УДК 62-50 DOI: 10.17587/mau.22.331-336

Н. Е. Зубов, д-р техн. наук, проф., nezubov@bmstu.ru,
В. Н. Рябченко, д-р техн. наук, проф, ryabchenko.vn@yandex.ru,
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
ПАО РКК "Энергия" им. С. П. Королева, г. Королев МО

Инвариантность управления боковым движением вертолета по углу крена. Аналитический синтез

Для линеаризованной модели четвертого порядка изолированного бокового движения одновинтового вертолета как MIMO-системы, содержащей два входа, аналитически синтезировано управление, которое обеспечивает инвариантность движения по углу крена при наличии возмущений в каналах управления, а также требуемое размещение полюсов замкнутой системы, заданных любыми конкретными значениями из области их устойчивости. Подход к синтезу инвариантного управления заключается в поиске матрицы коэффициентов обратной связи линейной системы, которая удовлетворяет условиям инвариантности, представляющим собой систему степенных матричных уравнений определенной конструкции. В основе синтеза лежит применение теорем, основанных на использовании условия регуляризации матричного уравнения и условий инвариантности при возмущениях в каналах управления, а также теорем, позволяющих с использованием оригинальной декомпозиции объекта управления размещать полюса MIMO-системы. Под регуляризацией матричного уравнения понимается решение задачи обеспечения заданного множества сингулярных значений у обращаемой симметричной квадратной матрицы. Инвариантность MIMO-системы рассматривается по отношению к неизмеряемым возмущениям в каналах управления. Использование такого подхода к синтезу инвариантного управления позволило получить аналитическое решение, которое обладает универсальностью и может быть применено на различных режимах полета одновинтовых вертолетов, имеющих различные динамические свойства. Показаны результаты численного синтеза бокового движения одновинтового вертолета с использованием полученных законов инвариантного управления, подтверждающие достоверность аналитических выражений.

Ключевые слова: *инвариантность, возмущения в каналах управления, MIMO-система, декомпозиция, размещение полюсов, аналитический синтез, боковое движение одновинтового вертолета, полюса динамической системы*

Введение

Современное развитие методов инвариантного управления [1—3], управления линейными системами на основе точного размещения полюсов (pole placement, eigenvalue assignment, modal control) [4—9] позволяет осуществлять эффективный синтез законов стабилизации, в том числе аналитически, динамических систем с многими входами и многими выходами (MIMO-систем) не только по каждому из подходов в отдельности, но и комплексно, когда обеспечивается как инвариантность по отношению к какому-либо возмущению, так и заданное размещение полюсов. В данной статье применение такого подхода в варианте аналитического синтеза рассматривается по отношению к боковому движению одновинтового вертолета (ОВ).

Постановка задачи

ОВ как объект управления будем рассматривать в форме Коши в виде взаимосвязанного бокового движения (крен—рысканье). В форме "вход—состояние" ОВ имеет вид [1, 2]

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

где матрицы кусочно-постоянных коэффициентов равны

$$A = \begin{pmatrix} a_{V_z}^{V_z} & a_{V_z}^{\omega_x} & a_{V_z}^{\omega_y} & a_{V_z}^{\gamma} \\ a_{\omega_x}^{V_z} & a_{\omega_x}^{\omega_x} & a_{\omega_x}^{\omega_y} & 0 \\ a_{\omega_y}^{V_z} & a_{\omega_y}^{\omega_x} & a_{\omega_y}^{\omega_y} & 0 \\ 0 & 1 & a_{\gamma}^{\omega_y} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{V_z}^{u_z} & b_{V_z}^{u_{\text{рв}}} \\ b_{\omega_x}^{u_z} & b_{\omega_x}^{u_{\text{рв}}} \\ b_{\omega_y}^{u_z} & b_{\omega_y}^{u_{\text{рв}}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а векторы состояния и управления, соответственно, равны

$$x = \begin{pmatrix} \Delta V_z \\ \Delta\omega_x \\ \Delta\omega_y \\ \Delta\gamma \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} \Delta u_z \\ \Delta u_{\text{рв}} \end{pmatrix},$$

где ΔV — отклонение боковой скорости; $\Delta\omega_x$ — отклонение угловой скорости крена; $\Delta\omega_y$ — отклонение угловой скорости рыскания; $\Delta\gamma$ — отклонение угла крена; Δu_z — угол отклонения конуса несущего винта в поперечном направлении и $\Delta u_{\text{рв}}$ — шаг рулевого винта.

Параметры модели

$$a_{V_z}^{V_z},\ a_{V_z}^{\omega_x},\ a_{V_z}^{\omega_y},\ a_{V_z}^{\gamma},\ a_{\omega_x}^{V_z},\ a_{\omega_x}^{\omega_x},\ a_{\omega_x}^{\omega_y},\ a_{\omega_y}^{V_z},$$

$$a_{\omega_y}^{\omega_x},\ a_{\omega_y}^{\omega_y},\ a_{\gamma}^{\omega_y},\ b_{V_z}^{u_z},\ b_{V_z}^{u_{\text{рв}}},\ b_{\omega_x}^{u_z},\ b_{\omega_x}^{u_{\text{рв}}},\ b_{\omega_y}^{u_z},\ b_{\omega_y}^{u_{\text{рв}}}$$

являются коэффициентами линеаризации [1, 2, 9—12].

Для унификации записи уравнений в дальнейших исследованиях введем следующие обозначения:

$$a_{11} = a_{V_z}^{V_z},\ a_{12} = a_{V_z}^{\omega_x},\ a_{13} = a_{V_z}^{\omega_y},\ a_{14} = a_{V_z}^{\gamma},$$
$$a_{21} = a_{\omega_x}^{V_z},\ a_{22} = a_{\omega_x}^{\omega_x},\ a_{23} = a_{\omega_x}^{\omega_y},$$
$$a_{31} = a_{\omega_y}^{V_z},\ a_{32} = a_{\omega_y}^{\omega_x},\ a_{33} = a_{\omega_y}^{\omega_y},\ a_{43} = a_{\gamma}^{\omega_y},$$
$$b_{11} = b_{V_z}^{u_z},\ b_{12} = b_{V_z}^{u_{\text{рв}}},\ b_{21} = b_{\omega_x}^{u_z},\ b_{22} = b_{\omega_x}^{u_{\text{рв}}},$$
$$b_{31} = b_{\omega_y}^{u_z},\ b_{32} = b_{\omega_y}^{u_{\text{рв}}},$$

тогда ОВ как объект управления в развернутом виде запишется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \Delta\dot{V}_z \\ \Delta\dot{\omega}_x \\ \Delta\dot{\omega}_y \\ \Delta\dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 1 & a_{43} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta V_z \\ \Delta\omega_x \\ \Delta\omega_y \\ \Delta\gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u_z \\ \Delta u_{\text{рв}} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Полагая, что все компоненты вектора состояния полностью наблюдаемые, синтезируем управление, инвариантное по крену к возмущениям в каналах управления с заданным размещением полюсов, которые в аналитическом виде запишем обобщенно в виде

$$\operatorname{eig}(A_c) = \{s_1\ s_2\ s_3\ s_4\} \quad (3)$$

(здесь и далее заданные полюса могут принимать любые значения, определяемые теми или иными тактико-техническими требованиями).

Матрица $\boldsymbol{C}$, определяющая контролируемую координату для нашей задачи, имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

а условие инвариантности выхода у динамической MIMO-системы (2), заданной в пространстве состояний относительно входного возмущения w,

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = Ax(t) + B\big(u(t) + w(t)\big), \\ &u(t) = Fx(t), \\ &y(t) = Cx(t), \end{aligned} \quad (5)$$

где y — вектор выхода; F — матрица коэффициентов обратной связи, в соответствии с работой [3] имеет вид системы степенных матричных уравнений

$$\begin{cases} CB = 0; \\ C(A + BF)B = 0; \\ C(A + BF)^2 B = 0; \\ C(A + BF)^3 B = 0; \\ C(A + BF)^4 B = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Для обеспечения условий (6) требуется найти такую матрицу F, что выполняются все равенства из системы уравнений (6), функционально зависящие от этой матрицы.

Аналитический синтез инвариантного управления

В работе предлагается решение сформулированной задачи на основе подхода, изложенного в работе [3]. В общем случае вместо системы (4) рассмотрим MIMO-систему вида

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = Ax(t) + BFx(t) + LB^{\text{т}}x(t) + Bw(t), \\ &y(t) = Cx(t), \end{aligned} \quad (7)$$

где L — матрица наблюдателя состояния, или, в соответствии с работой [3], матрица инъекции Морса.

Тогда справедлива следующая теорема [3].

Теорема. Для системы (5), где имеют место равенства $CB = 0$

$$L = B^{+\text{т}}\Sigma_0 - AB^{+\text{т}}; \quad (8)$$

$$A = \Sigma_0 B^{+} - B^{+}(A + (B^{+\text{т}}\Sigma_0 - AB^{+\text{т}})B^{\text{т}}) \quad (9)$$

выполняются условия инвариантности

$$\begin{cases} C(A + LB^{\text{т}} + BF)B = 0; \\ C(A + LB^{\text{т}} + BF)^2 B = 0; \\ C(A + LB^{\text{т}} + BF)^3 B = 0; \\ C(A + LB^{\text{т}} + BF)^4 B = 0. \end{cases} \quad (10)$$

При этом выполняется включение для множеств собственных значений (полюсов)

$$\operatorname{eig}(A + LB^{\text{т}} + BF) \supset \operatorname{eig}(\Sigma_0). \quad (11)$$

Здесь Σ_0 — матрица, определяющая собственные значения (полюса) замкнутой системы [3].

Условие (9) можно назвать спектральным условием, поскольку оно определяет спектральные свойства замкнутой системы. На фигурирующую в соотношениях (7), (8) матрицу Σ_0 могут накладываться различные условия в зависимости от дополнительных требований. Например, это может быть требование устойчивости, устойчивости с заданным запасом и др.

С учетом (1), (4) проверим выполнение первого условия (6): $CB = 0$.

Отметим, что для (6) также справедливы неравенства

$$CAB \neq 0,\ CA^2B \neq 0,\ CA^3B \neq 0,\ CA^4B \neq 0.$$

Вычислим далее псевдообратную матрицу

$$B^{+} = \begin{pmatrix} b_p^{11} & b_p^{12} & b_p^{13} & 0 \\ b_p^{21} & b_p^{22} & b_p^{23} & 0 \end{pmatrix},$$

где при условии неравенства нулю

$$\Delta_b = (b_{11}^2 b_{22}^2 + b_{11}^2 b_{32}^2 - 2b_{11}b_{12}b_{21}b_{22} - \\ - 2b_{11}b_{12}b_{31}b_{32} + b_{12}^2 b_{21}^2 + b_{12}^2 b_{31}^2 + b_{21}^2 b_{32}^2 - \\ - 2b_{21}b_{22}b_{31}b_{32} + b_{22}b_{31}^2),$$

компоненты псевдообратной матрицы определяются выражениями

$$b_p^{11} = (b_{11}b_{22}^2 - b_{12}b_{21}b_{22} + b_{11}b_{32}^2 - b_{12}b_{31}b_{32})/\Delta_b;$$
$$b_p^{12} = (b_{21}b_{12}^2 - b_{11}b_{22}b_{12} + b_{21}b_{32}^2 - b_{22}b_{31}b_{32})\Delta_b;$$
$$b_p^{13} = (b_{31}b_{12}^2 - b_{11}b_{32}b_{12} + b_{31}b_{22}^2 - b_{21}b_{32}b_{22})/\Delta_b;$$
$$b_p^{21} = (b_{12}b_{21}^2 - b_{11}b_{22}b_{21} + b_{12}b_{31}^2 - b_{11}b_{32}b_{31})/\Delta_b;$$
$$b_p^{22} = (b_{22}b_{11}^2 - b_{12}b_{21}b_{11} + b_{22}b_{31}^2 - b_{21}b_{32}b_{31})/\Delta_b;$$
$$b_p^{23} = (b_{32}b_{11}^2 - b_{12}b_{31}b_{11} + b_{32}b_{21}^2 - b_{22}b_{31}b_{21})\Delta_b.$$

С учетом множества (3) назначим матрицу заданного размещения полюсов Σ_0 в следующем простом (диагональном) виде:

$$\Sigma_0 = \mathrm{diag}(s_1, s_2).$$

В соответствии с выражением (9) вычислим матрицу обратной связи

$$F = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

Здесь

$$k_{11} = b_{11}^p s_1 + b_{11}^p(b_{11}(a_{11}b_{11}^p + a_{12}b_{12}^p + a_{13}b_{13}^p - b_{11}^p s_1) - \\ - a_{11} + b_{12}(a_{11}b_{21}^p + a_{12}b_{22}^p + a_{13}b_{23} - b_{21}^p s_2)) + \\ + b_{12}^p(b_{11}(a_{21}b_{11}^p + a_{22}b_{12}^p + a_{23}b_{13}^p - b_{12}^p s_1) - a_{21} + \\ + b_{12}(a_{21}b_{21}^p + a_{22}b_{22}^p + a_{23}b_{23}^p - b_{22}^p s_2)) + \\ + b_{13}^p(b_{11}(a_{31}b_{11}^p + a_{32}b_{12}^p + a_{33}b_{13}^p - b_{13}^p s_1) - a_{31} + \\ + b_{12}(a_{31}b_{21}^p + a_{32}b_{22}^p + a_{33}b_{23}^p - b_{23}^p s_2));$$

$$k_{12} = b_{12}^p s_1 + b_{11}^p(b_{21}(a_{11}b_{11}^p + a_{12}b_{12}^p + a_{13}b_{13}^p - b_{11}^p s_1) - \\ - a_{12} + b_{22}(a_{11}b_{21}^p + a_{12}b_{22}^p + a_{13}b_{23}^p - b_{21}^p s_2)) + \\ + b_{12}^p(b_{21}(a_{21}b_{11}^p + a_{22}b_{12}^p + a_{23}b_{13}^p - b_{12}^p s_1) - a_{22} + \\ + b_{22}(a_{21}b_{21}^p + a_{22}b_{22}^p + a_{23}b_{23}^p - b_{22}^p s_2)) + \\ + b_{13}^p(b_{21}(a_{31}b_{11}^p + a_{32}b_{12}^p + a_{33}b_{13}^p - b_{13}^p s_1) - \\ - a_{32} + b_{22}(a_{31}b_{21}^p + a_{32}b_{22}^p + a_{33}b_{23}^p - b_{23}^p s_2));$$

$$k_{13} = b_{13}^p s_1 + b_{11}^p(b_{31}(a_{11}b_{11}^p + a_{12}b_{12}^p + a_{13}b_{13}^p - b_{11}^p s_1) - \\ - a_{13} + b_{32}(a_{11}b_{21}^p + a_{12}b_{22}^p + a_{13}b_{23}^p - b_{21}^p s_2)) + \\ + b_{12}^p(b_{31}(a_{21}b_{11}^p + a_{22}b_{12}^p + a_{23}b_{13}^p - b_{12}^p s_1) - a_{23} + \\ + b_{32}(a_{21}b_{21}^p + a_{22}b_{22}^p + a_{23}b_{23}^p - b_{22}^p s_2)) + \\ + b_{13}^p(b_{31}(a_{31}b_{11}^p + a_{32}b_{12}^p + a_{33}b_{13}^p - b_{13}^p s_1) - \\ - a_{33} + b_{32}(a_{31}b_{21}^p + a_{32}b_{22}^p + a_{33}b_{23}^p - b_{23}^p s_2));$$

$$k_{14} = -a_{14}b_{11}^p;$$

$$k_{21} = b_{21}^p s_2 + b_{21}^p(b_{11}(a_{11}b_{11}^p + a_{12}b_{12}^p + a_{13}b_{13}^p - b_{11}^p s_1) - \\ - a_{11} + b_{12}(a_{11}b_{21}^p + a_{12}b_{22}^p + a_{13}b_{23}^p - b_{21}^p s_2)) + \\ + b_{22}^p(b_{11}(a_{21}b_{11}^p + a_{22}b_{12}^p + a_{23}b_{13}^p - b_{12}^p s_1) - a_{21} + \\ + b_{12}(a_{21}b_{21}^p + a_{22}b_{22}^p\ {}_{23}b_{23}^p -{}_{22}^p\ s_{22})) + \\ + b_{23}^p(b_{11}(a_{31}b_{11}^p + a_{32}b_{12}^p + a_{33}b_{13}^p - b_{13}^p s_1) - \\ - a_{31} + b_{12}(a_{31}b_{21}^p + a_{32}b_{22}^p + a_{33}b_{23}^p - b_{23}^p s_2));$$

$$k_{22} = b_{22}^p s_2 + b_{21}^p(b_{21}(a_{11}b_{11}^p + a_{12}b_{12}^p + a_{13}b_{13}^p - b_{11}^p s_1) - \\ - a_{12} + b_{22}(a_{11}b_{21}^p + a_{12}b_{22}^p + a_{13}b_{23}^p - b_{21}^p s_2)) + \\ + b_{22}^p(b_{21}(a_{21}b_{11}^p + a_{22}b_p^{12} + a_{23}b_{13}^p - b_{12}^p s_1) - a_{22} + \\ + b_{22}(a_{21}b_{21}^p + a_{22}b_{22}^p + a_{23}b_{23}^p - b_{22}^p s_2)) + \\ + b_{23}^p(b_{21}(a_{31}b_{11}^p + a_{32}b_{12}^p + a_{33}b_{13}^p - b_{13}^p s_1) - \\ - a_{32} + b_{22}(a_{31}b_{21}^p + a_{32}b_{22}^p + a_{33}b_{23}^p - b_{23}^p s_2)).$$

Используя соотношение (8), найдем далее матрицу инъекции Морса [3]:

$$L = \begin{pmatrix} b_{11}^p s_1 - a_{12}b_{12}^p - a_{13}b_{13}^p - a_{11}b_{11}^p & b_{21}^p s_2 - a_{12}b_{22}^p - a_{13}b_{23}^p - a_{11}b_{21}^p \\ b_{12}^p s_1 - a_{22}b_{12}^p - a_{23}b_{13}^p - a_{21}b_{11}^p & b_{22}^p s_2 - a_{22}b_{22}^p - a_{23}b_{23}^p - a_{21}b_{21}^p \\ b_{13}^p s_1 - a_{32}b_{12}^p - a_{33}b_{13}^p - a_{31}b_{11}^p & b_{23}^p s_2 - a_{32}b_{22}^p - a_{33}b_{23}^p - a_{31}b_{21}^p \\ -b_{12}^p - a_{43}b_{13}^p & -b_{22}^p - a_{43}b_{23}^p \end{pmatrix}. \qquad (13)$$

В результате матрица замкнутого управлением ОВ $A_c = A + LB^{\mathrm{T}} + BF$ принимает следующий вид:

$$A_c = \begin{pmatrix} a_{11}^c & a_{12}^c & a_{13}^c & a_{14}^c \\ a_{21}^c & a_{22}^c & a_{23}^c & a_{24}^c \\ a_{31}^c & a_{32}^c & a_{33}^c & a_{34}^c \\ a_{41}^c & a_{42}^c & a_{43}^c & 0 \end{pmatrix}, \qquad (14)$$

где

$$a_{11}^c = a_{11} + b_{11}k_{11} + b_{12}k_{21} - \\ - b_{11}(a_{11}b_{11}^p + a_{12}b_{12}^p + a_{13}b_{13}^p - b_{11}^p s_1) - \\ - b_{12}(a_{11}b_{21}^p + a_{12}b_{22}^p + a_{13}b_{23}^p - b_{21}^p s_2);$$

$$a_{12}^c = a_{12} + b_{11}k_{12} + b_{12}k_{22} - \\ - b_{21}(a_{11}b_{11}^p + a_{12}b_{12}^p + a_{13}b_{13}^p - b_{11}^p s_1) - \\ - b_{22}(a_{11}b_{21}^p + a_{12}b_{22}^p + a_{13}b_{23}^p - b_{21}^p s_2);$$

$$a_{13}^c = a_{13} + b_{11}k_{13} + b_{12}k_{23} - \\ - b_{31}(a_{11}b_{11}^p + a_{12}b_{12}^p + a_{13}b_{13}^p - b_{11}^p s_1) - \\ - b_{32}(a_{11}b_{21}^p + a_{12}b_{22}^p + a_{13}b_{23}^p - b_{21}^p s_2);$$

$$a_{14}^c = a_{14} + b_{11}k_{14} + b_{12}k_{24};$$

$$a_{21}^c = a_{21} + b_{21}k_{11} + b_{22}k_{21} - \\ - b_{11}(a_{21}b_{11}^p + a_{22}b_{12}^p + a_{23}b_{13}^p - b_{12}^p s_1) - \\ - b_{12}(a_{21}b_{21}^p + a_{22}b_{22}^p + a_{23}b_{23}^p - b_{22}^p s_2);$$

$$a_{22}^c = a_{22} + b_{21}k_{12} + b_{22}k_{22} -$$
$$- b_{21}(a_{21}b_{11}^p + a_{22}b_{12}^p + a_{23}b_{13}^p - b_{12}^p s_1) -$$
$$- b_{12}(a_{21}b_{21}^p + a_{22}b_{22}^p + a_{23}b_{23}^p - b_{22}^p s_2);$$
$$a_{23}^c = a_{23} + b_{21}k_{13} + b_{22}k_{23} -$$
$$- b_{31}(a_{21}b_{11}^p + a_{22}b_{12}^p + a_{23}b_{13}^p - b_{12}^p s_1) -$$
$$- b_{32}(a_{21}b_{21}^p + a_{22}b_{22}^p + a_{23}b_{23}^p - b_{22}^p s_2);$$
$$a_{24}^c = b_{21}k_{14} + b_{22}k_{24};$$
$$a_{31}^c = a_{31} + b_{31}k_{11} + b_{32}k_{21} -$$
$$- b_{11}(a_{31}b_{11}^p + a_{32}b_{12}^p + a_{33}b_{13}^p - b_{13}^p s_1) -$$
$$- b_{12}(a_{31}b_{21}^p + a_{32}b_{22}^p + a_{33}b_{23}^p - b_{23}^p s_2);$$
$$a_{32}^c = a_{32} + b_{31}k_{12} + b_{32}k_{22} -$$
$$- b_{21}(a_{31}b_{11}^p + a_{32}b_{12}^p + a_{33}b_{13}^p - b_{13}^p s_1) -$$
$$- b_{22}(a_{31}b_{21}^p + a_{32}b_{22}^p + a_{33}b_{23}^p - b_{23}^p s_2);$$
$$a_{33}^c = a_{33} + b_{31}k_{13} + b_{32}k_{23} -$$
$$- b_{31}(a_{31}b_{11}^p + a_{32}b_{12}^p + a_{33}b_{13}^p - b_{13}^p s_1) -$$
$$- b_{32}(a_{31}b_{21}^p + a_{32}b_{22}^p + a_{33}b_{23}^p - b_{23}^p s_2);$$
$$a_{34}^c = b_{31}k_{14} + b_{32}k_{24};$$
$$a_{41}^c = -b_{11}(b_{12}^p p + a_{43}b_{13}^p) - b_{12}(b_{22}^p + a_{43}b_{23}^p);$$
$$a_{42}^c = 1 - b_{22}(b_{22}^p + a_{43}b_{23}^p) - b_{21}(b_{12}^p + a_{43}b_{13}^p);$$
$$a_{43}^c = a_{43} - b_{31}(b_{12}^p + a_{43}b_{13}^p) - b_{32}(b_{22}^p + a_{43}b_{23}^p).$$

Проверка условий инвариантности (8) показывает, что они действительно выполняются. При этом собственные значения матрицы A_c не соответствуют требованию заданного размещения полюсов (3). Для разрешения данной проблемы скорректируем полученную матрицу инъекции Морса. Для этих целей воспользуемся декомпозиционным методом модального синтеза, который ранее многократно применялся авторами для решения различных задач синтеза [13—16].

С учетом соотношений размерностей вектора состояния (четыре) и вектора управления (два) при декомпозиции рассматриваемой MIMO-системы будут иметь место только два уровня декомпозиции: нулевой и первый. Зададим собственные значения по уровням декомпозиции в виде скаляров (скалярных матриц) следующего вида:

$$\Sigma_1 = s_3, \;\; \Sigma_2 = s_4.$$

Для первого уровня декомпозиции необходимые матрицы для расчета коррекции матрицы инъекции Морса определяются следующими выражениями [13]:

$$A_{c1} = (C_R^{\perp})^{\mathrm{T}} A_c C_R^{\perp}; \;\; C_1 = C A_c A_R^{\perp}, \qquad (15)$$

где $C_R^{\perp}$ — правый делитель нуля (аннулятор) матрицы C. Аналитические значения указанных в формулах (15) матриц имеют вид

$$C_R^{\perp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \; A_{c1} = \begin{pmatrix} a_{22}^c & a_{23}^c & -a_{21}^c \\ a_{32}^c & a_{33}^c & -a_{31}^c \\ -a_{12}^c & -a_{13}^c & a_{11}^c \end{pmatrix};$$

$$C_{c1} = \begin{pmatrix} a_{42}^c & a_{43}^c & -a_{41}^c \end{pmatrix}.$$

При этом скорректированная матрица инъекции Морса может быть вычислена по формулам

$$L = C^- \Sigma_1 - A_c C^-; \qquad (16)$$

$$C^- = C^{\mathrm{T}} - C_R^{\perp}(C_1^+ \Sigma_2 - A_{c1} C_1^+), \qquad (17)$$

где помимо приведенных ранее матриц из формул (15) фигурирует псевдообратная матрица

$$C_1^+ = \begin{pmatrix} a_{42}^c / (a_{41}^{c2} + a_{42}^{c2} + a_{43}^{c2}) \\ a_{43}^c / (a_{41}^{c2} + a_{42}^{c2} + a_{43}^{c2}) \\ -a_{41}^c / (a_{41}^{c2} + a_{42}^{c2} + a_{43}^{c2}) \end{pmatrix}.$$

В результате вычислений согласно (16), (17), при условии, что

$$l_{11}^1 = -(a_{21}^c a_{41}^c + a_{22}^c a_{42}^c + a_{23}^c a_{43}^c -$$
$$- a_{42}^c s_4)/(a_{41}^{c2} + a_{42}^{c2} + a_{43}^{c2});$$
$$l_{21}^1 = -(a_{31}^c a_{41}^c + a_{32}^c a_{42}^c + a_{33}^c a_{43}^c -$$
$$- a_{43}^c s_4)/(a_{41}^{c2} + a_{42}^{c2} + a_{43}^{c2});$$
$$l_{31}^1 = (a_{11}^c a_{41}^c + a_{12}^c a_{42}^c + a_{13}^c a_{43}^c -$$
$$- a_{41}^c s_4)/(a_{41}^{c2} + a_{42}^{c\,2} + a_{43}^{c2}),$$

имеем

$$C^- = \begin{pmatrix} l_{31}^1 & -l_{11}^1 & -l_{21}^1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}};$$

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} a_{12}^c l_{11}^1 - a_{14}^c + a_{13}^c l_{21}^1 - a_{11}^c l_{31}^1 + l_{31}^1 s_3 \\ a_{22}^c l_{11}^1 - a_{24}^c + a_{23}^c l_{21}^1 - a_{21}^c l_{31}^1 + l_{11}^1 s_3 \\ a_{32}^c l_{11}^1 - a_{34}^c + a_{33}^c l_{21}^1 - a_{31}^c l_{31}^1 + l_{21}^1 s_3 \\ s_3 + a_{42}^c l_{11}^1 - a_{41}^c l_{31}^1 + a_{43}^c l_{21}^1 \end{pmatrix}. \qquad (18)$$

Окончательно матрица замкнутой MIMO-системы, вычисленная по формуле

$$\hat{A}_c = A_c + \hat{L} C,$$

с учетом (16) примет вид

$$\hat{A}_c = \begin{pmatrix} a_{11}^c & a_{12}^c & a_{13}^c & a_{12}^c l_{11}^1 + a_{13}^c l_{21}^1 - a_{11}^c l_{31}^1 + l_{31}^1 s_3 \\ a_{21}^c & a_{22}^c & a_{23}^c & a_{22}^c l_{11}^1 + a_{23}^c l_{21}^1 - a_{21}^c l_{31}^1 + l_{11}^1 s_3 \\ a_{31}^c & a_{32}^c & a_{33}^c & a_{32}^c l_{11}^1 + a_{33}^c l_{21}^1 - a_{31}^c l_{31}^1 + l_{21}^1 s_3 \\ a_{41}^c & a_{42}^c & a_{43}^c & s_3 + a_{42}^c l_{11}^1 - a_{41}^c l_{31}^1 + a_{43}^c l_{21}^1 \end{pmatrix}. \, (19)$$

При этом собственные значения матрицы $\hat{A}$ оказываются равными заданным

$$\operatorname{eig}(\hat{A}_c) = \{s_1, \quad s_2 \quad s_3 \quad s_4\},$$

$$\hat{A}_c = 10^3 \begin{pmatrix} -0{,}0001197 & -0{,}0000008278 & -0{,}00001823 & -3{,}76857 \\ 0{,}000024149 & -0{,}0019583 & 0{,}0012295 & 0{,}003086 \\ -0{,}0000192 & 0{,}0000325 & -0{,}0010413 & 0{,}078637 \\ -0{,}00000018586 & -0{,}000000007 & -0{,}00000018 & -0{,}01188 \end{pmatrix},$$

т. е. поэлементно совпадают с множеством (3). Окончательная проверка условий инвариантности (8) для случая $A_c = \hat{A}_c$ также подтверждает получение требуемого результата.

Результаты численных исследований

Воспользуемся следующими числовыми значениями матриц коэффициентов:

$$A = \begin{pmatrix} -0{,}1520 & 0{,}4226 & 0{,}9063 & 0{,}0960 \\ -18{,}6430 & -1{,}0600 & -1{,}6000 & 0 \\ -1{,}7570 & -0{,}1530 & -0{,}1360 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}4663 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -0{,}0320 & -0{,}0010 \\ -1{,}8740 & -8{,}9660 \\ -1{,}4600 & 0{,}3040 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Назначим полюса замкнутой системы в соответствии с (3) в виде

$$\operatorname{eig}(A_c) = \{-1, -2, -5, -7\}. \qquad (20)$$

Используя аналитические выражение (10) и (11), получим

$$F = \begin{pmatrix} -1{,}5663 & 0{,}7870 & 0{,}0060 & 0{,}0013 \\ -1{,}7500 & -0{,}1628 & -0{,}0915 & -0{,}0003 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 0{,}6156 & -0{,}0842 \\ -1{,}3066 & 0{,}3716 \\ 0{,}5394 & -0{,}2671 \\ -0{,}2837 & -0{,}2837 \end{pmatrix}.$$

При этом матрица замкнутой системы (12) равна

$$A_c = \begin{pmatrix} -0{,}1197 & -0{,}0008 & -0{,}0182 & 0{,}0960 \\ 0{,}0241 & -1{,}9583 & 1{,}2295 & -0{,}0001 \\ -0{,}0192 & 0{,}0325 & -1{,}0413 & -0{,}0020 \\ 0{,}0089 & -0{,}0000 & -0{,}0002 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверка соблюдения условий инвариантности (10) дает положительный результат, а собственные значения равны

$$\operatorname{eig}(A_c) = \{-1, -2, -0{,}1261, 0{,}0068\},$$

что не соответствует условию (20).

Коррекция инъекции Морса, осуществленная по описанной выше методике на основании применения выражения (18), с учетом $s_3 = -5$, $s_4 = -7$ дает

что соответствует собственным значениям (18) и условиям инвариантности (8).

Заключение

Для линеаризованной модели изолированного бокового движения одновинтового вертолета, рассматриваемой как MIMO-система, получены аналитические выражения законов стабилизации, обеспечивающие условия инвариантности по углу крена при возмущениях в каналах управления и заданное размещение полюсов. Приведены результаты численного решения задачи управления боковым движением ОВ с использованием полученных аналитических соотношений.

Список литературы

1. **Мисриханов М. Ш.** Инвариантное управление многомерными системами. Алгебраический подход. М.: Наука, 2007.
2. **Микрин Е. А., Зубов Н. Е., Мисриханов М. Ш., Рябченко В. Н.** Инвариантное управление маловысотным полетом одновинтового вертолета //Автоматизация. Современные технологии. 2015. № 6. С. 3—8.
3. **Зубов Н. Е., Микрин Е. А., Мисриханов М. Ш., Рябченко В. Н.** Условия инвариантности динамической системы на основе регуляризации // ДАН. 2015. Т. 465, № 1. С. 20—23.
4. **Dion J. M., Commault C.** Feedback decoupling of structured systems // IEEE Trans. on Automat. Contr. 1993. AC-38. P. 1132—1135.
5. **Van der Woude J. W., Murota K.** Disturbance decoupling with pole placement for structured systems; a graph theoretic approach // SIAM J. on Matr. Anal. and Appl. 1995. 16(3). P. 922—942.
6. **Wang Q. G.** Decoupling Control. Springer-Verlag. 2003.
7. **Зубов Н. Е., Микрин Е. А., Рябченко В. Н.** Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательных аппаратов. М.: Изд-во МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2016. 666 с.
8. **Ryabchenko V. N., Zubov N. E., Sorokin I. V., Proletarskii A. V.** Complete Pole Placement Method for Linear Mimo Systems // Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie. 2018. Vol. 19, N. 1. P. 11—18.
9. **Zubov N. E., Ryabchenko V. N., Sorokin I. V.** Synthesis of Stabilization Laws of a Single-Airscrew Helicopters Lateral Motion for Lack of Information about its Lateral Speed: Analytical Solution // Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie. 2018. Vol. 19, N. 4. P. 273—281.
10. **Зубов Н. Е., Рябченко В. Н., Сорокин И. В.** Управление по выходу спектром продольного движения одновинтового вертолета // Изв. высш. учеб. завед. Авиац. техн. 2020. № 2. С. 70—79.
11. **Романенко Л. Г., Романенко А. Г., Самарова Г. Г.** Управление продольным движением летательного аппарата при отсутствии в автопилоте сигнала по углу тангажа // Изв. вузов.. Авиационная техника. 2014. № 4. С. 25—29.
12. **Романенко Л. Г., Самарова Г. Г., Романенко А. Г.** Управление боковым движением летательного аппарата при отсутствии в автопилоте сигнала по углу крена // Изв. вузов. Авиационная техника. 2014. № 2. С. 19—23.
13. **Зубов Н. Е., Микрин Е. А., Олейник А. С., Рябченко В. Н.** Оценка угловой скорости космического аппарата в режиме орбитальной стабилизации по результатам измерений датчика местной вертикали // Вестник МГТУ. Приборостроение. 2014. № 5. С. 3—15.
14. **Зубов Н. Е., Микрин Е. А., Рябченко В. Н., Пролетарский А. В.** Аналитический синтез законов управления боковым движением летательного аппарата // Изв. высш. учеб. завед. Авиац. техн. 2015. № 3. С. 14—20.
15. **Зубов Н. Е., Микрин Е. А., Мисриханов М. Ш., Олейник А. С., Рябченко В. Н.** Терминальное релейно-импульсное управление линейными стационарными динамическими системами // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 3. С. 134—149.

Lateral Motion Control Invariance Helicopter on the Roll Angle. Analytical Synthesis

N. E. Zubov, nezubov@bmstu.ru, **V. N. Ryabchenko**, Ryabchenko.vn@yandex.ru,
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation,
PJSC Korolev Rocket and Space Corporation, Korolev, Russian Federation

Corresponding author: **Zubov Nickolay E.**, Ph.D., Professor, Bauman State University, Moscow, 105005, Russian Federation, e-mail: nezubov@bmstu.ru

Accepted on November 29, 2020

Abstract

For the linearized fourth-order model of the isolated lateral motion of a single-rotor helicopter as a MIMO system containing two inputs, the control is analytically synthesized, which ensures the invariance of the roll angle motion in the presence of disturbances in the control channels, as well as the required placement of the poles of the closed-loop system, given any specific values from the area of their stability. The approach to the synthesis of invariant control consists in finding a matrix of feedback coefficients of a linear system that satisfies the invariance conditions, which are a system of power matrix equations of a certain design. The synthesis is based on the application of theorems based on the use of the regularization condition of the matrix equation and the invariance conditions under disturbances in the control channels, as well as theorems that make it possible to place the poles of the MIMO system using the original decomposition of the control object. Regularization of a matrix equation is understood as a solution to the problem of providing a given set of singular values for an inverted symmetric square matrix. The invariance of the MIMO system is considered with respect to unmeasured disturbances in the control channels. The use of such an approach to the synthesis of invariant control made it possible to obtain an analytical solution that is versatile and can be applied in various flight modes of single-rotor helicopters with different dynamic properties. The results of the numerical synthesis of the lateral motion of a single-rotor helicopter using the obtained laws of invariant control, which confirm the reliability of the analytical expressions, are shown.

Keywords: *invariance, disturbances in control channels, MIMO system, decomposition, pole placement, analytical synthesis, side motion of a single-rotor helicopter, poles of a dynamic system*

For citation:

Zubov N. E., Ryabchenko V. N. Lateral Motion Control Invariance Helicopter on the Roll Angle. Analytical Synthesis, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2021, vol. 22, no. 6, pp. 331—336.

DOI: 10.17587/mau.22.331-336

References

1. **Misrikhanov M. S.** Invariant Control of Multidimensional Systems: Algebraic Approach, Moscow, Nauka, 2007.
2. **Mikrin E. A., Zubov N. E., Misrikhanov M. S., Ryabchenko V. N.** Invariant control of low-altitude flight of a single-rotor helicopter, *Automation. Modern Technologies*, 2015, no. 6, pp. 3—8.
3. **Zubov N. E., Mikrin E. A., Misrikhanov M. S., Ryabchenko V. N.** Invariance conditions for MIMO systems based on regularization, *Doklady Mathematics,* 2015, vol.92, no. 3, pp. 664—666.
4. **Dion J. M., Commault C.** Feedback decoupling of structured systems, *IEEE Trans. on Automat. Contr.,* 1993, AC-38, pp. 1132—1135.
5. **Van der Woude J. W., Murota K.** Disturbance decoupling with pole placement for structured systems; a graph theoretic approach, *SIAM J. on Matr. Anal. and Appl.*, 1995, vol. 16, no. 3, pp. 922—942.
6. **Wang Q. G**. Decoupling Control, Springer-Verlag, 2003.
7. **Zubov N. E., Mikrin E. A., Ryabchenko V. N.** Matrix Methods in the Theory and Practice of Automatic Control Systems for, Moscow, MGTU Im. N. E. Baumana, 2016, 666 p.
8. **Ryabchenko V. N., Zubov N. E., Sorokin I. V., Proletarskii A. V.** Complete Pole Placement Method For Linear Mimo Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2018, vol. 19, no. 1, pp. 11—18.
9. **Zubov N. E., Ryabchenko V. N., Sorokin I. V**. Synthesis Of Stabilization Laws Of A Single-Airscrew Helicopters Lateral Motion For Lack Of Information About Its Lateral Speed: Analytical Solution, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2018, vol. 19, no. 4, pp. 273—281.
10. **Zubov N. E., Ryabchenko V. N., Sorokin I. V.** Output Control of the Longitudinal Motion Spectrum of a Single-Rotor Helicopter, *Russian Aeronautics*, 2020, vol. 63, no. 2, pp. 249—259.
11. **Romanenko L. G., Romanenko A. G., Samarova G. G.** Aircraft Longitudinal Control Without a Pitch Command in the Autopilot, *Russian Aeronautics*, 2014, vol. 57, no. 4, pp. 25—29.
12. **Romanenko L. G., Samarova G. G., Romanenko A. G.** Aircraft Lateral-Directional Control without a Roll Command in the Autopilot, *Russian Aeronautics*, 2014, vol. 57, no. 2, pp. 19—23.
13. **Zubov N. E., Mikrin E. A., Oleinik A. S., Ryabchenko V. N.** The spacecraft angular velocity estimation in the orbital stabilization mode by the results of the local vertical sensor measurements,Vestn. MGTU, Priborostr., 2014, no. 5, pp. 3—15.
14. **Zubov N. E., Mikrin E. A., Ryabchenko V. N., Proletarskii A. V.** Analytical synthesis of control laws for lateral motion of aircraft, *Russian Aeronautics,* 2015, vol. 58, no. 3, pp. 263—270.
15. **Zubov N. E., Mikrin E. A., Misrikhanov M. S., Oleinik A. S., Ryabchenko V. N.** Terminal bang-bang impulsive control of linear time invariant dynamic systems, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2014, vol. 53(3), pp. 430—444.

Издательство "НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ"

107076, Москва, Стромынский пер., 4

Телефон редакции журнала: **(499) 269-5510, (499) 269-5397**

Технический редактор *Е. В. Конова.* Корректор *М. Ю. Безменова.*

Сдано в набор 29.03.2021. Подписано в печать 17.05.2021. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН621. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Адвансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Адвансед солюшнз".
119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1. Сайт: **www.aov.ru**