

М. В. Левский, канд. техн. наук, вед. науч. сотр., levskii1966@mail.ru,
Научно-исследовательский институт космических систем имени А. А. Максимова —
филиал ГКНПЦ им. М. В. Хруничева

Динамическая задача оптимального управления ориентацией космического аппарата с ограничением на фазовые переменные

Представлено аналитическое решение задачи оптимального управления переориентацией космического аппарата (КА) из произвольного начального углового положения в требуемое конечное угловое положение при наличии ограничений как на управляющие функции, так и на фазовые переменные (ограничены силовой момент и угловая скорость). Минимизируется время разворота. Рассматривается случай, когда существенным ограничением является максимально допустимая кинетическая энергия вращения. Построение оптимального управления разворотом основано на принципе максимума и кватернионных переменных и моделях. Показано, что оптимальным является кусочно-непрерывное управление, при котором во время вращения КА направление кинетического момента постоянно относительно инерциальной системы координат, при выполнении оптимального разворота момент сил параллелен прямой, неподвижной в инерциальном пространстве. В зависимости от заданных начального и конечного положений и моментов инерции КА возможны два типа оптимального управления — релейное управление с одной точкой переключения, когда на всем интервале управления действует максимально возможный управляющий момент (участки разгона и торможения), и релейное управление с двумя точками переключения, включающее интенсивный разгон, движение по инерции с выключенным моментом и выходом на ограничение по энергии вращения, а затем финальным торможением с максимальным управляющим моментом. Записаны аналитические уравнения и соотношения для нахождения оптимальной программы управления. Даны расчетные формулы для определения временных характеристик маневра и вычисления длительности разгона и торможения. Предложенный алгоритм управления позволяет максимально быстро осуществлять переориентацию КА с ограниченной кинетической энергией вращения. Для динамически симметричного твердого тела (космического аппарата) поставленная задача оптимального управления решается до конца — получены зависимости как явные функции времени для управляющих переменных и соотношения для расчета ключевых параметров закона управления. Приводятся численный пример и результаты математического моделирования движения КА при оптимальном управлении, демонстрирующие практическую реализуемость разработанного метода управления ориентацией КА.

Ключевые слова: космический аппарат, ориентация, кватернион, энергия вращения, принцип максимума, управляющая функция, релейное управление

Введение

Исследуется динамическая задача оптимального по времени управления разворотом космического аппарата (КА) из произвольного начального положения покоя в заданное конечное положение покоя, когда ограничены не только управляющие функции, но и фазовые переменные (ограничения наложены на силовой момент и угловую скорость). Пространственное движение КА относительно центра масс описывается кватернионом [1]. Построение оптимальной программы вращения основано на кватернионных моделях, принципе максимума и универсальных переменных [2].

Вопросы управляемого движения твердого тела вокруг центра масс исследовались неоднократно [1—14] (в том числе с помощью гиро-

динов [3—5]). Многие авторы отмечают [6, 7], что аналитическое решение задачи оптимального разворота в замкнутой форме, если бы оно было найдено, имело бы большой практический интерес, так как позволяет применять на борту КА готовые законы программного управления и изменения оптимальной траектории движения КА. Немало работ исследуют проблемы наискорейшего разворота [1, 5—10]. Некоторые решения получены для осесимметричных КА [9—11] (причем в работе [11] дано лишь численное решение краевой задачи принципа максимума путем замены переменных и сведением ее к краевой задаче разворота сферически-симметричного тела). Однако аналитическое решение задачи пространственного разворота для КА с произвольным распределением масс при произвольных граничных

условиях по угловому положению КА не найдено; известны лишь некоторые особые случаи решения задачи разворота (например, [1, 12]).

Проблема создания высокоэффективных алгоритмов управления ориентацией КА остается актуальной и сегодня. Предлагаемое ниже решение позволяет максимально быстро разворачивать КА с ограниченной кинетической энергией вращения, что крайне важно для практики космических полетов. Вопросы быстрой реализации маневров при экономном управлении движением КА остаются до сих пор актуальными, поэтому решаемая задача является практически важной.

Уравнения углового движения и постановка задачи управления

Полагаем, что управление угловым положением КА осуществляется посредством исполнительных механизмов, создающих вращающие моменты относительно всех трех главных центральных осей инерции КА. Угловое движение КА как твердого тела описывается динамическими уравнениями Эйлера [1]

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 &= M_1; \\ J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 &= M_2; \\ J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 &= M_3 \end{aligned} \quad (1)$$

и кинематическим уравнением, записанным в кватернионной форме [1],

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \omega, \quad (2)$$

где J_i — главные центральные моменты инерции КА; ω_i — проекции вектора ω абсолютной угловой скорости КА на оси связанного базиса $E_{КА}$, образованного главными центральными осями эллипсоида инерции КА; M_i — проекции главного момента M сил на оси связанного базиса $E_{КА}$ ($i = \overline{1, 3}$); Λ — кватернион [1], задающий движение связанного базиса $E_{КА}$ относительно инерциального базиса I . Считается, что область допустимых управлений M описывается условием [10]

$$\frac{M_1^2}{J_1} + \frac{M_2^2}{J_2} + \frac{M_3^2}{J_3} \leq u_0^2, \quad (3)$$

где $u_0 > 0$ — некоторая положительная величина, характеризующая мощность исполнительных органов системы ориентации КА. Далее

полагаем, что для допустимых движений кинетическая энергия вращения КА не должна превышать некоторой положительной величины $E_{доп}$, т. е. управление ограничено условием

$$J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2 \leq 2E_{доп}, \quad (4)$$

где $E_{доп}$ — максимально допустимая энергия вращения. Практическое значение имеют задачи, когда разворот выполняется из положения покоя в положение покоя относительно опорного базиса I (и угловые скорости в начальный и конечный моменты времени равны нулю, так как базис I не вращается); рассматривается задача разворота с закрепленными левым и правым концами траектории движения. Поэтому уравнения (1), (2) имеют следующие краевые условия:

$$\Lambda(0) = \Lambda_H, \quad \omega(0) = 0; \quad (5)$$

$$\Lambda(T) = \Lambda_K, \quad \omega(T) = 0, \quad (6)$$

где T — время окончания маневра переориентации. Кватернионы Λ_H и Λ_K имеют произвольные наперед заданные значения, для которых $\Lambda_K \neq \pm \Lambda_H$ и $\|\Lambda_H\| = \|\Lambda_K\| = 1$ (кватернион Λ принят нормированным [1] для удобства). Задачу оптимального управления сформулируем следующим образом: необходимо перевести КА из состояния (5) в состояние (6) в соответствии с уравнениями (1), (2) и ограничениями (3), (4) за минимальное время T . Оптимальное решение $M(t)$ ищется в классе кусочно-непрерывных функций.

Математическая формулировка необходимых условий оптимальности

В соответствии с принципом максимума [15] введем сопряженные переменные φ_j , соответствующие угловым скоростям ω_j . Вместо сопряженных переменных ψ_j , соответствующих компонентам λ_j кватерниона Λ ($j = \overline{0, 3}$), используем универсальные переменные r_i ($i = \overline{1, 3}$) [2], поскольку критерий оптимальности не содержит позиционных координат (элементов кватерниона ориентации Λ). Запишем гамильтониан задачи оптимального управления (1)–(6) [2]:

$$\begin{aligned} H = & -1 + \varphi_1(M_1 + (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3)/J_1 + \\ & + \varphi_2(M_2 + (J_3 - J_1)\omega_1\omega_3)/J_2 + \\ & + \varphi_3(M_3 + (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2)/J_3 + \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3. \end{aligned}$$

Оптимальные функции r_i как компоненты вектора r удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= \omega_3 r_2 - \omega_2 r_3; \\ \dot{r}_2 &= \omega_1 r_3 - \omega_3 r_1; \\ \dot{r}_3 &= \omega_2 r_1 - \omega_1 r_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения для сопряженных функций φ_i имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \omega_3 \varphi_2 (J_1 - J_3) / J_2 + \omega_2 \varphi_3 (J_2 - J_1) / J_3 - r_1; \\ \dot{\varphi}_2 &= \omega_3 \varphi_1 (J_3 - J_2) / J_1 + \omega_1 \varphi_3 (J_2 - J_1) / J_3 - r_2; \\ \dot{\varphi}_3 &= \omega_2 \varphi_1 (J_3 - J_2) / J_1 + \omega_1 \varphi_2 (J_1 - J_3) / J_2 - r_3. \end{aligned} \quad (8)$$

Гамильтониан H составлен без учета ограничения $\|\Lambda\| = 1$ для фазовых переменных в силу равенства $\|\Lambda(0)\| = 1$, о чем договорились выше. Вектор \mathbf{r} неподвижен относительно инерциального базиса \mathbf{I} , из-за чего $|\mathbf{r}| = \text{const} \neq 0$. Решение $\mathbf{r}(t)$ системы (7) определяется начальным Λ_n и конечным Λ_k положениями КА. Оптимальная функция $\mathbf{r}(t)$ вычисляется через кватернион $\Lambda(t)$ [1, 2]:

$$\mathbf{r} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_E \circ \Lambda,$$

где $\mathbf{c}_E = \text{const} = \Lambda_n \circ \mathbf{r}(0) \circ \tilde{\Lambda}_n$ (составляющие вектора \mathbf{c}_E — проекции вектора \mathbf{r} на оси инерциального базиса \mathbf{I}). Система уравнений (7), (8) совместно с требованием максимальной гамильтониана H дает необходимые условия оптимальности. Обозначим

$$E(t) = (J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2) / 2.$$

Для нахождения максимума гамильтониана запишем функцию H в виде

$$H = M_1 \varphi_1 / J_1 + M_2 \varphi_2 / J_2 + M_3 \varphi_3 / J_3 + H_{inv},$$

где H_{inv} не зависит явно от управляющих функций M_i . Пусть $\boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ — вектор сопряженных переменных φ_i . Нетрудно видеть, что в случае $\boldsymbol{\varphi} \neq 0$ максимум функции H для управлений $M_i(t)$ при ограничении (3) достигается, если

$$M_i = \frac{u_0 \varphi_i}{\sqrt{\varphi_1^2 / J_1 + \varphi_2^2 / J_2 + \varphi_3^2 / J_3}}. \quad (9)$$

В начале и в конце разворота ограничение (4) несущественно, оно переходит в строгое неравенство, так как угловые скорости в начальный и конечный моменты времени равны нулю: $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0$. Поэтому в интервалах движения, когда $E(t) < E_{\text{доп}}$, оптимальное решение определяется замкнутой системой уравнений (1), (2), (7)—(9) с учетом требований (5), (6). Системе (1), (7)—(9) удовлетворяют функции φ_i , пропорциональные r_i . С учетом условий разворота

$\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0$ система уравнений (1), (7)—(9) имеет единственное решение, в котором φ_i и угловые скорости ω_i связаны с переменными r_i зависимостями

$$\varphi_i = a(t) r_i; \quad (10)$$

$$\omega_i = b(t) r_i / J_i, \quad (11)$$

где $b(t)$ — скалярная функция времени; $a(t) = a(0) - t$ (значение $a(0)$ определяется временными параметрами разворота). Подставив равенства (10), (11) в систему (8) с учетом уравнений (1), (7), (9) получим три тождества, что доказывает истинность решения (10), (11). Значение $\mathbf{r}(0)$ такое, чтобы в результате интегрирования уравнений (1), (2), (7), (11) с начальными условиями $\Lambda(0) = \Lambda_n$ для траектории движения $\Lambda(t)$ выполнялось равенство $\Lambda(T) = \Lambda_k$.

Разворот КА совершается максимально быстро, если в каждый момент времени t угловая скорость максимальна, насколько это позволяют ограничения (3) и (4). Если $E(t) < E_{\text{доп}}$, то оптимальным является управление (9), и $\mathbf{M} \neq 0$, если $\boldsymbol{\varphi} \neq 0$. При условии $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$ область возможных значений вектора \mathbf{u} с компонентами $u_i = M_i / \sqrt{J_i}$ сокращается из шара $|\mathbf{u}| \leq u_0$ до плоского круга, ограниченного окружностью, образованной пересечением сферы с плоскостью, перпендикулярной вектору, компонентами которого являются $\omega_i \sqrt{J_i}$ (поскольку для выполнения $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$ должно выполняться $\dot{E} = 0$ и, следовательно, $\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$; знак умножения "•" означает скалярное произведение векторов). Оптимальный момент \mathbf{M} обязан находиться внутри сечения эллипсоида (3) плоскостью, перпендикулярной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, с тем, чтобы $\dot{E} = 0$, пока не наступит момент начала остановки вращения (а он существует, поскольку $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$).

При разгоне (начиная с момента $t = 0$), когда $E(t) < E_{\text{доп}}$ и кинетическая энергия вращения $E(t)$ возрастает, имеем $a(t) > 0$ и $\mathbf{M} \neq 0$ и, как следствие,

$$M_i = \frac{u_0 J_i \omega_i}{\sqrt{J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2}} \quad (12)$$

(управляющий момент (12) делает раскрутку максимально быстрой [13]). На участке торможения (в интервале времени слева от момента $t = T$), когда $E(t) < E_{\text{доп}}$ и кинетическая энергия вращения $E(t)$ уменьшается, $a(t) < 0$ и $\mathbf{M} \neq 0$, чтобы $\dot{E} < 0$, т.е.

$$M_i = \frac{-u_0 J_i \omega_i}{\sqrt{J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2}} \quad (13)$$

(слева от момента $t = T$ управляющий момент \mathbf{M} и кинетический момент \mathbf{L} имеют противоположные направления, и длительность остановки вращения минимальна [13]). На участках разгона и торможения, когда $E(t) < E_{\text{доп}}$, кинетическая энергия вращения изменяется в соответствии с уравнением $\dot{E} = \pm u_0 \sqrt{2E}$ ("+" соответствует разгону, "-" — торможению). Поэтому для участка разгона $E(t) = u_0^2 t^2 / 2$, а для участка торможения $E(t) = u_0^2 (T - t)^2 / 2$. Поскольку в момент начала торможения кинетическая энергия такая же, как в момент окончания разгона, то длительности разгона и торможения одинаковы и равны $\tau = t_p = \sqrt{2E_{\text{max}}}/u_0$, где $E_{\text{max}} = E(T/2)$ — максимальная энергия вращения.

Найдем, каким будет оптимальное управление \mathbf{M} , чтобы удовлетворялось условие $\dot{E} = 0$ с одновременной максимизацией гамильтониана H . При вращении с постоянной кинетической энергией $E(t) = E_{\text{доп}}$ необходимо, чтобы

$$M_1 \omega_1 + M_2 \omega_2 + M_3 \omega_3 = 0. \quad (14)$$

Для решения уравнений (10), (11) при условии $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi_1 M_1 / J_1 + \varphi_2 M_2 / J_2 + \varphi_3 M_3 / J_3 = \\ = a(t)(M_1 \omega_1 + M_2 \omega_2 + M_3 \omega_3) / b(t) = 0, \end{aligned}$$

и поэтому

$$H = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3 - 1 \quad (15)$$

(очевидно, $b(t) \neq 0$, когда $E(t) = E_{\text{доп}}$). Угловые скорости ω_i , при которых достигается максимум гамильтониана H (с учетом $E(t) = E_{\text{доп}}$), будут следующими:

$$\omega_i = \frac{r_i \sqrt{2E_{\text{доп}}}}{J_i \sqrt{r_1^2 / J_1 + r_2^2 / J_2 + r_3^2 / J_3}}. \quad (16)$$

При выполнении соотношений (10), (11) гамильтониан H равен

$$\begin{aligned} H = -1 + a(M_1 r_1 / J_1 + M_2 r_2 / J_2 + M_3 r_3 / J_3) + \\ + b(r_1^2 / J_1 + r_2^2 / J_2 + r_3^2 / J_3). \end{aligned}$$

Подставив зависимости (16) для оптимальных угловых скоростей ω_i в динамические уравнения (1) с учетом уравнений (7) для оптимальных функций r_i , получим оптимальный силовой момент $\mathbf{M} = 0$ для моментов времени,

когда $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$ (на участке между разгоном и торможением), при этом $\dot{H} = 0$, так как на этапе разгона оптимальный момент \mathbf{M} и вектор $\boldsymbol{\varphi}$ имеют одинаковое направление и в момент окончания разгона $r_i = J_i \omega_i / b$. Легко убедиться, что

$$r_1^2 / J_1 + r_2^2 / J_2 + r_3^2 / J_3 = \text{const},$$

Поскольку $|\mathbf{r}| \neq 0$ и $H = \text{const}$ внутри отрезка времени, на котором $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$ (так как $\dot{H} = 0$), то

$$b = \text{const} = (1 + H) / (r_1^2 / J_1 + r_2^2 / J_2 + r_3^2 / J_3).$$

Это означает, что в оптимальном развороте в интервале времени, когда $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$, будет $|\mathbf{L}| = \text{const}$, что подтверждает вывод об оптимальности значения $\mathbf{M} = 0$ в моменты времени, когда $E(t) = \text{const}$. Вращение по инерции есть частный случай закономерности (11) с учетом (7). На момент достижения равенства $E(t) = E_{\text{доп}}$ направления оптимального вектора $\boldsymbol{\varphi}$ и кинетического момента \mathbf{L} совпадают, поэтому единственным решением системы (1), (7), (8) в интервале времени, когда $E(t) = \text{const}$, являются зависимости (10), в которых $\dot{a} = -1$. Из свойства непрерывности функции $a(t)$ следует, что $a(t) = a(0) - t$ для любого момента времени t , пока $a(t) \geq 0$. Как только $a(t) < 0$, так управление (9) становится оптимальным, потому что $\boldsymbol{\varphi} \neq 0$ и силовой момент (9) (а значит, и (13)) не нарушает требования (4), поскольку при таком управлении будут выполняться условия $\mathbf{M} \cdot \mathbf{L} < 0$ и $\dot{E} < 0$. Следовательно, решение (10), (11), в котором $a(t) = a(0) - t$, справедливо для всего интервала управления $t \in [0, T]$. В оптимальном решении $a(0) > 0$ и $a(T) < 0$.

Структура оптимального управления

В зависимости от условий разворота (сочетания значений Λ_n , Λ_k и J_1, J_2, J_3, u_0) в оптимальном движении из начального положения Λ_n в конечное положение Λ_k максимальная кинетическая энергия вращения может быть меньше $E_{\text{доп}}$, а может возникнуть необходимость вращения в течение какого-то времени с выполнением равенства $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$. Определим условия, когда оптимальное управление исключает наличие моментов времени, в которые КА вращается с постоянной кинетической энергией. Для того чтобы $\dot{E} \neq 0$ на всем отрезке времени $t \in [0, T]$, время T долж-

но быть меньше, чем $2\sqrt{2E_{\text{доп}}}/u_0$. Чтобы рассчитать время оптимального разворота T , используем значение функционала пути [14]

$$S = \int_0^T \sqrt{J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2} dt, \quad (17)$$

которое не зависит от характера изменения скалярной функции $b(t)$, если движение КА удовлетворяет уравнениям (7), (11) [14]. Исходя из соотношений $T\sqrt{2E_{\text{макс}}} = 2S$, $E_{\text{макс}} = u_0^2\tau^2/2$ и $T = 2\tau$ получаем $T = 2\sqrt{S}/u_0 = T_{\text{fast}}$ — минимально возможное время разворота при ограничении (3) даже без учета требования (4) к кинетической энергии вращения. Для оптимального управления с одной точкой переключения в момент времени $t = T/2$ необходимо выполнение условия $T_{\text{fast}} \leq 2\sqrt{2E_{\text{доп}}}/u_0$. Если $u_0S \leq 2E_{\text{доп}}$, то во время максимально быстрого разворота вращение КА в режиме $E(t) = \text{const}$ невозможно. Если $u_0S > 2E_{\text{доп}}$, то наличие участка движения КА с постоянной кинетической энергией вращения неизбежно; разница $S - 2E_{\text{доп}}/u_0$ определяет длительность участка движения по инерции.

Таким образом, в зависимости от значения функционала пути (17), вычисленного для движения в соответствии с уравнениями (7), (11), реализуется один из двух вариантов оптимального управления: если $u_0S \leq 2E_{\text{доп}}$, то оптимальным является релейное управление с одной точкой переключения, при котором $a(T) = -a(0)$, а если $u_0S > 2E_{\text{доп}}$, то оптимальным является релейное управление с двумя точками переключения, при котором $a(0) > -a(T)$. Рис. 1 отражает оптимальное управление, при котором существует отрезок времени с $E(t) = \text{const}$

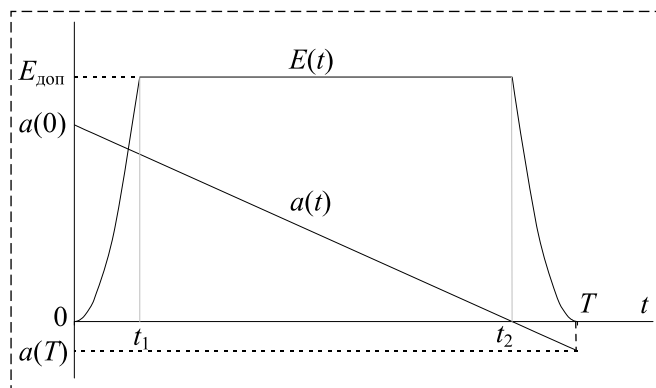


Рис. 1. К определению точек переключения
Fig. 1. For determining the points of switching

(при выполнении условия $S > 2E_{\text{доп}}/u_0$ для значения (17)); t_1 — ближайший к началу разворота момент достижения равенства $E(t) = E_{\text{доп}}$; t_2 — момент смены знака скалярной функции $a(t)$ (начиная с момента времени $t = t_2$ функция $a(t)$ удовлетворяет условию $a(t) < 0$). Для $t > t_2$ имеем $a(t) < 0$, и оптимальным является управление (9), потому что при таком силовом моменте будет выполняться условие $\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = \dot{E} < 0$ и ограничение (4) несущественно вплоть до $t = T$. В интервалах $t < t_1$ и $t > t_2$ оптимальным управлением является (9), при котором будет выполнено условие $|\mathbf{M}| = \text{const} = u_0/C$, где $C = \sqrt{p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3} = \text{const}$, $p_i = r_i / r_0$, $r_0 = \text{const} = |\mathbf{r}| \neq 0$.

На участке вращения с максимально допустимой кинетической энергией оптимальный момент \mathbf{M} определяется из трех условий: из ограничения (3), требования (14) и условия, что в каждый текущий момент времени t , пока $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$, гамильтониан H принимает максимальное значение. Из структуры гамильтониана (15) следует, что во время вращения КА с постоянной максимально допустимой кинетической энергией оптимальным является такое управление \mathbf{M} , при котором в каждый текущий момент времени t (пока $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$) угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ удовлетворяет соотношениям (16).

Требование (14) привело к структуре (15), при которой гамильтониан H не зависит явным образом от силового момента \mathbf{M} . Оптимальное значение \mathbf{M} вычисляем путем подстановки оптимальных угловых скоростей (16) в уравнения (1) с учетом (7) для переменных r_i и проверки выполнения условий (3), (14) (т. е. проверяем, чтобы момент \mathbf{M} находился внутри области допустимых значений). В результате получим $\mathbf{M} = 0$. Очевидно, что найденное управление удовлетворяет (3), (14). Таким образом, структура оптимального управления полностью определена:

$$\mathbf{M}(t) = \begin{cases} \frac{u_0 \text{sign} a(t)}{\sqrt{r_1^2/J_1 + r_2^2/J_2 + r_3^2/J_3}} \mathbf{r}, & \text{если } E(t) < E_{\text{доп}} \text{ или } a(t) < 0; \\ 0, & \text{если } E(t) = E_{\text{доп}} \text{ и } a(t) \geq 0. \end{cases}$$

Заметим, что вращение по инерции полностью соответствует (10), (11) ((16) является частным случаем (11) и не противоречит (10)). Поэтому найденное оптимальное решение (10),

(11) справедливо на всем интервале управления $t \in [0, T]$.

Константу r_0 определим из условия трансверсальности $H(T) = 0$ (так как время окончания оптимального процесса не фиксировано). Найдем $H(T)$ с учетом (10):

$$\begin{aligned} H(T) &= \\ &= -1 + a(T)(-u_0\sqrt{r_1^2/J_1 + r_2^2/J_2 + r_3^2/J_3}) = \\ &= -1 - u_0 a(T) r_0 C. \end{aligned}$$

Значение $a(T)$ оптимальной функции $a(t)$ в конечный момент времени равно $a(T) = -1/(u_0 r_0 C)$. При любом типе оптимального управления (с одной или с двумя точками переключения) $a(T) = -\tau$ (напомним, τ — длительность разгона и торможения). Поэтому $r_0 = 1/(u_0 \tau C)$. Отсюда оптимальное значение r_0 равно $r_0 = 1/(C\sqrt{2E_{\text{доп}}})$, если присутствует участок вращения с постоянной максимально допустимой кинетической энергией $E_{\text{доп}}$. Для оптимального управления с одной точкой переключения $\tau = \sqrt{S/u_0}$, поэтому $r_0 = 1/(C\sqrt{u_0 S})$.

Время оптимального разворота T рассчитывается на основании функционала пути (17). Поскольку оптимальное движение КА удовлетворяет уравнениям (7), (11), то значение S не зависит от характера изменения скалярной функции $b(t)$ и является минимально возможным [14]. Если $u_0 S > 2E_{\text{доп}}$, то имеет место участок вращения КА с $E(t) = \text{const}$, а время оптимального разворота T , длительности разгона τ и неуправляемого вращения вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} T &= S/\sqrt{2E_{\text{доп}}} + \sqrt{2E_{\text{доп}}}/u_0, \quad \tau = \sqrt{2E_{\text{доп}}}/u_0, \\ t_{\text{св}} &= S/\sqrt{2E_{\text{доп}}} - \sqrt{2E_{\text{доп}}}/u_0. \end{aligned}$$

Если $u_0 S \leq 2E_{\text{доп}}$, то в оптимальном движении не существует моментов времени, когда $E(t) = \text{const}$ ($t_{\text{св}} = 0$), и время оптимального разворота равно $T = 2\sqrt{S/u_0} = T_{\text{fast}}$.

Уравнения (7), (11) удовлетворяются на всем отрезке времени $t \in [0, T]$, поэтому оптимальное движение определяется зависимостями

$$\mathbf{M} = m_0[\text{sign}(t_p - t) + \text{sign}(t_T - t)]\tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_p \circ \Lambda/2; \quad (18)$$

$$J_{i\omega_i} = m_0(t_p + t_T - |t - t_p| - |t - t_T|)p_i/2, \quad (19)$$

где $m_0 = u_0/C$, p_i — компоненты вектора $\mathbf{p} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$, t_p — время окончания разгона; t_T — момент начала торможения, $\mathbf{c}_p = \text{const} = \Lambda_{\text{H}} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{\text{H}}$, $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$:

$$t_p = \min(\sqrt{S/u_0}, \sqrt{2E_{\text{доп}}}/u_0),$$

$$t_T = \max(\sqrt{S/u_0}, S/\sqrt{2E_{\text{доп}}}),$$

$$\mathbf{p} = \tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{\text{H}} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{\text{H}} \circ \Lambda.$$

Зависимости (7), (18), (19) с учетом равенств $r_i = r_0 p_i$ — единственное решение задачи оптимального управления (1)–(6). Из (7), (18) и соотношений $r_i = r_0 p_i$ видно, что при оптимальном управлении момент \mathbf{M} действует вдоль прямой, неподвижной в инерциальной системе координат. Оптимальным (в смысле минимума времени T) будет разворот КА, при котором направление кинетического момента остается неизменным относительно инерциальной системы координат (векторы \mathbf{M} и \mathbf{L} коллинеарны). На всем отрезке времени $t \in [0, T]$ отношение кинетической энергии вращения E к квадрату модуля кинетического момента КА постоянно:

$$E/|\mathbf{L}|^2 = 0,5(r_1^2/J_1 + r_2^2/J_2 + r_3^2/J_3)/|r|^2 = \text{const}.$$

Для функций $a(t)$, $b(t)$ оптимального решения справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} a(0) &= T - 1/(u_0 r_0 C), \quad a(T) = -1/(u_0 r_0 C), \\ b(t) &= u_0(T - |t - t_p| - |t - t_T|)/(2r_0 C). \end{aligned}$$

Время разворота T и оптимальное значение r_0 равны

$$\begin{aligned} T &= \max(2\sqrt{S/u_0}; S/\sqrt{2E_{\text{доп}}} + \sqrt{2E_{\text{доп}}}/u_0), \\ r_0 &= \max(1/\sqrt{u_0 S}, 1/\sqrt{2E_{\text{доп}}})/C. \end{aligned}$$

Максимальный модуль кинетического момента $L_{\text{max}} = \sqrt{\min(u_0 S, 2E_{\text{доп}})}/C$. Максимальная энергия вращения за время оптимального разворота $E_{\text{max}} = \min(u_0 S/2, E_{\text{доп}})$.

Если $u_0 S \leq 2E_{\text{доп}}$, то в законах (18), (19) $t_T = t_p = T/2 = \sqrt{S/u_0}$ (оптимальным является релейное управление с одной точкой переключения); при этом $E_{\text{max}} = u_0 S/2$, и ограничение (4) несущественно. Время оптимального разворота составляет $T = 2\sqrt{S/u_0}$. Если $u_0 S > 2E_{\text{доп}}$, то $t_T > t_p$ ($t_p = \tau$, $t_T = T - \tau$), в оптимальном развороте имеется участок вращения по инерции (реализуется релейное управление с двумя точками переключения и $t_{\text{св}} \neq 0$). Решение задачи оптимального по времени разворота с ограничением на фазовые переменные (4) подчиняется уравнениям (7), (10), (11), а управ-

ляющие переменные M_i и угловые скорости ω_i изменяются в соответствии с законами (18), (19). Решение (18), (19) оптимально, потому что оно — единственное; только оно одно (и никакое другое) удовлетворяет необходимым условиям оптимальности. Оптимальный вектор \mathbf{p}_0 рассчитывается в результате решения краевой задачи принципа максимума. Константы S , C , m_0 полностью определяют программу движения при оптимальном законе управления пространственным разворотом КА.

Частный случай оптимального управления разворотом КА

Задача построения оптимального управления $\mathbf{M}(t)$ состоит главным образом в нахождении такого вектора $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$ (и значения S), чтобы в результате движения в соответствии с уравнениями (2), (7), (11) и начальными условиями (5) выполнялись равенства (6). Указанная система имеет аналитическое решение только для динамически симметричного и сферического тел.

Для динамически симметричного КА (например, когда $J_2 = J_3$) задача оптимального управления разворотом решается до конца. Оптимальное движение представляет собой одновременное вращение КА как твердого тела вокруг своей продольной оси OX и вокруг вектора \mathbf{p} , неподвижного в инерциальном пространстве и составляющего с продольной осью КА определенный постоянный угол. Угловые скорости относительно осей OX и \mathbf{p} изменяются пропорционально, и поэтому для оптимального решения $\mathbf{p}(t)$ справедливы уравнения

$$\Lambda_K = \Lambda_H \circ \mathbf{e}^{\mathbf{p}_0\beta/2} \circ \mathbf{e}^{\mathbf{e}_1\alpha/2},$$

$$p_1 = p_{10}, p_2 = p_{20}\cos\kappa + p_{30}\sin\kappa,$$

$$p_3 = -p_{20}\sin\kappa + p_{30}\cos\kappa, \kappa = \frac{J_2 - J_1}{J_2} \int_0^t \omega_1(t) dt,$$

где $p_{i0} = p_i(0)$; \mathbf{e}_1 — орт продольной оси КА; α , β — углы поворота КА вокруг продольной оси OX и вокруг вектора \mathbf{p} соответственно ($|\alpha| \leq \pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$); продольная угловая скорость $\omega_1(t)$ вычисляется по формулам (19) с учетом $p_1 = p_{10}$. Зависимость p_{i0} , α , β от Λ_H и Λ_K определяется значением $\Lambda_p = \tilde{\Lambda}_H \circ \Lambda_K$ из системы

$$\alpha = \frac{J_2 - J_1}{J_1} p_{10}\beta; \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - p_{10}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = v_0;$$

$$\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2} + p_{10}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = v_1;$$

$$p_{20}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + p_{30}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = v_2;$$

$$-p_{20}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + p_{30}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = v_3,$$

где v_0, v_1, v_2, v_3 — компоненты кватерниона разворота Λ_p ; $-\pi \leq \alpha \leq \pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$. Существование решения \mathbf{p}_0 для любых значений кватерниона разворота Λ_p доказано ранее в работе [10]. Программные значения функций ω_i рассчитываются по формулам (19). В явном виде оптимальное решение $M_i(t)$ запишем следующим образом:

$$M_1 = m(t)p_{10}, M_2 = m(t)\sqrt{1 - p_{10}^2} \sin(\kappa + \gamma),$$

$$M_3 = m(t)\sqrt{1 - p_{10}^2} \cos(\kappa + \gamma),$$

где

$$m(t) = m_0[\text{sign}(t_p - t) + \text{sign}(t_t - t)]/2;$$

$$t_p = \min(\sqrt{J_2\beta/m_0}, \sqrt{2E_{\text{доп}}/u_0});$$

$$t_t = \max(\sqrt{J_2\beta/m_0}, J_2\beta C/\sqrt{2E_{\text{доп}}});$$

$$\gamma = \arcsin(p_{20}/\sqrt{1 - p_{10}^2}), \text{ если } p_{30} \geq 0,$$

$$\text{или } \gamma = \pi - \arcsin(p_{20}/\sqrt{1 - p_{10}^2}),$$

$$\text{если } p_{30} < 0 (|p_{10}| \neq 1);$$

случай $|p_{10}| = 1$ не рассматривается, так как он соответствует плоскому вращению вокруг продольной оси OX . В любой текущий момент времени t кватернион ориентации Λ описывается функцией

$$\Lambda(t) = \Lambda_H \circ \mathbf{e}^{\mathbf{p}_0\theta/2} \circ \mathbf{e}^{\mathbf{e}_1\rho/2},$$

где $\rho = (J_2 - J_1)p_{10}\theta/J_1$; $\theta = \frac{1}{J_2} \int_0^t |\mathbf{L}(t)| dt$, или $\theta = \frac{m_0}{2J_2} \int_0^t (t_p + t_m - |t - t_p| - |t - t_t|) dt$.

Для несимметричного КА (когда $J_1 \neq J_2 \neq J_3$) решение системы уравнений (2), (7), (11) находится только численными методами, например, методом последовательных приближений (в частности, [12, 16]). Как было показано раньше [14], оптимальное значение \mathbf{p}_0 не зависит от характера изменения модуля кинетического момента $|\mathbf{L}|$ в процессе разворота, если КА вращается по траектории с наименьшим значением интеграла (17), описываемой уравнениями (7), (11). Следовательно, краевую задачу прин-

ципа максимума можно решить с помощью метода итераций, подробно описанного в предыдущей работе [12].

Компьютерная апробация алгоритма оптимального управления

Приведем численный пример решения задачи оптимального управления. Рассмотрим разворот на 180° из исходного положения Λ_H , при котором оси КА совпадают по направлению с осями опорного базиса I , в заданное конечное положение Λ_K ; элементы кватерниона Λ_K равны: $\lambda_0 = 0$; $\lambda_1 = 0,707107$; $\lambda_2 = 0,39$; $\lambda_3 = 0,59$. Моменты инерции КА: $J_1 = 25603 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $J_2 = 91495 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $J_3 = 80662 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, а $u_0 = 0,07077 \text{ Н}\cdot\text{кг}^{-1/2}$, $E_{\text{доп}} = 5 \text{ Дж}$. После решения краевой задачи принципа максимума получили следующие значения: $\mathbf{p}_0 = \{0,455215; -0,347544; 0,819751\}$ и $S = 665 \text{ м}\cdot\text{кг}^{1/2}$. Исходя из рассчитанного \mathbf{p}_0 получили $m_0 = 16,8 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Так как $u_0 S > 2E_{\text{доп}}$, то опти-

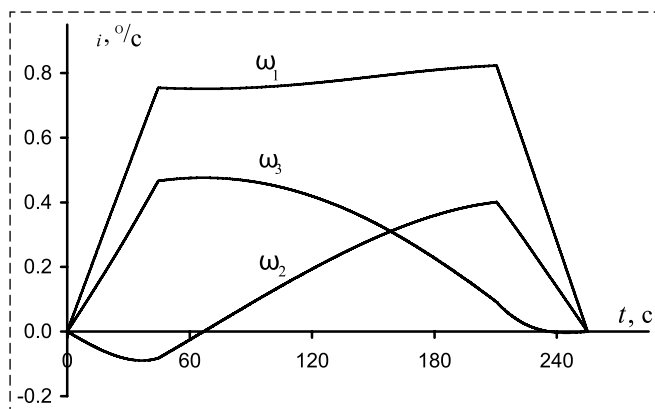


Рис. 2. Изменение угловых скоростей во время оптимального разворота
Fig. 2. Changing the angular velocities during optimal slew maneuver

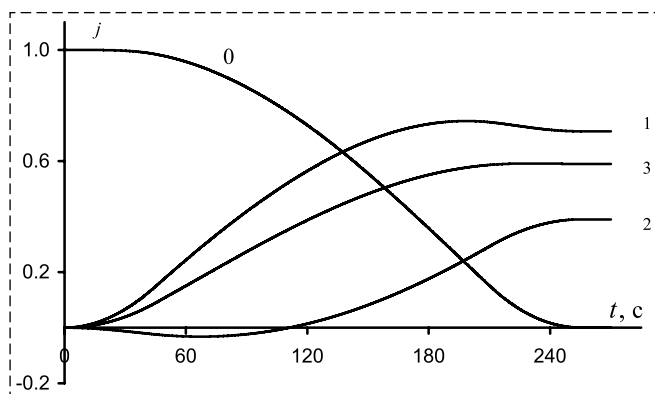


Рис. 3. Изменение компонент кватерниона Λ во время оптимального разворота
Fig. 3. Changing the components of quaternion Λ during optimal slew maneuver

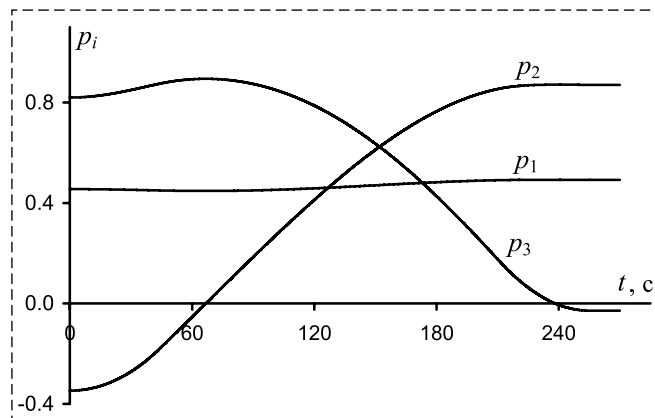


Рис. 4. Изменение компонент единичного вектора \mathbf{p} во время оптимального разворота
Fig. 4. Changing the components of the unit vector \mathbf{p} during optimal slew maneuver

мальное управление имеет две точки переключения с участком вращения по инерции. Время достижения максимально допустимой кинетической энергии $E_{\text{доп}}$ составляет $t_p = \sqrt{2E_{\text{доп}}}/u_0 = 44,7 \text{ с}$, а момент начала торможения $t_T = S/\sqrt{2E_{\text{доп}}} = 210,3 \text{ с}$. Время разворота $T = 255 \text{ с}$, и $r_0 = 1/(C\sqrt{2E_{\text{доп}}}) = 75 \text{ с}$.

Результаты численного моделирования движения КА во время оптимального разворота представлены на рис. 2—4. Из рис. 2 четко видны все три фазы — раскрутка, неуправляемое вращение, торможение до $\omega = 0$. Максимальная величина кинетического момента составила $L_{\text{max}} = 750,7 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$. В отличие от угловых скоростей переменные $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и p_1, p_2, p_3 — гладкие функции времени.

Заключение

Исследуется задача оптимального по времени разворота КА с учетом ограничений на управляющий момент и кинетическую энергию вращения. Нахождение оптимальной по быстродействию программы переориентации КА с кинетической энергией вращения, не превышающей допустимого уровня, весьма актуально. Ограниченность максимальной кинетической энергии вращения позволяет в экстренных случаях погасить угловую скорость за время, не превышающее заданного значения (в том числе в нештатной ситуации, когда требуется срочно прекратить маневр и максимально быстро стабилизировать КА).

Представлено аналитическое решение предложенной задачи. Доказано, что двухимпульсное управление, когда между разгоном и тор-

можением КА вращается по инерции, является оптимальным. Показано, что в течение всего интервала управления направление кинетического момента постоянно в инерциальной системе координат, и КА вращается вдоль "траектории свободного движения". Выписаны формализованные уравнения и расчетные выражения для построения оптимальной программы разворота. Приведены выражения для нахождения временных характеристик маневра. Для длительности разгона и торможения даны аналитические формулы. Приведены пример и результаты математического моделирования движения КА при оптимальном управлении, которые подтверждают практическую реализуемость описанного метода управления.

Рассмотренная задача достаточно актуальна. Значение и важность состоят в том, что искомое управление и соответствующее ему движение ограничено максимально допустимой энергией вращения. Наличие ограничений как на управляющие функции, так и на фазовые переменные — принципиальное отличие предложенной задачи относительно известных работ; задача оптимального разворота включает ограничения на силовой момент и угловую скорость КА, что придает полученному решению существенную новизну. Наличие готовых формул для синтеза оптимальной программы движения во время поворотного маневра делает выполненное исследование практически значимым и пригодным для непосредственного применения в практике космических полетов.

Список литературы

1. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.

2. Левский М. В. Использование универсальных переменных в задачах оптимального управления ориентацией космических аппаратов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 1. С. 53—59.

3. Левский М. В. Особенности управления ориентацией космического аппарата, оборудованного инерционными исполнительными органами // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16, № 3. С. 188—195.

4. Levskii M. V. Special aspects in attitude control of a spacecraft, equipped with inertial actuators // Computer science applications and information technology. 2017. Vol. 2, N. 4. P. 1—9.

5. Zhou H., Wang D., Wu B., EK Poh. Time-optimal re-orientation for rigid satellite with reaction wheels // International journal of control. 2012. Vol. 85, N. 10. P. 1—12.

6. Scrivener S., Thompson R. Survey of time-optimal attitude maneuvers // Guidance, control and dynamics. 1994. Vol. 17, N. 2. P. 225—233.

7. Liu S., Singh T. Fuel/time optimal control of spacecraft maneuvers // Guidance. 1996. Vol. 20, N. 2. P. 394—397.

8. Reshmin S. A. The threshold absolute value of a relay control bringing a satellite to a gravitationally stable position in optimal time // Doklady physics. 2018. Vol. 63, N. 6. P. 257—261.

9. Shen H., Tsiotras P. Time-optimal control of axis-symmetric rigid spacecraft with two controls // AIAA Guidance, control and dynamics. 1999. Vol. 22, N. 5. P. 682—694.

10. Бранец В. Н., Черток М. Б., Казначеев Ю. В. Оптимальный разворот твердого тела с одной осью симметрии // Космич. исслед. 1984. Т. 22, Вып. 3. С. 352—360.

11. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Решение задачи оптимального разворота осесимметричного космического аппарата с ограниченным и импульсным управлением при произвольных граничных условиях // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 2. С. 152—165.

12. Левский М. В. Применение принципа максимума Л. С. Понтрягина к задачам оптимального управления ориентацией космического аппарата // Известия РАН. Теория и системы управления. 2008. № 6. С. 144—157.

13. Левский М. В. К вопросу оптимального успокоения космического аппарата // Известия РАН. Теория и системы управления. 2011. № 1, с. 340. С. 147—161.

14. Levskii M. V. Optimal spacecraft terminal attitude control synthesis by the quaternion method // Mechanics of solids. 2009. Vol. 44, N. 2. P. 169—183.

15. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.

16. Левский М. В. Система управления пространственным разворотом космического аппарата. Патент на изобретение РФ № 2006431 // Бюллетень "Изобретения. Заявки и патенты". 1994. № 2. С. 49—50.

Dynamic Problem of Optimal Control of Spacecraft Attitude under Restriction on Phase Variables

M. V. Levskii, levskii1966@mail.ru,

Maximov Research Institute of Space Systems as Branch of the Khrunichev State Research and Production Space Center, Korolev, The Moscow region, Russian Federation

Corresponding author: Levskii Mikhail V., Ph.D., Leading Researcher, Maximov Research Institute of Space Systems as Branch of the Khrunichev State Research and Production Space Center, Korolev, The Moscow region, Russian Federation, e-mail: levskii1966@mail.ru

Accepted on February 19, 2021

Abstract

An analytical solution to the optimal control problem of spacecraft reorientation from an arbitrary initial angular position into a required final angular position under the restrictions on control functions and phase variables is presented (the controlling moment and angular velocity are restricted). Time of slew maneuver is minimized. The specific case was considered when maximum admissible kinetic energy of rotation is significant restriction. Constructing the optimal control of reorientation is based on Pontryagin's maximum principle and the quaternionic variables and models. It is shown that optimal mode is piecewise-continuous control when a direction of spacecraft's angular momentum is constant relative to the inertial coordinate system during rotation of a spacecraft; for a performing an optimal turn, the moment of forces is parallel to a straight line fixed in inertial space. Two types of optimal control are possible depending on the given initial and final positions and spacecraft's moments of inertia — relay control with one switching point when the controlling moment is maximal over the entire time interval of control (segments of acceleration and braking), and relay control with two switching point consisting of intensive acceleration, motion by inertia with the absented moment and an exit onto restriction of rotation energy, and then final braking with the maximum controlling moment. The analytical equations and relations for a finding the optimal control program are written down. The calculation formulas for determining the time characteristics of maneuver and computing a duration of acceleration and braking are given. The proposed algorithm of control provides maximally fast implementation of spacecraft reorientation under the limited kinetic energy of rotation. For an axially symmetric solid body (spacecraft), the optimal control problem, in dynamical statement, was solved completely — we obtained the dependences as explicit functions of time for the control variables, and relations for calculating the key parameters of the law of control are derived. The numerical example and results of mathematical simulation of spacecraft motion under the optimal control are presented, demonstrating the practical feasibility of the developed method for control of spacecraft attitude.

Keywords: spacecraft, attitude, quaternion, energy of rotation, maximum principle, control function, relay control

For citation:

Levskii M. V. Dynamic Problem of Optimal Control of Spacecraft Attitude under Restriction on Phase Variables, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 6, pp. 321–330.

DOI: 10.17587/mau.22.321-330

References

1. **Branets V. N., Shmyglevskii I. P.** The use of quaternions in problems of orientation of a rigid body, Moscow, Publishing center "Nauka", 1973, 320 p. (in Russian).
2. **Levskii M. V.** The use of universal variables in problems of optimal control concerning spacecrafts orientation, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2014, no. 1, pp. 53–59 (in Russian).
3. **Levskii M. V.** Features of attitude control of a spacecraft, equipped with inertial actuators, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no.3, pp. 188–195 (in Russian).
4. **Levskii M. V.** Special aspects in attitude control of a spacecraft, equipped with inertial actuators, *Computer Science Applications and Information Technology*, 2017, vol. 2, no. 4, pp. 1–9.
5. **Zhou H., Wang D., Wu B., EK Poh.** Time-optimal reorientation for rigid satellite with reaction wheels, *International Journal of Control*, 2012, vol. 85, no. 10, pp. 1–12.
6. **Scrivener S., Thompson R.** Survey of time-optimal attitude maneuvers, *Guidance, Control and Dynamics*, 1994, vol. 17, no. 2, pp. 225–233.
7. **Liu S., Singh T.** Fuel/time optimal control of spacecraft maneuvers, *Guidance*, 1996, vol. 20, no. 2, pp. 394–397.
8. **Reshmin S. A.** The threshold absolute value of a relay control bringing a satellite to a gravitationally stable position in optimal time, *Doklady Physics*, 2018, vol. 63, no. 6, pp. 257–261.
9. **Shen H., Tsiotras P.** Time-optimal control of axi-symmetric rigid spacecraft with two controls, *AIAA Guidance, Control and Dynamics*, 1999, vol. 22, no. 5, pp. 682–694.
10. **Branets V. N., Chertok M. B., Kaznacheev Yu. V.** Optimal rotation of a rigid body with one symmetry axis, *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1984, vol. 22, no. 3, pp. 352–360 (in Russian).
11. **Molodnikov A. V., Sapunkov Ya. G.** A solution of the optimal turn problem of an axially symmetric spacecraft with bounded and pulse control under arbitrary boundary conditions, *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2007, no. 2, c. 340, pp. 152–165 (in Russian).
12. **Levskii M. V.** Pontryagin's maximum principle in optimal control problems of orientation of a spacecraft, *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2008, no. 6, pp. 144–157 (in Russian).
13. **Levskii M. V.** Optimal spacecraft terminal attitude control synthesis by the quaternion method, *Mechanics of Solids*, 2009, vol. 44, no. 2, pp. 169–183.
14. **Levskii M. V.** On optimal spacecraft damping, *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2011, no. 1, pp. 147–161 (in Russian).
15. **Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F.** The mathematical theory of optimal processes, Moscow, Publishing center "Nauka", 1983, 392 p. (in Russian).
16. **Levskii M. V.** A system of controlling a spatial turn of spacecraft. The patent for the invention of the Russian Federation no. 2006431, *Byulleten' "Izobreteniya. Zayavki i patenty"*, 1994, no. 2, pp. 49–50.