

Б. В. Сухинин, д-р техн. наук, проф., eeo@uic.tula.ru,
В. В. Сурков, д-р техн. наук, проф., vvs150747@mail.ru,

Тулский государственный университет,

Н. Б. Филимонов, д-р техн. наук, проф., nbfilimonov@mail.ru,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва

Феномен Фуллера в задачах аналитического конструирования оптимальных регуляторов

Обсуждается проблема синтеза оптимальной управляемой системы с квадратичным критерием качества, имеющей бесконечное число точек переключения на конечном интервале времени. В теории оптимального управления данное явление получило название "феномен Фуллера". Проблема Фуллера уже более 60 лет является весьма привлекательной, актуальной и до сих пор не решенной, особенно для нелинейных многомерных динамических систем высокого порядка и, тем более, с получением решения в явном аналитическом виде для практической реализации в системе управления.

Целью настоящей работы является демонстрация теоретических аспектов и практических особенностей метода синтеза оптимальных систем управления по критерию быстродействия на примере решения задач, связанных с феноменом Фуллера.

При решении данных задач используется принятый в классическом вариационном исчислении и принципе максимума Понтрягина прием введения в рассмотрение новой дополнительной фазовой переменной, которая сопоставляется интегральному критерию качества и расширяет исходный фазовый вектор объекта. В результате, если для объекта управления известно наилучшее оптимальное по быстродействию управление, то данный прием позволяет весьма просто получить более худшее оптимальное по точности управление путем включения в динамику объекта управления критерия точности Фуллера. Следует отметить, что важным приобретением здесь является повышение точности до оптимального значения и снижение установившейся ошибки регулирования до нулевого значения, причем все коэффициенты ошибок (по положению, скорости, ускорению, рывку и т. д.) равны нулю при наличии внешних и внутренних помех.

Приводятся постановки и решения классической и модифицированной задач Фуллера. В качестве иллюстрирующих примеров рассмотрены традиционные задачи синтеза оптимального по быстродействию управления, решенные в известных работах.

Ключевые слова: феномен Фуллера, квадратичный критерий оптимальности, оптимальное быстродействие, точность, синтез управления, устойчивость

В последнее время интерес к феномену Фуллера еще более обострился, в частности, благодаря интенсивным попыткам осознать истинную природу такого явления, как регулярный синтез.

М. И. Зеликин и В. Ф. Борисов

Введение

В потоке современных публикаций по математической теории оптимального управления техническими объектами основное внимание уделяется методам исследования готовых математических постановок оптимизационных задач, включая задачи управления с квадратичными критериями качества (см., например, [1–3]). Решения для готовых постановок — это лишь надводная часть айсберга, в то время как подводная его часть — математические

формулировки задач по их практическому содержанию и использование полученных решений, — как правило, не обсуждается, что усугубляет взаимонепонимание теоретиков и практиков и приводит к обесцениванию теоретических результатов. Теоретики, как правило, увлечены математическими изысками в ущерб физической сущности решаемой задачи [4, 5]. Здесь речь идет об оформлении теоретиками своих решений с помощью многочисленных лемм, теорем и прочего подчас чрезмерного неоправданного математического формализ-

ма, в котором нередко теряется само решение поставленной задачи. Кстати, по этому поводу выдающийся математик В. И. Арнольд писал: "Попытки обойтись без вмешательства физики в математику — сектанство и изоляционизм, разрушающие образ математики как полезной человеческой деятельности... Если математики не образуются сами, то потребители, сохранившие как нужду в современной математической теории, так и свойственный каждому здравомыслящему человеку иммунитет к бесполезной аксиоматической болтовне, в конце концов откажутся от услуг схоластов-недоучек".

В настоящей работе рассматривается одна из подобных оптимизационных задач управления с квадратичным критерием, связанная с феноменом Фуллера [6].

В 1960 г. на I конгрессе ИФАК в Москве А. Т. Фуллер [7] привел пример двумерной линейной управляемой системы с квадратичным критерием качества, в котором оптимальное управление имеет бесконечное число точек переключения на конечном интервале времени. Впоследствии это явление получило название "феномен Фуллера", а соответствующий режим управления стал называться в иностранной литературе "чаттеринг" (от англ. chattering — болтанка). В качестве русского эквивалента этого термина используется термин "режим учащающихся переключений".

Явное решение задачи Фуллера было получено благодаря наличию у нее однопараметрической группы симметрий, позволяющей использовать аппарат группового анализа дифференциальных уравнений и алгебры Ли. Работа Фуллера была встречена с большим интересом, но вскоре была забыта. Интерес к ней вновь пробудился в 70...80-х годах прошлого столетия, когда начали публиковаться многочисленные примеры с оптимальными режимами учащающихся переключений, а в 90-х годах интерес к феномену Фуллера еще более обострился, и им вплотную заинтересовались математики (см., например, [8—11]).

В настоящее время проблема Фуллера по-прежнему является весьма актуальной и далеко не решенной, особенно для класса нелинейных многомерных систем высокого порядка, на что косвенно указывает продолжающийся поток публикаций и диссертаций (см., например, [12—20]).

Поскольку в ряде прикладных задач оптимального релейного управления центральной является именно проблема чаттеринга — бесконечно час-

тых переключений управляющих воздействий, — то все чаще ставится вопрос об избежании этого нежелательного режима функционирования системы путем перехода от оптимального к субоптимальному управлению с конечным числом переключений. На наш взгляд целесообразнее не "бороться" с проблемой чаттеринга, а понять физическую причину этого явления и не допускать его в системе, например, путем смены критерия оптимальности в задаче оптимального управления. Практическая ценность знания оптимальных режимов с чаттерингом состоит не столько в том, что они "описывают вполне естественные" [8], хотя и нежелательные режимы, возникающие из-за "плохого" управления и "плохого" критерия, сколько в том, что они позволяют найти способы решения задач оптимального управления без режимов "болтанки" по заранее заданному критерию точности, не зависящему в явной форме от управления: от критерия быстродействия до критерия энергозатрат (критерия расхода "сигнала управления").

Классическая постановка задачи Фуллера и ее решение

Задача Фуллера. Минимизировать интегральный критерий качества, именуемый далее критерием Фуллера:

$$x_0 = \int_0^{\infty} |x_1|^q dt \rightarrow \min, \quad q > 1, \quad (1)$$

на траекториях управляемой системы второго порядка со скалярным входом $u(t) \in [-1, 1]$ и вектором состояния $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u \quad (2)$$

с заданными начальными условиями $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$.

Допустимыми управлениями считаются локально измеримые, ограниченные по модулю функции $u(t) \in [-1, 1]$; допустимые траектории $x_1(t)$, $x_2(t)$ абсолютно непрерывны из-за инерционности объекта.

Решение. А. Т. Фуллер и вслед за ним многие авторы в качестве решения данной задачи приводят следующий закон управления:

$$u(x) = -\text{sign} \psi, \quad \psi = x_1 + k|x_2|x_2, \quad k = 0,444623. \quad (3)$$

На рис. 1 показаны результаты моделирования объекта (2) с управлением (3) при миними-

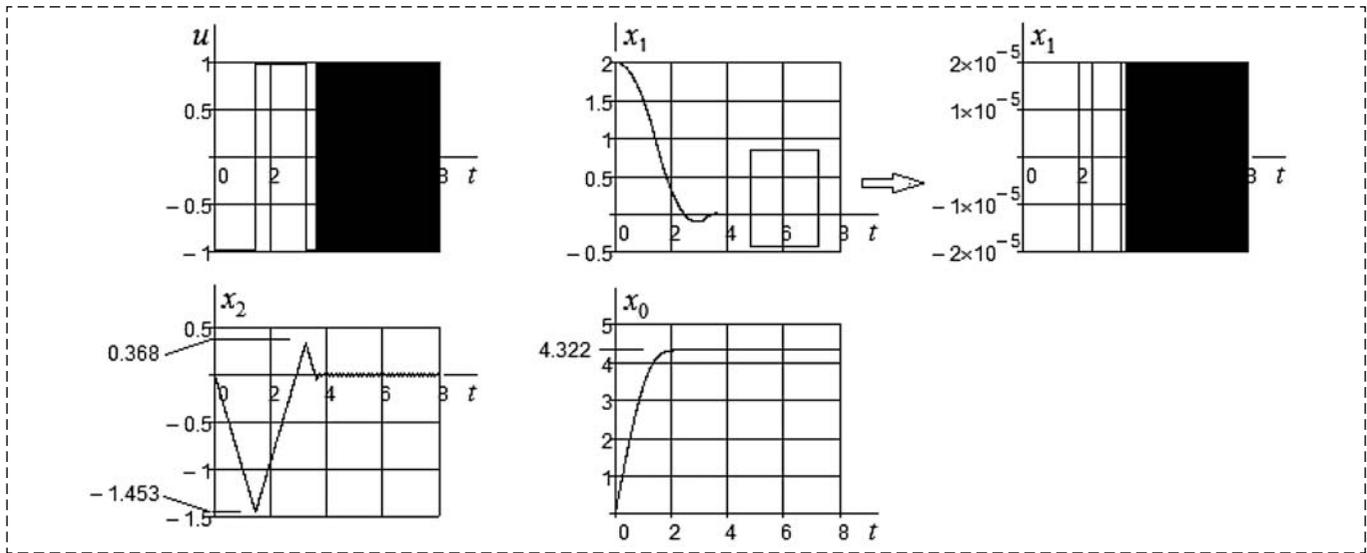


Рис. 1. Результаты моделирования известной задачи Фуллера
 Fig. 1. Simulation results of the famous Fuller problem

зации интеграла (1) при $q = 2$, $x_0(0) = 0$, $x_1(0) = 2$. Исследуя системы второго порядка, оптимизированные по критерию (1) при различных q , Фуллер показал [7], что работа такой оптимальной системы мало чем отличается от работы системы второго порядка, оптимальной по критерию быстродействия.

Приведем для подтверждения вывода Фуллера решение задачи оптимального быстродействия объектом (2) методом аналитического конструирования оптимальных регуляторов по критерию быстродействия (АКОРБ) [1, 21].

Здесь имеем объект второго порядка и, следовательно, два интервала управления, имеющие разные функции переключения: функ-

ция переключения второго интервала $\psi_2 = x_2$ и функция переключения первого интервала $\psi = \psi_2 + |\psi_2|u$. Подставляя уравнения объекта (2) и интегрируя, получим $\psi = x_1 + \frac{|x_2|x_2}{2} + C$. Из условия $\psi(x = 0) = 0$ определяем постоянную интегрирования $C = 0$. В результате оптимальное по быстродействию управление принимает вид

$$u(x) = -\text{sign}\psi = -\text{sign}\left(x_1 + \frac{|x_2|x_2}{2}\right), \quad (4)$$

совпадающий с известным из литературы.

На рис. 2 приведены результаты моделирования объекта (2) с быстродействующим управлением (4).

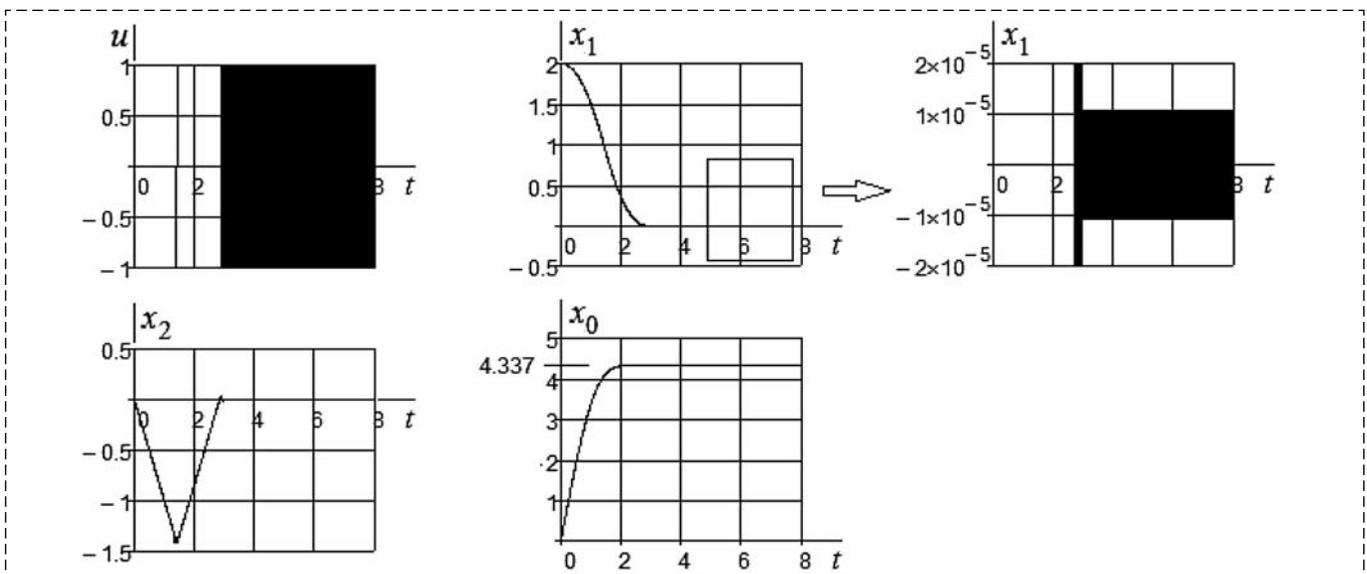


Рис. 2. Результаты моделирования объекта (2) с оптимальным по быстродействию управлением (4)
 Fig. 2. Object modeling results (2) with optimal speed control (4)

Фуллер установил, что значение ошибки, полученное с управляющим устройством, оптимальным по длительности переходного процесса, отличается от минимально возможного для любых систем не более чем на 0,5 %, что следует и из сравнения рис. 1 и рис. 2. На основе этого факта можно заключить, что оптимальная по быстродействию система может с успехом минимизировать критерий Фуллера (1), т. е. обеспечить достаточно точную (оптимальную по точности регулирования) работу системы.

Например, в работе [22] показано, что системы, построенные по критерию быстродействия, могут оказаться близкими к оптимальным и по другим критериям, например, по интегральным квадратичным критериям, но обеспечивают по сравнению с ними дополнительный выигрыш, минимизируя время переходного процесса и (наше добавление) без "болтанки". Практически для всех автоматических систем быстродействие является одним из основных требований к качеству процесса управления [23].

Постановка и идея метода решения модифицированной задачи Фуллера

Введем в рассмотрение расширенный объект управления $(n + 1)$ -го порядка, состоящий из исходного объекта n -го порядка, описываемого уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})u,$$

с фазовым вектором $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и скалярным управлением u , дополненного новой фазовой переменной x_0 , удовлетворяющей уравнению

$$\dot{x}_0 = F_0(\mathbf{x}),$$

полученному из критерия точности Фуллера (1) при $F_0(\mathbf{x}) = |x_1|^q$.

Ставится задача определения оптимального по быстродействию управления расширенным объектом.

При решении данной задачи используется принятый в классическом вариационном исчислении и принципе максимума Понтрягина прием введения в рассмотрение новой дополнительной фазовой переменной, которая сопоставляется интегральному критерию качества и расширяет исходный фазовый вектор объекта. В результате, если для объекта управления известно наилучшее оптимальное по быстро-

действию управление, то данный прием позволяет весьма просто получить более худшее оптимальное по точности управление путем включения в динамику объекта управления критерия точности Фуллера.

Простота и универсальность предлагаемого метода решения поставленной модифицированной задачи Фуллера заключается в использовании метода динамического программирования Р. Беллмана и декомпозиции многомерной задачи оптимального по быстродействию управления на ряд однотипных одномерных задач.

Решение модифицированной задачи Фуллера базируется на методе АКОРБ [1, 21] и включает следующие три этапа:

1. По уравнениям исходного объекта, в соответствии с теоремой об n интервалах управлений, записываются функциональные уравнения и определяются функции переключения каждого интервала, начиная с n -го до первого. Если функция переключения первого интервала (для не расширенного объекта) известна, то осуществляется переход к следующему этапу.

2. Записывается функциональное уравнение и определяется функция переключения нулевого интервала.

3. С использованием найденных ранее функций переключения находится искомым закон управления.

Проиллюстрируем метод решения модифицированной задачи Фуллера на примере объекта второго порядка.

Запишем уравнения динамики расширенного объекта путем включения в них уравнения, полученного из критерия Фуллера (1):

$$\dot{x}_0 = |x_1|^q, \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u. \quad (5)$$

Применим к полученному объекту третьего порядка (5) метод АКОРБ. Искомое управление состоит из трех интервалов $i = 0, 1, 2$.

Функции переключения для второго и первого интервалов $\psi_2 = x_2$, $\psi_1 = x_1 + \frac{|x_2|x_2}{2}$ определены выше. Для нулевого интервала имеем $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = \psi_1 + |\psi_1|u$ и оптимальное по быстродействию управление принимает вид

$$u = -\text{sign}\psi = -\text{sign}(\int (\text{sign}\psi_1 + u)dt + C). \quad (6)$$

Здесь использовано свойство инвариантного преобразования [20] функции переключения нулевого интервала: правая часть функционального уравнения почленно разделена на положительно

определенную величину $|\psi_1|$, не влияющую на моменты переключения сигнала управления.

Для определения ψ необходимо проинтегрировать $\dot{\psi}$, поэтому уравнения расширенного объекта при моделировании необходимо дополнить уравнением $\dot{x}_3 = \text{sign}\psi_2 + u(\mathbf{x})$, а в систему управления необходимо включить интегратор (здесь для определенности взято значение $q = 2$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2 \\ u(\mathbf{x}) \\ \text{sign}\left(x_1 + \frac{|x_2|x_2}{2}\right) + u(\mathbf{x}) \end{bmatrix};$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; u = -\text{sign}(x_3 + C); C = 0,08.$$

Результаты моделирования (см. рис. 1) расширенного объекта (5) с управлением (6) практически совпадают с результатами моделирования объекта (2) с управлением (3), а переходные процессы при управлении по критерию Фуллера носят колебательный характер.

Структурная схема системы с объектом управления для реальных координат приведена на рис. 3. Здесь x_z — задание для выходной координаты x_1 ; C — константа, подбирается по минимуму критерия.

Отметим, что полученное решение (управление (6) и структурную схему (рис. 3)) можно использовать для любого объекта, в том числе и нелинейного (с соответствующей оптимальной по быстродействию функцией переключения) и любого критерия, записанного в общем виде:

$$x_0 = \int_0^{\infty} F_0(\mathbf{x}) dt \rightarrow \min, \quad (7)$$

с конкретной функцией $F_0(\mathbf{x}) > 0$.

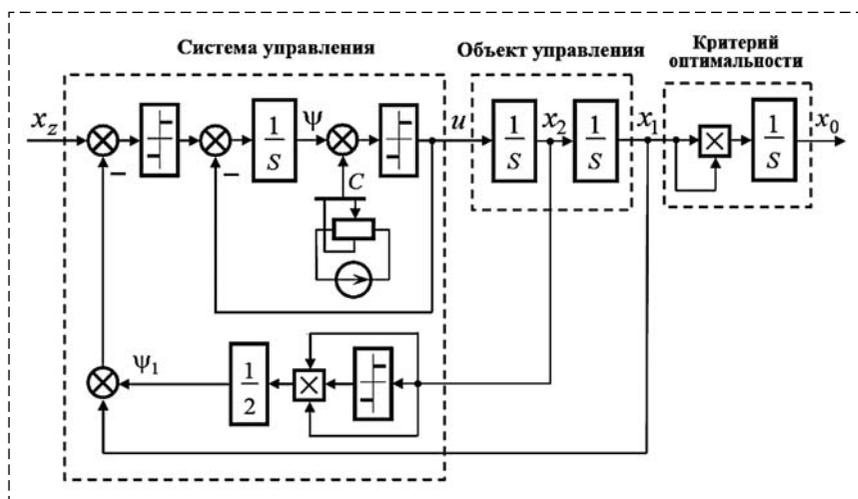


Рис. 3. Структурная схема системы (2) с управлением (6) при $q = 2$, работоспособная при любых значениях q

Fig. 3. Structural diagram of system (2) with control (6) at $q = 2$, operable at any values q

Решение задачи Фуллера для различных q

The solution of the Fuller problem for various q

q	C	K	x_0^{**}	$x_0, C = 0$	$x_0 = \min, C \neq 0$
1	0,02	0,491438219	2,828	2,825	2,822
2	0,08	0,444623782*	4,337	4,336	4,322
3	0,13	0,425013686	7,354	7,353	7,338
4	0,196	0,389735922*	13,029	13,028	13,015
5	0,21	0,369475382	23,66	23,659	23,648
6	0,25	0,364746375	43,66	43,66	43,65
7	0,27	0,354142957	81,485	81,484	81,476
8	0,29	0,325643874	153,372	153,371	153,365

* k совпадает с известным из работы [16] значением k для задачи Фуллера;

** значение критерия при оптимальном по быстродействию управлении.

Компьютерное исследование полученных результатов

По рассмотренной методике определены постоянные интегрирования, численные значения критерия Фуллера и коэффициенты закона управления (3) задачи Фуллера при различных значениях q (см. таблицу).

Из таблицы следует, что значения x_0 критерия (1) в последних трех столбцах практически одинаковы (отличаются менее чем на 0,5 %). Это подтверждает вывод Фуллера [7] и позволяет при реализации на практике оптимальной по критерию Фуллера системы управления (рис. 3) принять $C = 0$ и упростить схему управления.

Акцентируем здесь внимание на том, что решение задачи по критерию Фуллера при различных значениях q характеризуется колебательностью переходного процесса, что вытекает из условия $|f| > \varphi$ для осциллирующих объектов [21]. Действительно, определяя ψ из (3), учитывая уравнения (2), запи-

сывая условие $|f| > \varphi$ и сокращая на $|x_2|$, в итоге получим $1 > 2k$ при значениях $k < 0,5$.

Выбор следующих примеров обусловлен тем, что эти задачи решались рядом ученых, и оптимальное по быстродействию управление известно.

Пример 1. Рассмотрим задачу синтеза оптимального управления для гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + \dot{x} = u \quad (8)$$

при ограниченном управлении и квадратичном интегральном критерии качества

$$J = \int_0^{\infty} (a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2) dt, \quad (9)$$

которым оцениваются переходные искажения сигнала в линейных системах автоматического регулирования и электроакустики.

В работе [10] с применением принципа максимума Понтрягина проведено подробное исследование свойств линии переключения и указан способ ее практического нахождения (правда, решения в виде закона управления не приведено) для системы

$$\dot{x}_0 = a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2, \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_1 + u, \quad (10)$$

где a, b — неотрицательные константы, не обращающиеся в нуль одновременно.

Функция переключения оптимального по быстродействию управления консервативной системой (8) получена в работе [21, стр. 159]:

$$\psi_1 =$$

$$= \left\{ \left[x_1 + \left(2 \operatorname{int} \left(\frac{|x_1| + 2}{2} \right) - 1 \right) \operatorname{sign} x_2 \right]^2 + x_2^2 - 1 \right\} x_2, \quad (11)$$

где $\operatorname{int}(x)$ — целая часть x .

Поскольку расширенный объект (10) остается осциллирующим, то для определения функции переключения на нулевом интервале необходимо использовать условие $|f| > \varphi$: $\dot{\psi} = \psi_0 = \lambda \operatorname{sign} \psi_1 + u$, $\lambda > 1$. При этом оптимальное по критерию (9) управление имеет вид

$$u = -\operatorname{sign} \psi = -\operatorname{sign} \left(\int (\lambda \operatorname{sign} \psi_1 + u) dt + C \right). \quad (12)$$

Константа интегрирования C и величина λ определяются при моделировании по минимуму критерия (9) для конкретных начальных условий.

На рис. 4 представлены результаты моделирования объекта (10) с управлением (12) для $x_0(0) = 0, x_1(0) = 3, x_2(0) = 0, C = 0,105, \lambda = 1,048218$.

Результаты моделирования (рис. 4) подтверждают выводы работы [9]. Сравнение величины J данного примера вдоль оптимальных траекторий ($J_{\text{опт}}$) и вдоль траекторий, оптимальных по быстродействию (J_6), показывают, что для начального состояния в круге радиусом 2 имеем $\max(J_6/J_{\text{опт}}) = 1,5624$ при $a = 1$ и $b = 0$.

Однако уже в круге радиусом 3 относительный проигрыш в величине J не превышает 0,85 %. Иными словами, чем больше значение начального отклонения, тем меньше проигрыш. Переходный процесс носит колебательный характер.

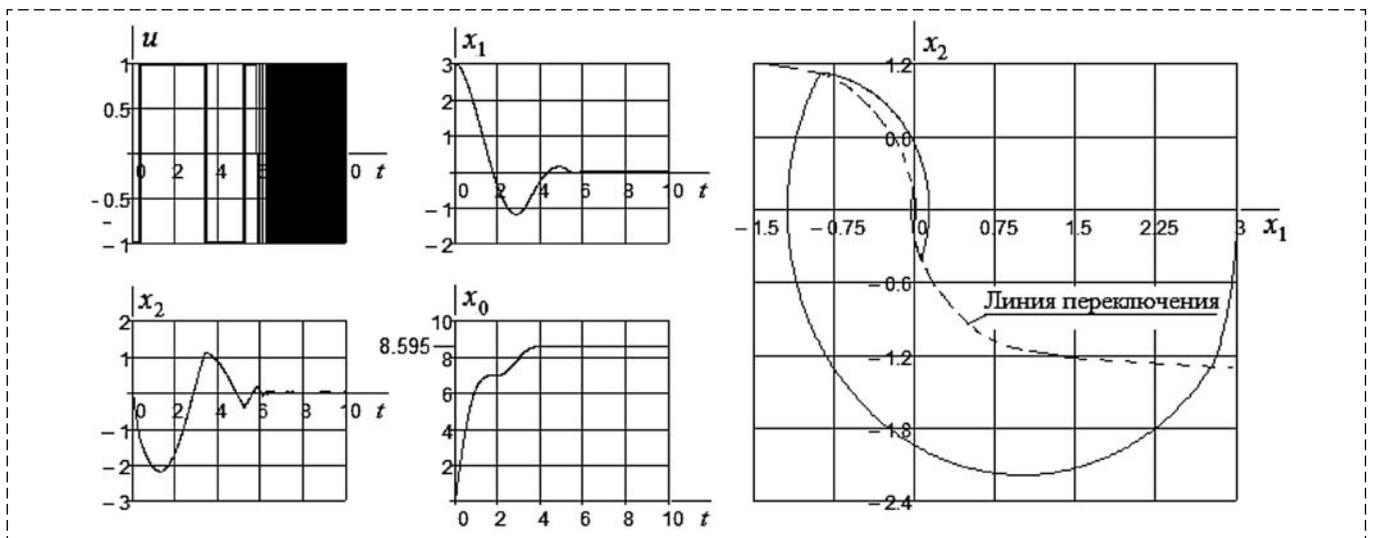


Рис. 4. Результаты моделирования объекта (10) с управлением (12) по критерию (9) при $a = 1$ и $b = 0$
 Fig. 4. The simulation results of object (10) with control (12) according to criterion (9) with $a = 1$ and $b = 0$

Пример 2. Найдем закон оптимального управления по критерию Фуллера для нелинейного объекта

$$\ddot{x}_1 + f_1(\dot{x}_1) = u(t). \quad (13)$$

Уравнениями такого вида описываются, например, системы следящего электропривода постоянного тока с нагрузкой, нелинейно зависящей от частоты вращения, или системы с внутренними нелинейными обратными связями в виде "отсечек" по скорости, введенными для ограничения этой координаты [22]. Для определенности, не влияющей на ход решения задачи, предположим, что нелинейная функция $f_1(\dot{x}_1) = \dot{x}_1^3$. Уравнения движения расширенного объекта в форме Коши при $q = 2$:

$$\dot{x}_0 = x_1^2, \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_2^3 + u(t). \quad (14)$$

Оптимальный по критерию Фуллера закон управления определяется выражением (6):

$$u = -\text{sign}\psi = -\text{sign}\left(\int (\text{sign}\psi_1 + u)dt + C\right),$$

где точное выражение оптимальной по быстродействию функции переключения второго интервала [21, стр. 155] имеет вид

$$\psi_1 = x_1 + \left[\frac{1}{6} \ln \frac{1 - |x_2| + x_2^2}{(1 + |x_2|)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x_2 \text{sign}x_2 - 1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \text{sign}x_2. \quad (15)$$

На рис. 5 представлены результаты моделирования объекта (14) с управлением (6), (15) для $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $C = 0,06$.

Сравнение значения J данного примера вдоль оптимальных траекторий ($J_{\text{опт}}$) и вдоль траекторий, оптимальных по быстродействию (J_6), показывает, что для начального состояния в круге радиусом 1 $\max(J_6/J_{\text{опт}}) = 1,0013$. Однако уже в круге радиусом 2 относительный проигрыш в значении J не превышает 0,02 %. Здесь также, чем больше значение начального отклонения, тем меньше проигрыш. Переходный процесс также носит колебательный характер.

Пример 3. Найти закон оптимального управления по критерию Фуллера для объекта управления, представляющего собой последовательное соединение трех интеграторов:

$$\dot{x}_0 = |x_1|^2, \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dot{x}_3 = u. \quad (16)$$

Воспользуемся известным из литературы (см., например, [21, стр. 171]) законом оптимального по быстродействию управления для не расширенной системы в реальных координатах с учетом задающего сигнала $x_{1z} = 2$:

$$u = -\text{sign}\psi_1; \quad (17)$$

$$\psi_1 = x_1 - x_{1z} + \frac{x_3^3}{3} + \left(x_2 x_3 + \left[\frac{x_3^2}{2} + x_2 \text{sign}\psi_2 \right]^{2/3} \right) \text{sign}\psi_2; \quad (18)$$

$$\psi_2 = x_2 + \frac{|x_3| x_3}{2}, u = -\text{sign}\psi_1; \psi_3 = x_3,$$

где ψ_1, ψ_2, ψ_3 — функции переключения первого, второго и третьего интервалов.

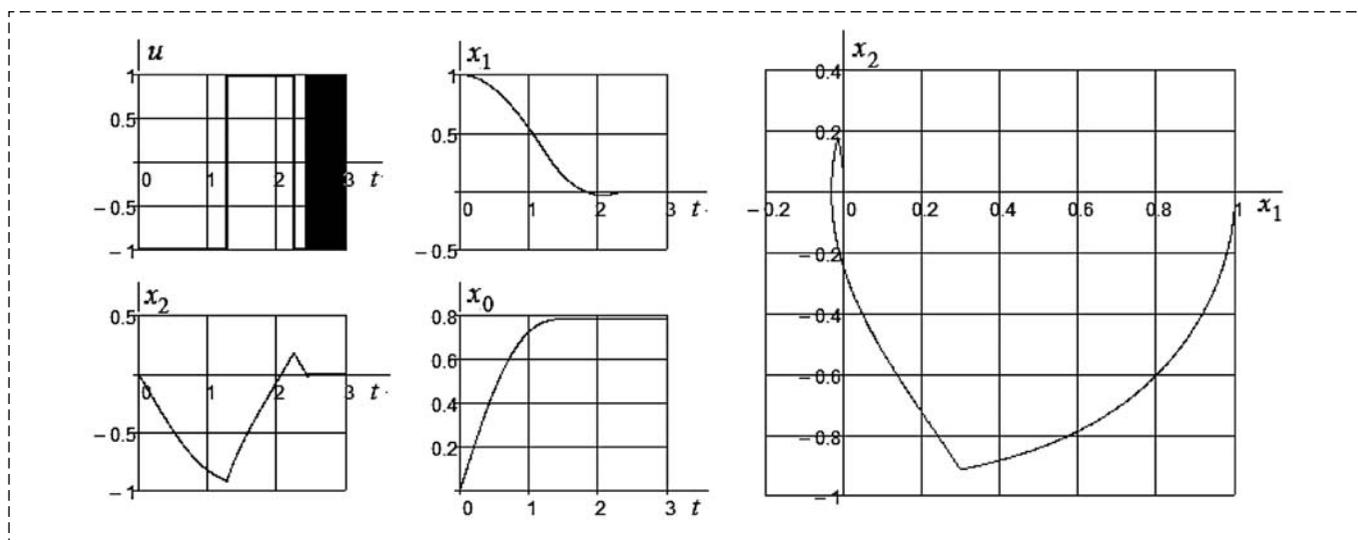


Рис. 5. Результаты моделирования объекта (14) с управлением (6), (15) по критерию Фуллера
Fig. 5. The simulation results of the object (14) with control (6), (15) according to the Fuller criterion

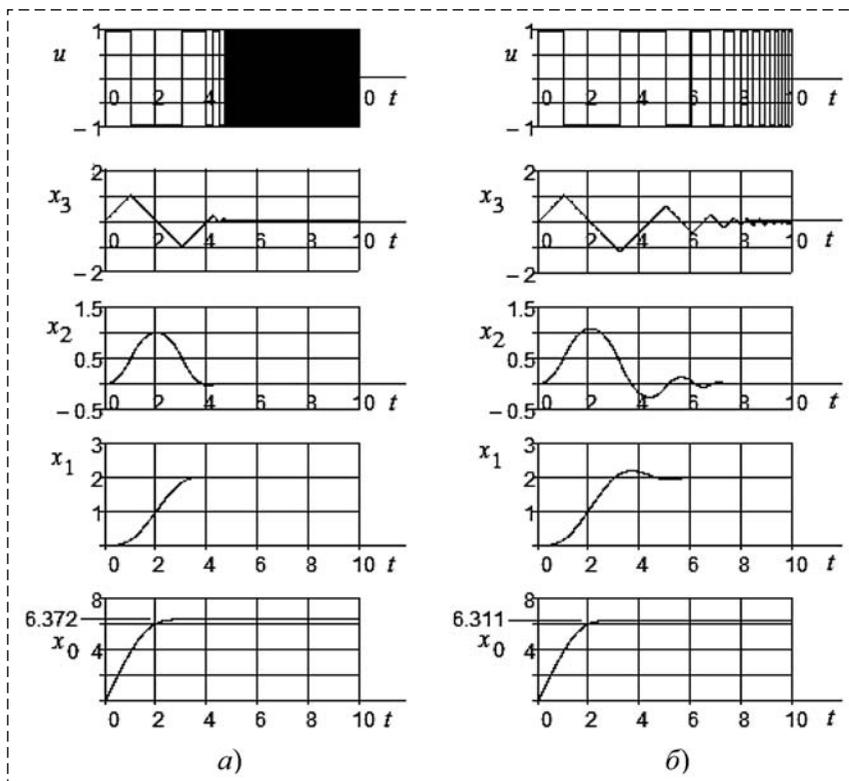


Рис. 6. Результаты моделирования объекта третьего порядка:
a — оптимальное управление по быстродействию; *б* — оптимальное управление по критерию Фуллера

Fig. 6. The results of modeling a third-order object:
a — optimal control by speed; *b* — optimal control by Fuller criterion

Тогда для нулевого интервала

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = \psi_1 + |\psi_1|u \quad (19)$$

и оптимальное по критерию Фуллера управление

$$u = -\text{sign}(\psi - C), \quad C = 0,00016. \quad (20)$$

На рис. 6 приведены результаты моделирования систем (16)—(20), откуда следует, что оптимальное по быстродействию управление для нерасширенной системы имеет более чем три интервала вследствие не точного вычисления функции переключения при моделировании. И хотя значение критерия при оптимальном по быстродействию управлении и при управлении по квадратичному критерию отличаются менее, чем на 0,1 %, колебательность системы третьего порядка по сравнению с системой второго порядка больше (продолжительнее режим чаттеринга).

Заключение

Результаты исследования метода синтеза оптимальных систем управления по критерию

быстродействия на примере решения задач, связанных с феноменом Фуллера, позволяют сделать следующие выводы:

1. Квадратичный критерий качества (критерий точности) в задачах оптимального управления приводит к колебательному переходному процессу даже для не осциллирующих (не колебательных) объектов.

2. С увеличением значения q в задаче Фуллера колебательность переходного процесса возрастает.

3. С увеличением порядка объекта колебательность переменных вектора состояния объекта управления увеличивается, причем, чем ближе переменная к сигналу управления (чем дальше от выхода), тем больше "chattering" (болтанка).

4. Так ли необходимо решать проблему Фуллера с такими неоправданными затратами времени и усилиями, если известна причина появления проблемы — квадратичный критерий качества? Может быть, надо не решать эту проблему, а выяснить физическую причину такого явления и не допускать его, задаваясь не квадратичным критерием, который а priori реализует управление с чаттерингом, а каким-либо другим, например, критерием оптимального быстродействия.

5. Предложенный метод аналитического синтеза оптимального по быстродействию регулятора позволяет найти оптимальное управление по любому наперед заданному критерию точности, а также найти критерий точности и условия, устраняющие "феномен Фуллера".

Список литературы

1. Сухинин Б. В., Сурков В. В. Аналитическое конструирование робастных оптимальных по быстродействию систем управления с бесконечно большим коэффициентом усиления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2020. Т. 21, № 8. С.453—463.
2. Filimonov A. B., Filimonov N. B. Synthesis of Automatic Systems with Standard Dynamics on the Basis of Formalism Linear-Quadratic Optimization // Proc. of the Internat. Russian Automation Conference (RusAutoCon-2019). IEEE. 2019. 8867718. P. 148—152.
3. Filimonov A. B., Filimonov N. B. Synthesis of Regulation by the Method of Linear-Square Approximate Correction // Proc. of 2019 3rd Internat. Conference on Control in Technical Systems (CTS-2019). IEEE. 2019. 8973309. P. 3—7.

4. **Красовский А. А.** Проблемы физической теории управления // Автоматика и телемеханика. 1990. № 11. С. 3—28.
5. **Филимонов Н. Б.** Методологический кризис "всепообеждающей математизации" современной теории управления // Мехатроника, автоматизация управление. 2016. Т. 17, № 5. С. 291—301.
6. **Сухинин Б. В., Сурков В. В.** Феномен Фуллера в теории и практике оптимального управления // Journal of Advanced in Technical Science. 2021. Vol. 2, Iss. 23. P. 94—99.
7. **Фуллер А. Т.** Оптимизация релейных систем регулирования по различным критериям качества // Труды I конгресса ИФАК. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 584—605.
8. **Зеликин М. И., Борисов В. Ф.** Режимы учащающихся переключений в задачах оптимального управления // Труды Математического института АН СССР. 1991. Т. 197. С. 85—166.
9. **Zelikin M. I., Borisov V. F.** Theory of Chattering Control with Applications to Astronautics, Robotics, Economics, and Engineering. Birkhäuser, Boston, MA, 1994. 244 p.
10. **Телеснин В. Р.** Об одной задаче оптимизации переходных процессов // Труды МИАН. 1984. Т. 166. С. 235—244.
11. **Дифференциальные уравнения.** Некоторые математические задачи оптимального управления. Сборник статей под ред. акад. Е. Ф. Мищенко // Труды математического института им. В. А. Стеклова. М.: Наука, 2001. С. 87—150.
12. **Павленок Н. С.** Задача оптимального управления линейной системой по квадратичному критерию качества // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация: Матер. Междунар. науч. конф., посвященной 100-летию со дня рождения акад. Е. А. Барбашина. Белорус. гос. ун-т. Минск: БГУ, 2018. С. 173—175.
13. **Майкова О. Е.** Субоптимальные режимы в задаче Фуллера // Тр. МИАН. 2002. Т. 236. С. 226—229.
14. **Chyba M., Haberkorn T.** Autonomous Underwater Vehicles: Singular Extremals and Chattering. In: Systems, Control, Modeling and Optimization (Eds. F. Cergioi et al.), Springer Verlag, 2003. P. 103—113.
15. **Наумов Г. В.** Анализ задач оптимального управления с учащающимися переключениями инвариантно-групповыми и численными методами: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МИФИ (ГУ), 2005. 93 с.
16. **Yang J.** Timing of Effort and Reward: Three-Sided Moral Hazard in a Continuous-time Model // Management Science. 2010. Vol. 56. P. 1568—1583.
17. **Schättler H., Ledzewicz U.** Synthesis of Optimal Controlled Trajectories with Chattering Arcs // Dynamics of Continuous. 2012. N. 9. P. 161—186.
18. **Борисов В. Ф.** Экстремали с бесконечным числом переключений в окрестности особых экстремалей высоких порядков: дис. ... д-р физ.-мат наук. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова. 2015. 256 с.
19. **Кочетков С. А.** Разработка методов повышения точности регулирования в релейных системах управления: дис. ... д-р тех. наук. М.: ИПУ им. В. А. Трапезникова РАН, 2015. 297 с.
20. **Киселев Ю. Н., Аввакумов С. Н.** Решение задачи Фуллера на основе принципа максимума Понтрягина // Системный анализ: моделирование и управление: Материалы Междунар. конф., посвященной памяти акад. А. В. Кряжковского, М.: Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 2018. С. 55—58.
21. **Сурков В. В., Сухинин Б. В., Ловчаков В. И., Соловьев А. Э.** Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов по критериям точности, быстродействию, энергосбережению. Тула: Изд-во ТулГУ, 2005. 300 с.
22. **Бор-Раменский А. Е., Вороневский Б. Б., Святославский В. А.** Быстродействующий электропривод. М.: Энергия, 1969. 168 с.
23. **Клюев А. С., Колесников А. А.** Оптимизация автоматических систем управления по быстродействию. М.: Энергоиздат, 1982. 240 с.

Phenomen by Fuller in the Problems of Analytical Design of Optimal Regulators

V. V. Sukhinin, eeo@uic.tula.ru, **V. V. Surkov**, vvs150747@mail.ru,
The Tula State University, Tula, 300034, Russian Federation,

N. B. Filimonov, nbfilimonov@mail.ru,
Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russian Federation,
Trapeznikov Institute of Control Problems, RAS, Moscow, 117997, Russian Federation

*Corresponding author: Surkov Vladimir V., Professor, Dr.Sci.Tech.,
Tula State University, Tula, 300034, Russian Federation, e-mail: vvs150747@mail.ru*

Accepted on December 15, 2020

Abstract

The problem of synthesis of an optimal controlled system with a quadratic quality criterion having an infinite number of switching points at a finite time interval is discussed. In the theory of optimal control, this phenomenon is called the "Fuller phenomenon". For more than 60 years, the Fuller problem has been very attractive, relevant, and still unsolved, especially for non-linear multidimensional dynamical systems of high order, and even more so, with obtaining a solution in an explicit analytical form for practical implementation in a control system.

The purpose of this work is to demonstrate the theoretical aspects and practical features of the method of synthesis of optimal control systems by the fast acting criterion by the example of solving problems related to the Fuller phenomenon.

When solving these problems, we use in the classical variations calculus and the Pontryagin maximum principle of the method of introducing a new additional phase variable into consideration, which is defined to the integral quality criterion and expands the original phase vector of the object. As a result, if the best optimal control in terms of fast acting for the control object is known then this technique makes it very easy to get a worse optimal control in terms of accuracy by including the Fuller accuracy criterion in the dynamics of the control object. It should be note that an important acquisition here is to increase the accuracy to the optimal value and reduce the established control error to zero, with all error coefficients (in position, speed, acceleration, jerk, etc.) equal to zero in the presence of external and internal interference.

Statements and solutions of the classical and modified Fuller problems are presented. As illustrative examples, we consider the traditional problems of the synthesis of optimal control in terms of speed, solved in well-known methods.

Keywords: Fuller phenomenon, square optimality criterion, criterion of fast acting, accuracy, control synthesis, stability

For citation:

Sukhinin B. V., Surkov V. V., Filimonov N. B. Phenomen by Fuller in the Problems of Analytical Design of Optimal Regulators, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 7, pp. 339–348.

DOI: 10.17587/mau.22.339-348

References

1. **Sukhinin B. V., Surkov V. V.** Analytical construction of robust time-optimal control systems with infinitely large gain, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 8, pp. 453–463 (in Russian).
2. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** Synthesis of Automatic Systems with Standard Dynamics on the Basis of Formalism Linear-Quadratic Optimization, *Proc. of the Internat. Russian Automation Conference (RusAutoCon-2019)*, IEEE, 2019, 8867718, pp. 148–152.
3. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** Synthesis of Regulation by the Method of Linear-Square Approximate Correction, *Proc. of 2019 3rd Internat. Conference on Control in Technical Systems (CTS-2019)*, IEEE, 2019, 8973309, pp. 3–7.
4. **Krasovsky A. A.** Problems of physical control theory, *Automation and Remote Control*, 1990, vol. 51, no. 11, pp. 1459–1479.
5. **Filimonov N. B.** Methodological Crisis of the "All Winning Mathematization" of the Modern Control Theory, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 5, pp. 291–301.
6. **Sukhinin B. V., Surkov V. V.** Fuller's phenomenon in theory and practice of optimal control, *Journal of Advanced in Technical Science*, 2021, iss. 23, vol. 2, pp. 94–99.
7. **Fuller A. T.** Optimization of relay control systems according to various quality criteria, *1st Internat. IFAC Congress on Automatic and Remote Control*, vol. 2, Moscow, USSR, pp. 584–605 (in Russian).
8. **Zelikin M. I., Borisov V. F.** Modes of Increasing Switching in Optimal Control Problems, *Proc. of the Mathematical Institute of the Academy of Sciences of the USSR*, 1991, vol. 197, pp. 85–166 (in Russian).
9. **Zelikin M. I., Borisov V. F.** Theory of Chattering Control with applications to Astronautics, Robotics, Economics, and Engineering, Birkhäuser, Boston, MA, 1994, 244 p.
10. **Telesnin V. R.** On a Problem of Optimization of Transient Processes, *Proc. of Steklov Institute of Mathematics*, 1984, vol. 166, pp. 235–244 (in Russian).
11. **Differential Equations.** Some mathematical problems of optimal control, Collection of articles, ed. Academician E. F. Mishchenko, Proc. of Steklov Institute of Mathematics, 2001, pp. 87–150 (in Russian).
12. **Pavlenok N. S.** The problem of optimal control of a linear system by a quadratic performance criterion, *Dynamical systems: stability, control, optimization. Materials of the Intern. scientific conf., dedicated to the 100th anniversary of the birth of acad. E. A. Barbashin*, Minsk, BSU, 2018, pp. 173–175 (in Russian).
13. **Majkova O. E.** Suboptimal Regimes in Fuller's Problem, *Proc. of Steklov Institute of Mathematics*, 2002, vol. 236, pp. 226–229 (in Russian).
14. **Chyba M., Haberkorn T.** Autonomous underwater vehicles: singular extremals and chattering, *Systems, Control, Modeling and Optimization* (Eds. F. Cergioi et al.), 2003, Springer Verlag, pp. 103–113.
15. **Naumov G. V.** Analysis of optimal control problems with increasing switching by invariant-group and numerical methods, Dissertation for the degree of candidate of physical and mathematical sciences, Moscow, Moscow. Physics and Technology Institute (State University), 2005, 93 p.
16. **Yang J.** Timing of effort and reward: three-sided moral hazard in a continuous-time model, *Management Science*, 2010, vol. 56, pp. 1568–1583.
17. **Schättler H., Ledzewicz U.** Synthesis of optimal controlled trajectories with chattering arcs, *Dynamics of Continuous*, 2012, vol. 19, pp. 161–186.
18. **Borisov V. F.** Extremals with an infinite number of switchings in the vicinity of singular high-order extremals, Dissertation for the degree of Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Lomonosov State University, 2015, 256 p. (in Russian).
19. **Kochetkov S. A.** Development of methods for increasing the accuracy of regulation in relay control systems, Dissertation for the degree of Doctor of Technical Sciences, Moscow, V. A. Trapeznikov Institute of Control Science of RAN, 2015, 297 p. (in Russian).
20. **Kiselev Yu. N., Avvakumov S. N.** Solution of Fuller's problem based on the Pontryagin maximum principle, *System analysis: modeling and control: Materials of the Internat. conf. dedicated to the memory of acad. A. V. Kryazhinsky*, Moscow, Steklov Institute of Mathematics, RAN, 2018, pp. 55–58 (in Russian).
21. **Surkov V. V., Sukhinin B. V., Lovchakov V. I., Soloviev A. E.** Analytical construction of optimal regulators by the criteria of accuracy, speed, energy saving, Tula, Publishing house of TuSU, 2005, 300 p. (in Russian).
22. **Bor-Ramensky A. E., Voronetsky B. B., Svyatoslavsky V. A.** Fast-acting electric drive, Moscow, Energiya, 1969, 168 p. (in Russian).
23. **Klyuev A. S., Kolesnikov A. A.** Optimization of automatic control systems for speed, Moscow, Energoizdat, 1982, 240 p. (in Russian).