian).

4. **Ruderman M., Iwasaki M., Chen W. H.** Motion-control techniques of today and tomorrow: a review and discussion of the challenges of controlled motion, *IEEE Industrial Electronics Magazine*, 2020, vol. 14, no. 1, pp. 41—55.

5. **Pleshivtseva Yu. E., Dyakonov A. I., Popov A. V.** Model two-dimensional problems of optimal control according to typical criteria of quality control of temperature modes of induction heating, *Theoretical and Applied Aspects of Modern Science,* 2015, no. 9-2, pp. 94—104 (in Russian).

6. **Mokrushin S. A., Khoroshavin V. S., Okhapkin S. I., Zotov A. V., Grudinin V. S.** Analysis of controllability and stability of an approximate model of heat transfer in an autoclave, *Bulletin of the Mordovian University,* 2018, vol. 28, no. 3, pp. 416—428, DOI: 10.15507/0236-2910.028.201803.416-428 (in Russian).

7. **Kolesnikov A. A.** Sequential optimization of nonlinear aggregated control systems, Moscow, Energoatomizdat, 1987, 160 p. (in Russian).

8. **Pontryagin L. S., Boltyanskiy V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F.** Mathematical theory of optimal processes, Moscow, Nauka, 1969, 384 p. (in Russian).

9. **Oleinikov V. A.** Optimal control of technological processes in the oil and gas industry, Leningrad, Nedra, 1982, 216 p. (in Russian).

10. **Khoroshavin V. S., Zotov A. V.** Special optimal control of nonlinear objects, Kirov, Scientific Publishing house of VyatSU, 2019, 219 p. (in Russian).

11. **Wonham W. M., Johnson C. D.** Optimal bang-bang control with quadratic performance index, *Journal of Basic Engineering*, 1964, vol. 86, no.1, pp. 107—115.

12. **Clements D. J., Anderson B. D.** Singular Optimal Control: The Linear-Quadratic Problem, Springer-Verlag, New York, 1978.

13. **Khoroshavin V. S.** Comparison of algorithms for controlling the thermal process in terms of speed and minimum resources, *Izvestiya Tula State University. Technical Science,* 2020, no. 7, pp. 211—216 (in Russian).

14. **Bautin N. N., Leontovich E. A.** Methods and methods of qualitative research of dynamical systems on a plane, Moscow, Nauka, 1976, 496 p. (in Russian).

15. **Gutierrez Soto M., Adeli H.** Recent advances in control algorithms for smart structures and machines, *Expert Systems*, 2017, vol. 34, no. 2, p. e12205.

16. **Chernykh I. V.** System of numerical and mathematical modeling MatLab. Simulink dynamic systems modeling system, Electronic Resource, URL: http://bourabai.kz/cm/simulink.htm (date of access: 25.02.2021) (in Russian).

17. **Tabunshchikov Yu. A., Brodach M. M.** Experimental study of optimal control of energy consumption, *AVOK*, 2006, no. 1, pp. 32—36 (in Russian).

18. **Panferov V. I., Anisimova E. Yu., Nagornaya A. N.** On optimal control of the thermal regime of buildings, *Bulletin of the South Ural State University. Series: Energy*, 2007, no. 20 (92), pp. 3—9 (in Russian).

19. **Biyik E., Kahraman A. A.** Predictive control strategy for optimal management of peak load, thermal comfort, energy storage and renewables in multi-zone buildings, *Journal of building engineering*, 2019, vol. 25, p. 100826.

20. **Executive** mechanisms: purpose, classification, design features, Electronic Resource, URL: https://webkonspect.com/?room=profile&id=4999&labelid=39160 (date of access: 25.02.2021) (in Russian).

21. **Technical** characteristics of control valves, Electronic Resource, URL: http://www.ktto.com.ua/kharakteristiki/krm (date of access: 25.02.2021) (in Russian).